

# 利用协方差矩阵拟合的阵列孔径扩展方法\*

刘恺忻<sup>1,2,3</sup> 付 进<sup>1,2,3</sup> 邹 男<sup>1,2,3</sup> 张光普<sup>1,2,3†</sup> 郝 宇<sup>1,2,3</sup>

(1 哈尔滨工程大学 水声技术全国重点实验室 哈尔滨 150001)

(2 工业和信息化部 海洋信息获取与安全工信部重点实验室(哈尔滨工程大学) 哈尔滨 150001)

(3 哈尔滨工程大学 水声工程学院 哈尔滨 150001)

2022 年 8 月 30 日收到

2022 年 12 月 13 日定稿

**摘要** 提出了一种协方差矩阵拟合的阵列孔径扩展方法来提高小孔径均匀直线阵的分辨力。该方法分析了具有不同阵元个数的阵列采集信号协方差矩阵之间的关系,并根据该关系构建阵列扩展的优化算法,利用小孔径实际阵列协方差矩阵拟合得到大孔径虚拟阵列的协方差矩阵。仿真分析与湖试数据处理结果表明,将拟合协方差矩阵用于现有方位估计方法中能够降低波束宽度,提高分辨力,并且随着虚拟阵元个数增加,目标分辨概率同步提高。当阵列孔径较小或环境信噪比较低时,本文方法可用于提高方位估计性能。

**关键词** 方位估计,阵列孔径扩展,协方差矩阵拟合,阵列信号处理

**PACS 数** 43.60, 43.30

**DOI:** 10.12395/0371-0025.2022074

## Array aperture extension method using covariance matrix fitting

LIU Kaixin<sup>1,2,3</sup> FU Jin<sup>1,2,3</sup> ZOU Nan<sup>1,2,3</sup> ZHANG Guangpu<sup>1,2,3†</sup> HAO Yu<sup>1,2,3</sup>

(1 *National Key Laboratory of Underwater Acoustic Technology, Harbin Engineering University Harbin 150001*)

(2 *Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security (Harbin Engineering University), Ministry of Industry and Information Technology Harbin 150001*)

(3 *College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University Harbin 150001*)

Received Aug. 30, 2022

Revised Dec. 13, 2022

**Abstract** An array aperture extension method based on covariance matrix fitting is proposed to improve the resolution of uniform linear array with small aperture. The relationship between the covariance matrices of signals received by arrays with different number of array elements is analyzed. According to this relationship, an array extension optimization algorithm is constructed to fit the covariance matrix of a large aperture virtual array by using the covariance matrix of a small aperture actual array. Simulation and lake experiment results show that using the fitted covariance matrix in existing DOA estimation methods can reduce the beamwidth and improve the resolution. As the number of virtual array elements increases, the resolution synchronously improves. This method can be used to improve the DOA estimation performance when the array aperture is insufficient or the signal-to-noise ratio is reduced.

**Keywords** DOA estimation, Array aperture extension, Covariance matrix fitting, Array signal processing

## 引言

波达方位估计 (DOA) 是水声阵列信号处理的重要研究内容之一,其作用是根据阵列采集信号获得目

标方位。DOA 估计是水声目标定位、跟踪和监测等研究的前提和基础<sup>[1-4]</sup>。分辨力是 DOA 估计重要的性能指标,但分辨力通常与阵列孔径存在正比关系,因此小孔径阵列难以获得高分辨力。本文研究一种基于协方差矩阵拟合的虚拟阵列扩展方法,能够实现

\* 国防基础科研项目 (JCKY2019604B001) 和国家自然科学基金项目 (61801138) 资助

† 通讯作者: 张光普, zhangguangpu@hrbeu.edu.cn

在不改变均匀直线阵阵元间距的情况下增大阵列孔径,从而改善小孔径阵列的分辨力。

常规波束形成 (CBF) 方法<sup>[5]</sup>是最有代表性的 DOA 估计方法。该方法具有很多优点,其鲁棒性高,受阵列误差影响小,当估计单目标方位时具有很高的精度,并且其计算量小,简单容易实现,因此实际工程中经常利用 CBF 方法进行方位估计。然而该方法的缺点是分辨力较低,以均匀直线阵为例,其 CBF 方法的分辨力正比于阵元个数和相邻阵元间距,因此阵元个数少或阵列孔径小会导致分辨力低。为了提高分辨力,学者们提出了很多高分辨 DOA 估计算法<sup>[6-11]</sup>,然而很多高分辨算法也需要较多的阵元个数以及较大的阵列孔径才能获得高分辨力以及高估计精度<sup>[12]</sup>,因此增加阵元个数,增加阵列孔径对提高角度分辨力有重要的作用。然而实际工程中,受到搭载平台尺寸的限制,通常不能大幅增大阵列孔径,因此学者们提出很多虚拟阵列孔径扩展方法,旨在增加虚拟阵列孔径以改善 DOA 估计性能。

Dogan 提出了基于高阶累积量的虚拟阵列扩展方法<sup>[13]</sup>,高阶累积量方法是虚拟阵元扩展的经典方法。Chevalier 等<sup>[14]</sup>研究了基于四阶累积量的方位估计问题,作者对比了二阶累积量协方差矩阵和四阶累积量协方差矩阵,证明了它们具有相同的代数结构,对于均匀直线阵,如果实际阵列有  $N$  个阵元,那么扩展阵列具有  $2N-1$  个虚拟阵元,但是扩展阵列有波束宽度损失,其波束宽度介于具有  $N$  个和  $2N-1$  个阵元的实际阵列的波束宽度之间,因此该方法扩展的虚拟阵元个数有限,可提升的方位估计性能受限。另外,由于高阶累积量运算以及高阶矩阵的伪逆运算具有较高计算量,因此该方法不常用于实际工程中。

阵列内插法<sup>[15]</sup>也是阵列扩展的常用方法,该方法的目的是获得一个映射矩阵将低维度导向矢量映射至高纬度导向矢量,该方法常用于改变阵列形状,也常用于在实际阵列中插入虚拟阵元以增加阵元个数。例如 Hyberg 等<sup>[16]</sup>利用阵列内插法将圆阵转化为阵元间距为半波长的均匀直线阵;由于基于压缩感知的 DOA 估计方法需要大量阵元个数才能获得高估计精度,因此 Cui 等<sup>[17]</sup>在稀疏阵中插入虚拟阵元,将稀疏阵转化为均匀直线阵,利用虚拟均匀直线阵进行 DOA 估计可以提高估计精度。但是该方法不能用于扩展阵列孔径,如果虚拟阵列孔径大于实际阵列孔径,映射矩阵会将协方差矩阵中的白噪声变为色噪声,恶化 DOA 估计性能<sup>[18]</sup>。映射矩阵预白化方法可有效改善噪声色化问题<sup>[18]</sup>,但是其导向矢

