

纪念马大猷先生诞辰 110 周年

结合球面伪线性估计器和传播噪声估计的 广域次声源定位算法

张天予^{1,2} 滕鹏晓^{1†} 吕 君¹ 程 巍¹ 郎 锐³ 杨 军^{1,2†}

(1 中国科学院噪声与振动重点实验室(声学研究所) 北京 100190)

(2 中国科学院大学 北京 100049)

(3 中国电波传播研究所 青岛 266107)

2024 年 2 月 29 日收到

2024 年 4 月 27 日定稿

摘要 球面伪线性估计器的提出为解决广域次声源定位问题提供了一个更加稳健和高效的方案,然而次声远距离传播易受大气横向风的影响,导致后方位角产生偏离,使得球面伪线性估计器的定位结果和性能分析不准确。为此,首先将次声传播引入噪声模型中,重新分析了两种球面伪线性估计器的偏差和误差协方差,给出了理论表达式;然后,给出了一种基于时间、空间相关的混合大气模型和射线追踪方法的传播噪声估计方法;最后,提出了球面伪线性估计器和传播噪声估计相结合的广域次声源定位算法。仿真和实验验证了理论分析的准确性和所提算法定位性能的优势。

关键词 次声, 声源定位, 波达角度, 大气模型, 传播噪声

PACS: 43.60, 43.28

DOI: 10.12395/0371-0025.2024067

CSTR: 32049.14.11-2065.2024067

Long-range infrasound source localization algorithms combining spherical pseudolinear estimator and propagation noise estimation

ZHANG Tianyu^{1,2} TENG Pengxiao^{1†} LYU Jun¹ CHENG Wei¹ LANG Rui³ YANG Jun^{1,2†}

(1 Key Laboratory of Noise and Vibration Research, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences Beijing 100190)

(2 University of Chinese Academy of Sciences Beijing 100049)

(3 China Research Institute of Radiowave Propagation Qingdao 266107)

Received Feb. 29, 2024

Revised Apr. 27, 2024

Abstract The spherical pseudolinear estimator offers a more stable and efficient solution to the long-range infrasound source localization. However, the propagation of infrasound over extended distances is vulnerable to atmospheric crosswinds, which cause deviations in the back-azimuth measurements. This phenomenon introduces inaccuracies in the localization results and performance evaluation of the spherical pseudolinear estimator. This research incorporates the effect of infrasound propagation into the noise model, reanalyzes the bias and error covariance performance of two spherical pseudolinear estimators, and provides theoretical expressions. Subsequently, a propagation noise estimation method is proposed that utilizes hybrid time-space dependent atmospheric modeling and ray tracing. Furthermore, long-range infrasound source localization algorithms are presented that integrate the spherical pseudolinear estimator with propagation noise estimation. The accuracy of the theoretical analysis and the performance advantages of the proposed algorithms are validated by simulations and an experiment.

Keywords Infrasound, Sound source localization, Angle of arrival, Atmospheric model, Propagation noise

† 通讯作者: 滕鹏晓, px.teng@mail.ioa.ac.cn; 杨军, jyang@mail.ioa.ac.cn

引言

地震、火山喷发等自然灾害,爆炸、飞机音爆等人为事件均会产生人耳无法察觉的低频大气振动,即次声。使用布设在国内和世界各地的监测站点采集次声信号,可以实现对自然和人为事件的分析和定位。1996年《全面禁止核试验条约》的签署和全面禁止核试验条约组织(CTBTO)国际监测系统(IMS)次声部分的部署,进一步促进了研究人员对次声监测技术的研究^[1]。

次声源定位技术的研究具有悠久的历史。早在1912年 Geiger 便提出了一种非线性最小二乘迭代算法用于地震定位,称为盖革法^[2]。但这种方法直到上世纪六十年代才随着计算机的普及成为一种实用算法,并经由 Jordan 和 Sverdrup^[3], Bratt 和 Bache^[4] 等的发展逐步应用到次声源定位之中。另一类次声源定位算法是网格搜索法。该方法的原理是将目标区域划分为若干网格,逐点计算并从中选出与观测一致性最高的格点作为次声源位置。相关的方法包括贝叶斯次声源定位法(BISL)^[5,6]、蛮力网格搜索交叉定位法(IMS_vASC)^[7,8]、相似度法^[9,10]、逆向时间迁移法(RTM)^[11]等。国内关于次声源定位的研究起步较晚。对于近场次声源,吕君等^[12]使用波束形成方法定位了北京一次地震前的异常次声波源,对于远场次声源,郭泉等^[13,14]提出了一种最小方差法,通过计算台站间时延的方差搜索次声源。此外,赵久彬等^[15]使用匹配场技术实现了对滑坡次声源的定位。最近,文献^[16]将广域次声源定位问题建模为球面波达角度(AOA)定位问题,提出了一类球面伪线性估计器:球面加权伪线性估计器(SWPLE)和球面加权工具变量估计器(SWIVE)。这类算法既解决了传统迭代定位算法的收敛性问题,又具有极低的计算复杂度,是解决广域次声源定位问题的有效方法。

次声的传播通道复杂时变,尤其是在远距离传播过程中大气横向风会使传播路径偏离理论方向,导致后方位角测量值偏离理论值,使定位结果出现偏差^[17-19]。为提升定位精度,有许多研究已经将次声传播的影响纳入到定位算法之中。Ceranna 等^[20]基于美军海军实验室地对空(NRL-G2S)大气模型和有风大气声波传播(WASP-3D)射线追踪方法验证了修正后方位角测量对于盖革法定位结果的提升。Pilger 等^[21]基于 Tau-P 射线追踪方法计算了在基于美军海军实验室质谱仪非相干散射雷达-散逸层-

00/水平风模型 07(NRLMSISE-00/HWM07