量变换误差较大,仍然不能得到良好的方位估计结果。另外,稀疏阵列也常用于扩展虚拟阵列,利用差分矩阵的概念获得具有更多阵元的虚拟阵列,从而增加分辨力和自由度。常见的稀疏阵列包括最小冗余阵列<sup>[19]</sup>、互质阵<sup>[20]</sup>、嵌套阵列<sup>[21]</sup>等,其中 Zhou 等<sup>[20]</sup>将 7 元互质阵列扩展为具有 13 个虚拟阵元的均匀直线阵,显著地提高了方位估计性能。

在上述文献的基础上,本文研究一种虚拟阵元个数可调,并且受噪声影响较小,能够有效提高分辨力的阵列扩展方法,即利用协方差拟合方法的阵列孔径扩展方法,该方法可以在不改变均匀直线阵阵元间距的情况下增加虚拟阵元个数,扩展阵列孔径。该方法的研究思路如下:首先,利用协方差拟合准则构建阵列扩展优化算法;然后,根据实际阵列采集信号的协方差矩阵,利用优化算法拟合得到扩展虚拟阵列的协方差矩阵;最终,将虚拟阵列的协方差矩阵用于现有方位估计方法以提高方位估计性能。构建优化算法主要依据以下两个事实:(1)理论上当多个采集信号互不相关时,均匀直线阵的协方差矩阵具有托普利兹 (Toeplitz) 结构<sup>[22-23]</sup>。(2)如果实际阵列和扩展阵列的阵元个数分别为  $M$  和  $M'$  ( $M' > M$ ),那么扩展阵列协方差矩阵的 1 至  $M$  行、1 至  $M$  列的子矩阵理论上与实际阵列协方差矩阵一致。与上述现有方法相比,该方法具有如下优势:首先该方法可以根据分辨力的需要调整虚拟阵元个数,比高阶累积量方法更灵活;其次,扩展阵列的协方差矩阵的噪声分量仍然是白噪声,可以获得比阵列内插法更好的方位估计性能。本文利用大量仿真验证该方法的有效性,仿真结果表明,随着虚拟阵元个数的增加,扩展阵列的 CBF 方法主瓣宽度逐渐降低,双目标的分辨概率和估计精度逐渐升高,相比于实际阵列,扩展阵列可以获得更好的方位估计性能。

## 1 物理模型

假设一个远场平面波入射到一个  $M$  元的均匀直线阵 (ULA),入射方向  $\theta$  是信号方向与阵列法线方向的夹角。如果空间中有  $K$  个窄带信号,其中第  $k$  个信号表示为  $s_k(t)$ ,那么阵列接收数据可以表示为<sup>[24]</sup>

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{N}(t) = \mathbf{A}(\vartheta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{A}(\vartheta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$  表示  $K$  个目标的导向矢量,  $\mathbf{A}(\vartheta)$  的第  $(m, k)$  个元素表示为  $e^{-j(2\pi/\lambda)(m-1)d \sin(\theta_k)}$ ,  $\lambda$  表示信号波长,  $d$  表示阵元间距,本文假设  $d = \lambda/2$ 。  $\mathbf{S}(t)$  和  $\mathbf{N}(t)$  分别表示为  $\mathbf{S}(t) = (s_1(t), \dots, s_K(t))^T$ ,  $\mathbf{N}(t) =$

$(n_1(t), \dots, n_M(t))^T$ ,  $(\cdot)^T$  表示向量或矩阵的转置。假设阵列采集到的噪声是满足时空不相关性的零均值高斯白噪声, 并且  $K$  个信号之间互不相关, 那么  $\mathbf{x}(t)$  的协方差矩阵  $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)]$  表示为

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{A}(\vartheta)\text{diag}(\sigma_s^2)\mathbf{A}^H(\vartheta) + \text{diag}(\sigma_n^2) = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n, \quad (2)$$

其中,  $E[\cdot]$  表示数学期望运算,  $(\cdot)^H$  表示共轭转置,  $\text{diag}(\cdot)$  表示将向量对角化。 $\mathbf{R}_s = \mathbf{A}(\vartheta)\text{diag}(\sigma_s^2)\mathbf{A}^H(\vartheta)$  是纯信号协方差矩阵,  $\mathbf{R}_n = \text{diag}(\sigma_n^2)$  是噪声协方差矩阵,  $\sigma_s^2 = [\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2]$  和  $\sigma_n^2 = [\sigma_n^2, \dots, \sigma_n^2]$  分别表示信号功率和噪声功率。

对于 CBF 方法, 观察空间角度  $\phi_q$  的输出波束功率表示为

$$P(\phi_q) = \mathbf{w}^H(\phi_q)\mathbf{R}_x\mathbf{w}(\phi_q), \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{w}(\phi_q)$  为加权向量, CBF 方法的加权向量表示为  $\mathbf{w}_{\text{CBF}}(\phi_q) = \mathbf{a}(\phi_q)/M$ 。CBF 方法将  $P(\phi_q)$  中最大值对应的  $\phi_q$  作为目标估计方位,  $P(\phi_q)$  具体表示为<sup>[12]</sup>

$$p(\phi_q) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi f d N}{c}(\sin\phi_q - \sin\theta_k)\right)}{N \sin\left(\frac{\pi f d}{c}(\sin\phi_q - \sin\theta_k)\right)} \right|^2. \quad (4)$$

根据式 (4), CBF 方法的半功率波束宽度 ( $-3$  dB 波束宽度) 计算为

$$\theta_{0.5} = \frac{0.886\lambda}{Md} \text{ (rad)}. \quad (5)$$

根据式 (5), 在阵元间距不变的情况下, 增加阵元个数可以降低半功率波束宽度, 提高分辨率。

## 2 协方差矩阵拟合的阵列孔径扩展方法

根据式 (2) 中  $\mathbf{R}_s$  的表达式,  $\mathbf{R}_s$  的第  $(m, n)$  项  $R_{s(m, n)}$  表示为  $\sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-j(m-n)\omega_k}$ , 其中  $\omega_k = (2\pi/\lambda)d \sin(\theta_k)$ , 显然,  $\mathbf{R}_s$  中平行于主对角线的元素相同, 并且关于主对角线对称的两个元素互为共轭, 因此  $\mathbf{R}_s$  是 Toeplitz 矩阵, 并且  $\mathbf{R}_s$  为半正定矩阵<sup>[25]</sup>。

如图 1 所示, 本文在阵元间距不变的情况下增加阵元个数, 实现阵列扩展, 阵元个数从  $M$  扩展到  $M'$ , 那么扩展前后的协方差矩阵维度分别为  $M \times M$  和

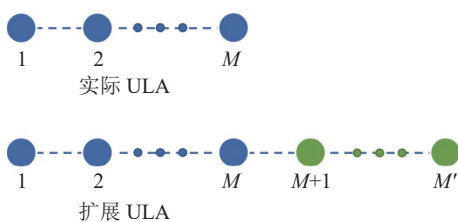


图 1 实际阵列与扩展阵列模型

$M' \times M'$ 。假设  $\tilde{\mathbf{R}}_x = \tilde{\mathbf{R}}_s + \text{diag}(\sigma_n^2)$  为扩展阵列接收信号的协方差矩阵, 本文利用如下拟合准则<sup>[25-26]</sup> 求解  $\tilde{\mathbf{R}}_x$ :

$$f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \left\| \mathbf{X}^{-1/2}(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X})\tilde{\mathbf{X}}^{-1/2} \right\|_F^2. \quad (6)$$

最小化  $f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$  可以实现将  $\mathbf{X}$  拟合为  $\tilde{\mathbf{X}}$ , 其中  $\|\mathbf{A}\|_F$  是  $\mathbf{A}$  的 F 范数。根据文献 [25], 最小化  $f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$  可以转化为

$$\min \text{Tr}[\mathbf{X}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}] + \text{Tr}[\tilde{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{X}], \quad (7)$$

其中,  $\text{Tr}[\mathbf{A}]$  表示  $\mathbf{A}$  的迹。由于该阵列扩展方法只改变阵元个数, 不改变阵元间距, 因此理论上  $\tilde{\mathbf{R}}_x$  的第 1 至  $M$  行、第 1 至  $M$  列的子矩阵与  $\mathbf{R}_x$  相同, 将子矩阵表示为  $\tilde{\mathbf{R}}_{x|1:M}^{1:M}$ , 那么可以利用式 (7) 实现将  $\mathbf{R}_x$  拟合为  $\tilde{\mathbf{R}}_x$ 。  $\mathbf{R}_x$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_x$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{x|1:M}^{1:M}$  的关系如图 2 所示。

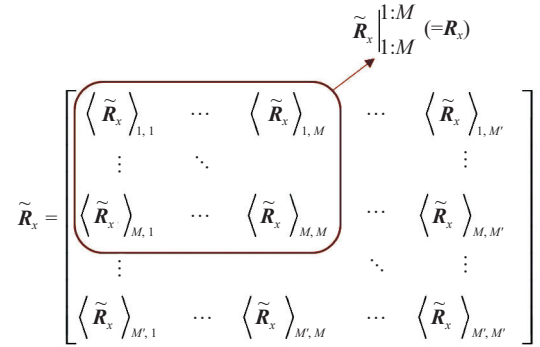


图 2  $\mathbf{R}_x$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_x$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{x|1:M}^{1:M}$  的关系

另外, 理论上  $\mathbf{R}_s$  是半正定矩阵并且噪声功率大于 0, 即  $\tilde{\mathbf{R}}_s = \text{Toeplitz}(\mathbf{r}) \geq 0$ ,  $\sigma > 0$ 。综上, 求解  $\tilde{\mathbf{R}}_x$  的优化算法构建为

$$\min_{\mathbf{r}, \sigma} \text{Tr}[\mathbf{R}_x^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M}] + \text{Tr}\left[\left(\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M}\right)^{-1}\mathbf{R}_x\right]$$

$$\text{s.t. } \tilde{\mathbf{R}}_x = \text{Toeplitz}(\mathbf{r}) + \text{diag}(\sigma),$$

$$\text{Toeplitz}(\mathbf{r}) \geq 0,$$

$$\sigma > 0. \quad (8)$$

由于优化算法 (8) 中目标函数的  $(\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M})^{-1}$  不能直接求解, 需要引入  $M \times M$  维的  $\mathbf{G}$  矩阵代替  $(\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M})^{-1}\mathbf{R}_x$ , 并且两者满足  $\text{Tr}(\mathbf{G}) \geq \text{Tr}[(\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M})^{-1}\mathbf{R}_x]$ 。由于  $\text{Tr}[(\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M})^{-1}\mathbf{R}_x] = \text{Tr}[\mathbf{R}_x^{1/2}(\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M})^{-1}\mathbf{R}_x^{1/2}]$ , 因此需要在优化算法中加入约束  $\mathbf{G} \geq \mathbf{R}_x^{1/2}(\tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M})^{-1}\mathbf{R}_x^{1/2}$ , 该约束等价于

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{R}_x^{1/2} \\ \mathbf{R}_x^{1/2} & \tilde{\mathbf{R}}_x|1:M^{1:M} \end{bmatrix} \geq 0.$$

根据上述内容, 优化算法 (8) 转化为

$$\begin{aligned} & \min_{r, \sigma, G} \text{Tr} \left[ \mathbf{R}_x^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_x \right]_{1:M} + \text{Tr}[\mathbf{G}] \\ & \text{s.t. } \tilde{\mathbf{R}}_x = \text{Toeplitz}(\mathbf{r}) + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}), \\ & \quad \text{Toeplitz}(\mathbf{r}) > 0, \quad \boldsymbol{\sigma} > 0, \\ & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{R}_x^{1/2} \\ \mathbf{R}_x^{1/2} & \tilde{\mathbf{R}}_x \end{bmatrix}_{1:M} \succeq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

优化算法 (9) 是一个半正定凸优化问题<sup>[27]</sup>, 该问题可以利用一些工具求解, 例如 SDP 解算器 sdp3<sup>[28]</sup>、SeDumi 软件<sup>[29]</sup> 或 CVX 凸优化工具箱<sup>[30]</sup>。利用该算法求解的  $\mathbf{r}$  和  $\boldsymbol{\sigma}$  获得扩展阵元后的协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_x = \text{Toeplitz}(\mathbf{r}) + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma})$ , 将  $\hat{\mathbf{R}}_x$  用于 DOA 估计算法中可以提高算法的性能, 本文仅利用  $\hat{\mathbf{R}}_x$  的信号成分  $\hat{\mathbf{R}}_s = \text{Toeplitz}(\mathbf{r})$  进行 DOA 估计。图 3 展示了本文方法的流程图。

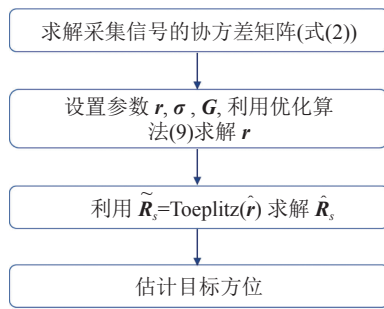


图 3 算法流程图

$\hat{\mathbf{R}}_s$  不仅可以用于 CBF 方法中, 也可以用于其他基于协方差矩阵的方位估计的算法中。利用  $\hat{\mathbf{R}}_s$  具有以下两个优势: (1) 增加虚拟阵元个数和阵列孔径可以提高分辨率和估计精度; (2) 很多方位估计方法受噪声影响较大, 仅利用协方差矩阵的信号分量  $\hat{\mathbf{R}}_s$  进行 DOA 估计可以降低噪声功率, 进一步提高方位估计性能。需要说明的是本文方法在实际阵列协方差矩阵的基础上进行阵列扩展, 扩展阵列协方差矩阵与实际阵列具有相同目标信息, 因此本文方法不能提高最大可分辨目标个数(自由度)。本文方法的目的在于提高分辨率, 进一步发挥实际阵列的价值, 在  $K < M - 1$  的条件下, 尽可能准确估计所有目标的方向。

### 3 数值仿真分析

在本节中将采集信号真实协方差矩阵  $\mathbf{R}_x$  和扩展协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_x$  应用于现有方位估计方法中考察本文算法扩展阵元的能力。仿真中, 接收信号都是频率为 3 kHz 的窄带信号, 并且具有随机相位, 接收信号之间满足弱相关性。信号快拍数为 500, 实际阵列和

扩展阵列的阵元间距为 3 kHz 的半波长, 即 0.25 m。

#### 3.1 方位谱图

假设空间中有两个互不相关的信号, 其方位分别是  $10^\circ$  和  $20^\circ$ 。实际 ULA 阵元个数为 10, 扩展阵元个数为 20, 信噪比 (SNR) 为 10 dB。下列仿真比较实际阵列、扩展阵列和理论阵列的结果, 图例中实际 ULA、扩展 ULA、理论 ULA 分别表示阵元未扩展前的结果、利用本文方法或阵列内插法的扩展阵元后的结果、与扩展阵列具有相同阵元个数的实际阵列的理论结果。图 4 为 CBF 方法方位谱图, 图中实际阵列无法区分两个目标, 而扩展阵列可以清晰地分辨两个目标。

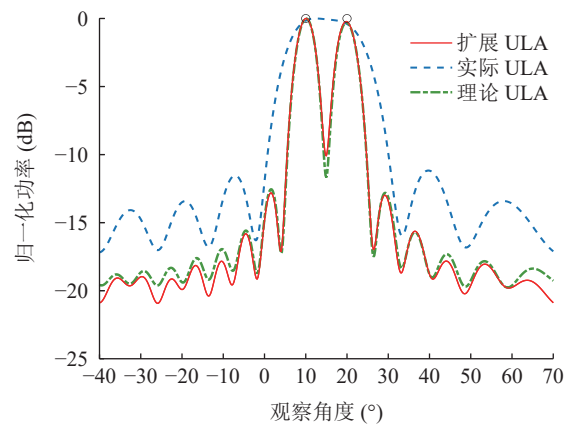


图 4 CBF 方法阵元扩展前后波束图

本文方法也可以用于改善高分辨方位估计方法的性能。图 5 为阵列扩展前后 Capon<sup>[6-7]</sup> 和 MUSIC<sup>[8-9]</sup> 方法的方位谱图, 两个目标方位为  $10^\circ$  和  $15^\circ$ , 实际阵元个数为 10, 扩展阵元个数为 20, SNR 为 0 dB。可以看出阵列扩展前两个方法几乎不能分辨双目标, 而阵列扩展后两个方法可以清晰地分辨双目标。值得注意的是扩展阵列的 Capon 和 MUSIC 方法具有比理论阵列更低的旁瓣高度, 并且扩展阵列的 MUSIC 方法具有比理论阵列更高的分辨力, 这是因为这两个方法受噪声影响严重, 而本文方法具有降低噪声功率的能力, 因此扩展阵列可以获得更好的方位估计结果。图 4 和图 5 初步验证了本文方法的有效性。

#### 3.2 CBF 方法主瓣宽度变化

CBF 方法的主瓣宽度随着阵元个数增多而逐渐降低, 本文借助这个特性验证该方法扩展阵元的能力。另外阵列内插法<sup>[18]</sup> 也可以实现在阵元间距不变的情况下增加虚拟阵元个数, 因此下列仿真对比阵列内插法和本文方法的结果。图中的每个结果都进

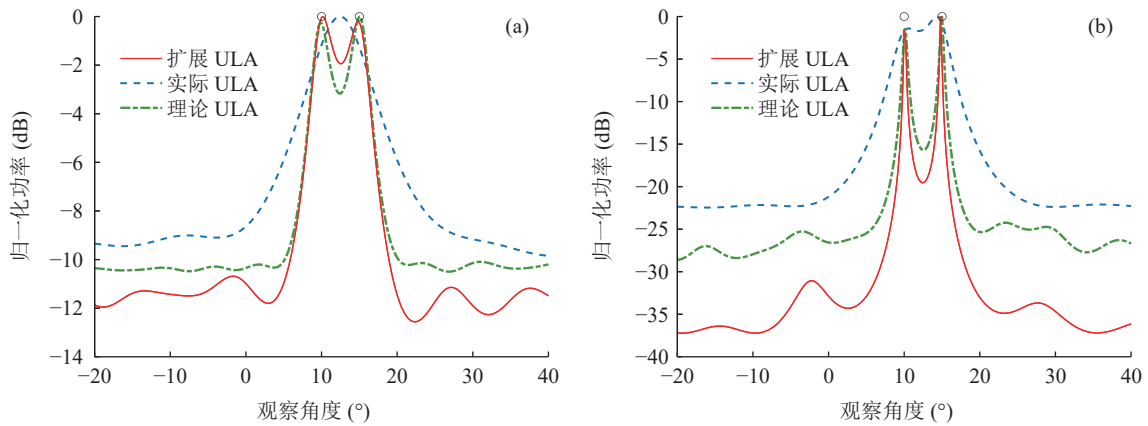


图 5 阵元扩展前后方位谱图 (a) Capon; (b) MUSIC 方法

行 100 次独立蒙特卡罗实验。

图 6 所示为实际阵列、两种方法的扩展阵列和理论阵列的主瓣宽度, 其中实际阵列阵元个数为 10, 扩展阵列的虚拟阵元个数从 14 增加到 30, 目标方位为  $0^\circ$ , SNR 为 10 dB, 阵列内插法角度变换区间为  $-10^\circ$  至  $10^\circ$ 。该仿真条件下实际阵列的主瓣宽度约为  $10.4^\circ$ 。两个阵列扩展方法的主瓣宽度都随着虚拟阵元个数的增多而逐渐降低, 但是由于阵列内插法的导向矢量变换误差较大<sup>[18]</sup>, 该方法的主瓣宽度下降速度缓慢, 而本文方法显著地降低主瓣宽度, 并且几乎与理论阵列的主瓣宽度一致。图 6 证明本文方法可以有效地扩展阵列孔径, 提高分辨力。

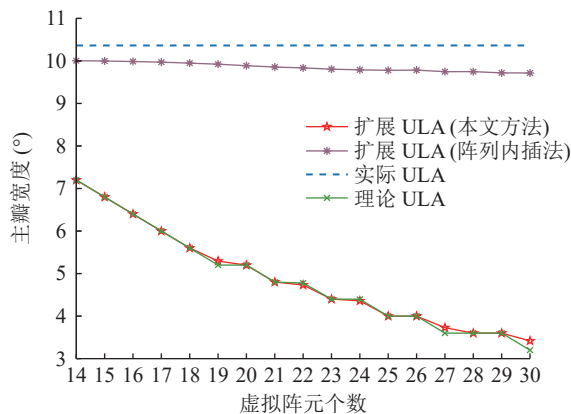


图 6 CBF 方法的主瓣宽度随虚拟阵元个数变化情况

### 3.3 估计精度和分辨概率

下面利用 CBF 方法考察当空间中存在双目标时, 扩展阵列的估计精度和分辨概率受虚拟阵元个数、SNR 以及双目标角度间隔的影响情况。本文利用均方误差 (MSE) 来判断方位估计的准确程度。CBF 方法峰值处的最小凹陷幅度低于  $-3$  dB 时两个目标被区分, 如果方位估计结果满足式 (10), 则判定为成功分辨两个目标<sup>[12]</sup>。

$$\left| \hat{\theta}_{1t} - \theta_1 \right| + \left| \hat{\theta}_{2t} - \theta_2 \right| < |\theta_1 - \theta_2|, \quad (10)$$

其中,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  表示两个目标真实方位,  $\hat{\theta}_{1t}$  和  $\hat{\theta}_{2t}$  分别表示第  $t$  次蒙特卡罗实验的两个目标的估计方位。如果总共进行  $F$  次试验, 其中有  $f$  次试验的估计结果满足式 (10), 那么分辨概率为  $f/F$ 。如果分辨概率为 0 则无法区分两个目标, 相应的 MSE 用“UD”表示。

#### 3.3.1 虚拟阵元个数

图 7 所示为 MSE 和分辨概率随虚拟阵元个数变化情况。假设双目标方位为  $10^\circ$  和  $18^\circ$ , 实际阵元个数为 10, 扩展阵元个数从 14 增加到 30, SNR 为 10 dB, 阵列内插法角度变换区间为  $5^\circ$  至  $25^\circ$ 。图中实际阵列和阵列内插法都无法区分双目标。当虚拟阵元个数大于 18 时本文方法可以区分双目标, 并且当虚拟阵元个数大于 19 时分辨概率为 100%, 本文方法的分辨概率略小于理论阵列。另外, 图 7(a) 中当虚拟阵元个数为 18 和 19 时, 本文方法的 MSE 低于理论阵列, 其原因是本文方法仅利用扩展阵列协方差矩阵的信号分量进行方位估计, 这可以降低噪声功率, 因此本文方法会出现扩展阵列的 MSE 低于理论阵列的情况。

#### 3.3.2 信噪比

假设 SNR 从  $-10$  dB 增加到 20 dB, 图 8 为 MSE 和分辨概率随 SNR 变化情况, 其中双目标方位为  $10^\circ$  和  $18^\circ$ , 实际阵元个数为 10, 扩展阵元个数为 20, 阵列内插法角度变换区间为  $5^\circ$  至  $25^\circ$ 。由图可见, 实际阵列和阵列内插法在任何信噪比下都不能区分双目标。当 SNR 大于  $-8$  dB 时理论阵列即可分辨双目标, 并且当 SNR 大于  $-4$  dB 时分辨概率约为 100%。当 SNR 大于  $-2$  dB 时本文方法可以区分双目标, 并且当 SNR 大于 4 dB 时分辨概率约为 100%。随着信噪比升高, 本文方法的估计误差逐渐降低。

图 9 对比了文献 [20] 中互质阵以及本文扩展阵

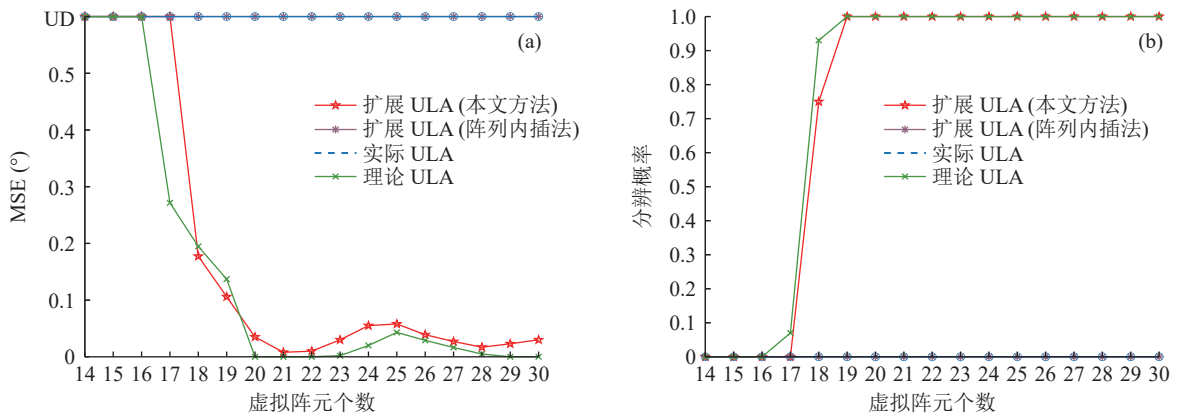


图 7 方位估计性能随虚拟阵元个数变化情况 (a) 方位估计均方误差; (b) 分辨概率

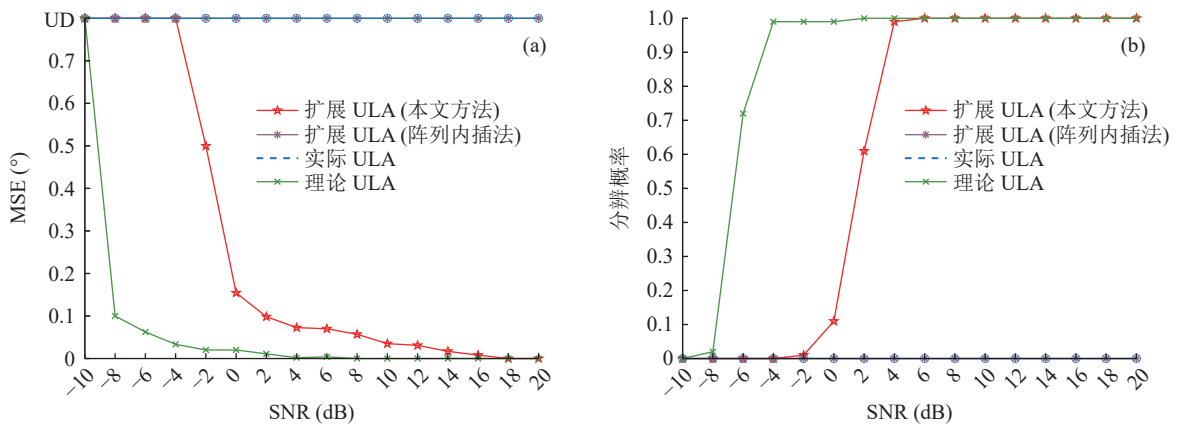


图 8 方位估计性能随信噪比变化情况 (a) 方位估计均方误差; (b) 分辨概率

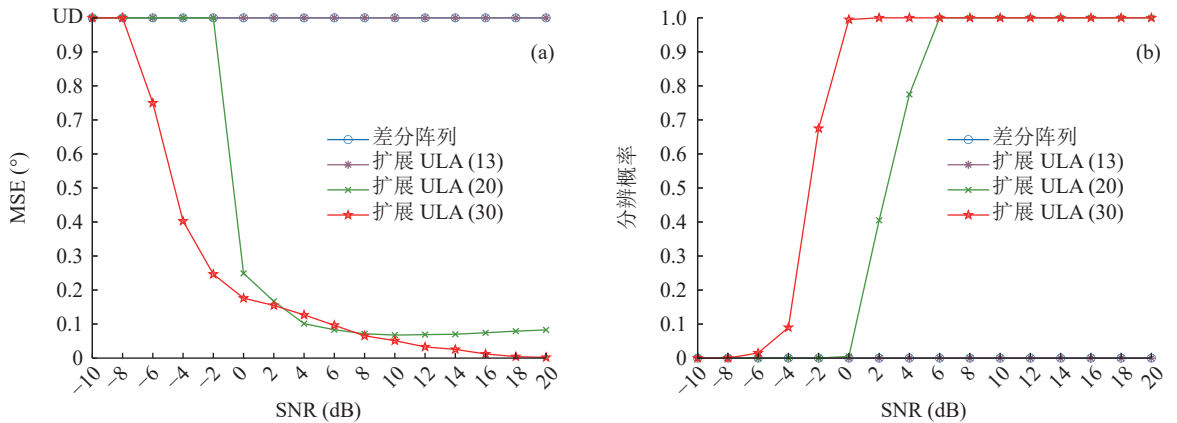


图 9 方位估计性能随信噪比变化情况 (a) 方位估计均方误差; (b) 分辨概率

列的方位估计性能。互质阵如文献 [20] 的图 2 所示, 7 元互质阵阵元序号为 [0 3 5 6 9 10 12], 本文方法利用 7 元 ULA 进行阵列扩展, 互质阵与 ULA 的阵元间距都是半波长, 即互质阵阵元位置为  $[0 3 5 6 9 10 12] \times \lambda/2$ , ULA 阵元位置为  $[0 1 \dots 6] \times \lambda/2$ 。利用本文方法扩展该 ULA, 扩展阵列阵元个数为 13, 20, 30, 其余仿真条件与图 8 一致。图 9 中可以看出差分阵列和 13 元扩展 ULA 在任何信噪比下都不能区分两个目标, 而 20 元和 30 元扩展 ULA 分别当 SNR 大于 6 dB

和 0 dB 时具有 100% 的分辨概率。

### 3.3.3 双目标方位角度间隔

图 10 所示为 CBF 方法的 MSE 和分辨概率随双目标角度间隔变化情况。第 1 个目标方位为  $10^\circ$ , 第 2 个目标从  $14^\circ$  增加到  $25^\circ$ , 即双目标角度间隔从  $4^\circ$  增加到  $15^\circ$ , SNR 为 10 dB, 实际阵元个数为 10, 扩展阵元个数为 20, 阵列内插法角度的变换区间为  $5^\circ$  至  $30^\circ$ 。图中实际阵列需要角度间隔大于  $14^\circ$  才能够分辨双目标。阵列内插法可以提高角度分辨力,

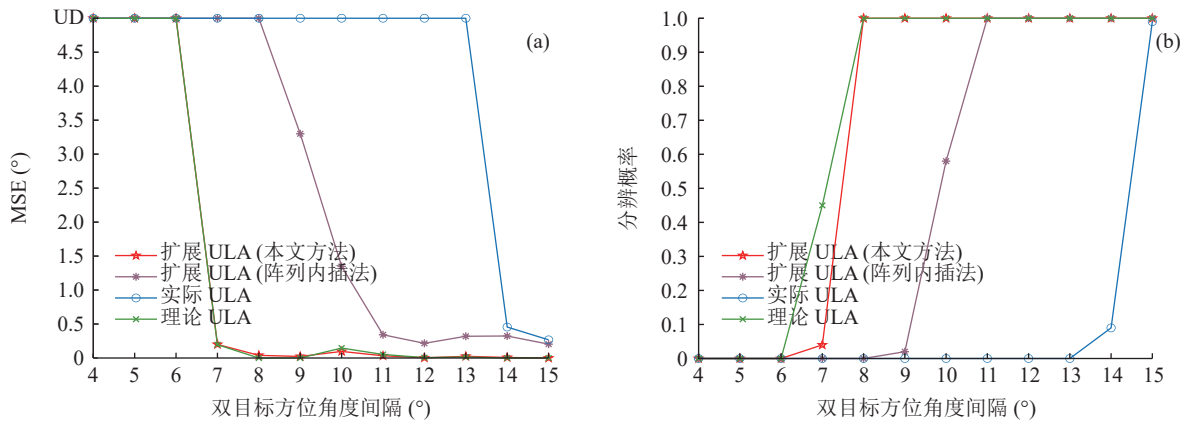


图 10 方位估计性能随双目标方位角度间隔变化情况 (a) 方位估计均方误差; (b) 分辨概率

当角度间隔大于 9° 时该方法可以分辨双目标。相比于阵列内插法, 本文方法更有效地提高分辨力, 当间隔大于 7° 时本文方法即可分辨双目标, 并且本文方法的估计精度与理论阵列近似。

图 11 对比了互质阵差分阵列以及本文扩展阵列的方位估计性能随双目标方位角度间隔变化情况。互质阵与 ULA 的阵列结构与图 9 一致, 利用本文方法扩展 ULA, 其他仿真条件与图 10 相同。从图中可看出, 当角度间隔大于 12° 时差分阵列具有 100% 的分辨概率和较高的估计精度, 13 元扩展 ULA 的分

辨概率与差分阵列近似, 但是估计精度低于差分阵列, 而 20 元和 30 元扩展 ULA 显著地提高了分辨概率, 当角度间隔分别大于 8° 和 7° 时, 两个阵列具有 100% 的分辨概率。

### 4 湖上试验数据分析

本节通过湖试数据处理结果验证本文方法的性能, 试验地点为湖北宜昌清江, 试验态势和方位估计结果如图 12 所示。

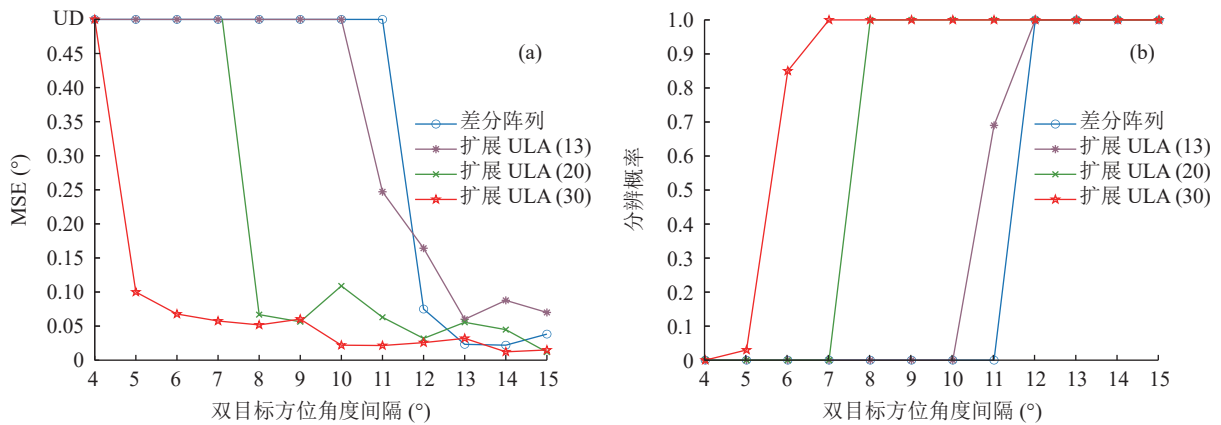


图 11 方位估计性能随双目标方位角度间隔变化情况 (a) 方位估计均方误差; (b) 分辨概率

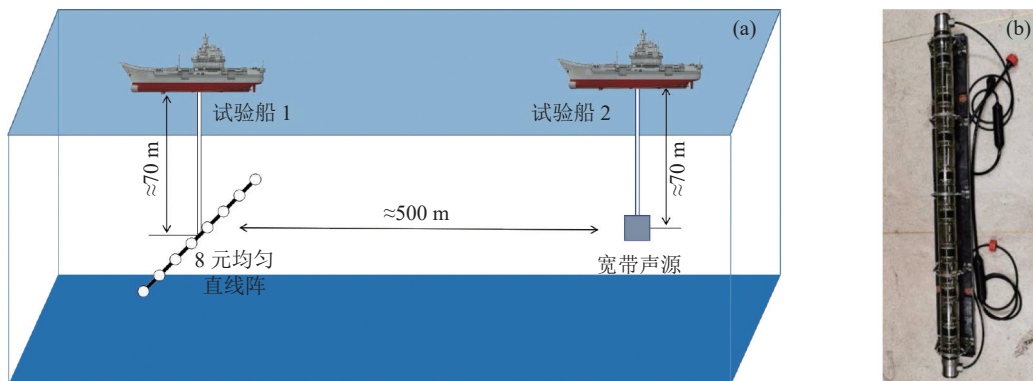


图 12 (a) 湖试试验态势; (b) 8 元均匀直线阵照片

### 4.1 湖试试验态势

湖试数据为 8 元声压阵的输出, 阵元间距约为 0.19 m, 该阵列垂直悬挂于一条试验船上 (试验船 1)。另一条试验船 (试验船 2) 拖曳着宽带声源, 该声源每隔 4 s 发射一次归一化带宽为 0.15 至 0.21 的宽带随机噪声, 归一化频率为信号频率与采样频率的比值, 信噪比约为 0 dB。声源和 ULA 均吊放于水下约 70 m 处, 声源位于阵列的 314° 方向附近, 距离阵列约 500 m。图 12 为湖试示意图以及 8 元均匀直线阵照片。

### 4.2 DOA 估计结果

截取数据中归一化频率为 0.160 至 0.161 的部分进行处理, 观察 80 s 的数据。扩展阵列虚拟阵元个数为 20。图 13(a) 和图 13(b) 分别为实际阵列和扩展阵列的方位历程图, 图 13(c) 为第 1 秒数据的方位谱。由图 13 可以看出实际阵列具有较宽的主瓣宽度和较高的旁瓣高度, 从图 13(a) 中难以确定目标方位, 而扩展阵列的主瓣更窄, 旁瓣高度低, 图 13(b) 中目标方位更加清晰。

为了验证估计方位的准确性, 在图 14 中比较了实际阵列和扩展阵列的估计方位以及目标真实方

位。试验中两个实验船上均安装 GPS 来获取阵列和声源的经纬度, 并且在阵列上安装方位姿态仪以实时获取阵列在水下的转动角度, 利用 GPS 和方位姿态仪的数据可以获得声源的真实方位。另外, 利用图 13(a)(b) 的方位谱可获得目标的估计方位。由于当估计单目标方位时 CBF 方法的估计精度较高, 因此图 14 中实际阵列和扩展阵列都得到准确的估计方位, 实际阵列估计误差为 0.31°, 扩展阵列的估计误差为 0.24°, 因此本文方法在提高分辨力的同时仍然维持良好的估计精度。

## 5 结论

角度分辨力和估计精度是方位估计重要的性能指标, 增大阵列孔径和阵元个数可以提高分辨力和估计精度。然而在小尺寸搭载平台中不能大幅度增加阵列孔径, 因此, 本文提出一种协方差矩阵拟合方法的虚拟阵列孔径扩展方法, 该方法可以在阵元间距不变的情况下增加虚拟阵元个数, 当阵元个数不足时, 本文方法有助于提高分辨力和估计精度。

本文方法利用协方差矩阵拟合准则, 根据实际阵列接收数据的协方差矩阵拟合得到扩展阵列的协方差矩阵, 将扩展阵列的协方差矩阵用于方位估计

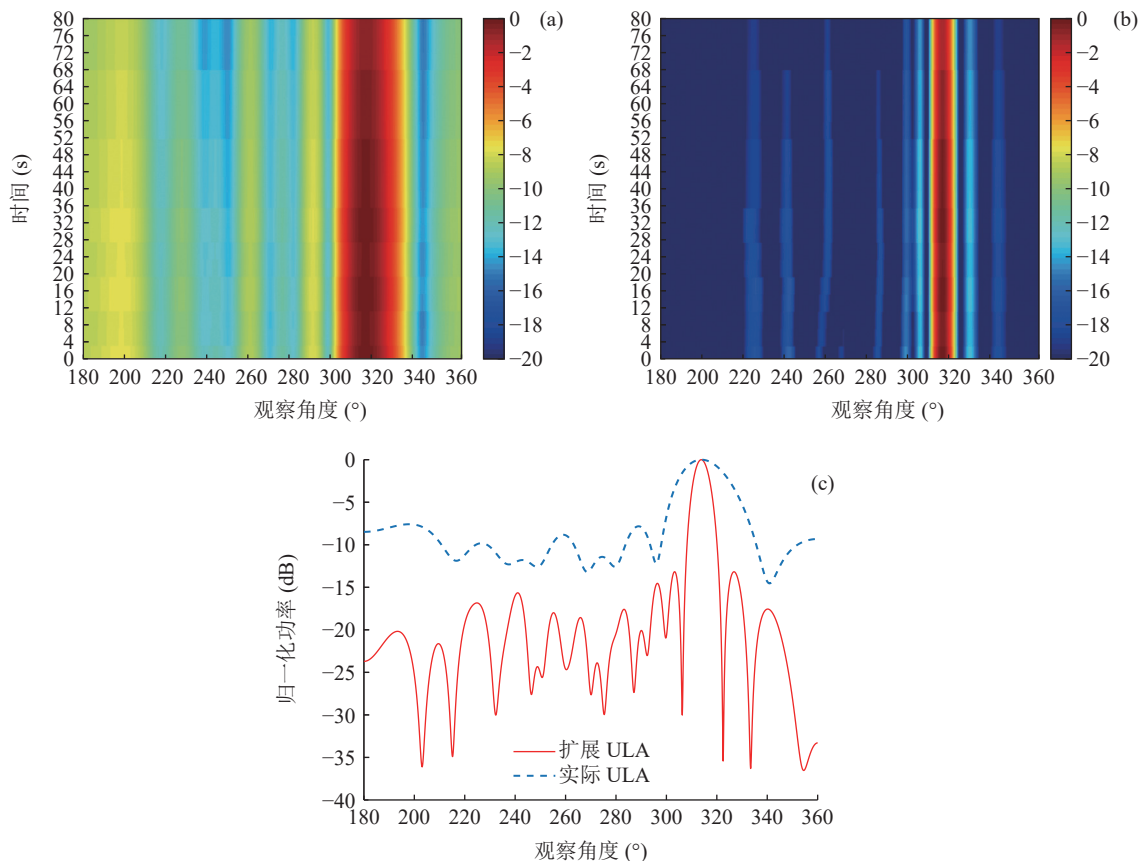


图 13 (a) 实际阵列方位的历程图; (b) 扩展阵列方位的历程图; (c) 第 1 秒数据的方位谱

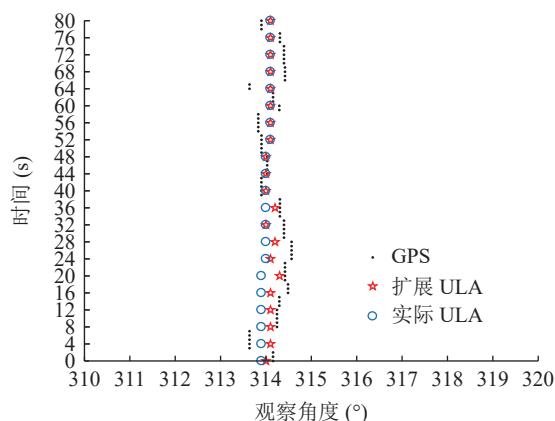


图 14 实际阵列和扩展阵列的估计方位与目标真实方位

算法中可以提高方位估计性能。仿真分析中利用 CBF、Capon、MUSIC 方法验证方法的有效性, 仿真结果表明, 随着虚拟阵元个数增加, 扩展阵列的主瓣宽度逐渐降低, 双目标估计精度和分辨概率逐渐提高。将该方法用于湖中试验也获得良好的估计结果。

### 参 考 文 献

- 1 Sun S B, Zhang X Y, Zheng C, *et al.* Underwater acoustic localization of the black box based on generalized second order time difference of arrival (GSTDOA). *IEEE J. Oceanic Eng.*, 2020; **45**(4): 1268—1279
- 2 王燕, 苏钰, 齐滨, 等. 单基阵三维纯方位水下信标声学定位方法. *声学学报*, 2021; **46**(3): 375—386
- 3 Zheng Z, Huang Y, Wang W Q, *et al.* Spatial smoothing PAST algorithm for DOA tracking using difference coarray. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2019; **26**(11): 1623—1627
- 4 Shi C, Wang F, Sellathurai M, *et al.* Power minimization based robust OFDM radar waveform design for radar and communication systems in coexistence. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2018; **66**(5): 1316—1330
- 5 Cox H, Zeskind R M, Owen M H. Robust adaptive beamforming. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, 1987; **ASSP-35**(10): 1365—1376
- 6 Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 1969; **57**(8): 1408—1418
- 7 郭拓, 王英民, 任笑莹, 等. 采用空间谱加权稀疏约束的稳健Capon波束形成方法. *声学学报*, 2018; **43**(4): 612—619
- 8 Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1986; **34**(3): 276—280
- 9 陈羽, 孟洲, 马树青等. 矢量水听器垂直阵列数据融合高分辨方位估计算法. *声学学报*, 2015; **40**(6): 807—815
- 10 Yang T C. Deconvolved conventional beamforming for a horizontal line array. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 2018; **43**(1): 160—172
- 11 Yang Y, Chu Z, Xu Z, *et al.* Two-dimensional grid-free compressive beamforming. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2017; **142**(2): 618—629
- 12 Zhang G, Liu K, Sun S, *et al.* DOA estimation method for under-

- water acoustic signals based on two-dimensional power distribution (TPD) for few element array. *Appl. Acoust.*, 2021; **184**: 108352
- 13 Dogan M. Applications of cumulants to array processing, Part I: Aperture extension and array calibration. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1995; **43**(5): 1200—1216
- 14 Chevalier P, Ferreol A. On the virtual array concept for the fourth-order direction finding problem. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1999; **47**(9): 2592—2595
- 15 Friedlander B, Weiss A J. Direction finding using spatial smoothing with interpolated arrays. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1992; **28**(2): 574—587
- 16 Hyberg P, Jansson M, Ottersten B. Array interpolation and bias reduction. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2004; **52**(10): 2711—2720
- 17 Cui A, Xu T, Yu W, *et al.* An array interpolation based compressive sensing DOA method for sparse array. 3rd International Conference on Imaging, Signal Processing and Communication, Singapore, 2019: 27—29
- 18 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法. 北京: 清华大学出版社, 2004: 368—373
- 19 Moffet A. Minimum-redundancy linear arrays. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1968; **16**(2): 172—175
- 20 Zhou C, Gu Y, Fan X, *et al.* Direction-of-arrival estimation for coprime array via virtual array interpolation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2018; **66**(22): 5956—5971
- 21 Liu C, Vaidyanathan P P. Super nested arrays: Linear sparse arrays with reduced mutual coupling, Part I: Fundamentals. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2016; **64**(15): 3997—4012
- 22 Qiao H, Pal P. Gridless line spectrum estimation and low-rank Toeplitz matrix compression using structured samplers: A regularization-free approach. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2017; **65**(9): 2221—2236
- 23 夏麾军, 马远良, 刘亚雄, 等. 一种协方差矩阵实部消除的目标方位估计方法. *声学学报*, 2016; **41**(6): 785—796
- 24 杨益新, 张亚豪, 杨龙. 基于协方差矩阵拟合的宽带无网格波达角估计. *声学技术*, 2022; **41**(3): 306—312
- 25 Yang Z, Xie L, Zhang C. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array signal processing. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2014; **62**(19): 4959—4973
- 26 Stoica P, Babu P. SPICE and LIKES: Two hyperparameter-free methods for sparse-parameter estimation. *Signal Process.*, 2012; **92**(7): 1580—1590
- 27 Candes E J, Fernandez-Granda C. Towards a mathematical theory of super-resolution. *Commun. Pure Appl. Math.*, 2014; **67**(6): 906—956
- 28 Toh K C, Todd M J, Tütüncü R H. SDPT3 - A Matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optim. Methods Software*, 1999; **11**: 545—581
- 29 Sturm J F. Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Methods Software*, 1999; **11**: 625—653
- 30 Grant M, Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, Version 2.2. (2020-1-28)[2022-12-13]. <http://cvxr.com/cvx/>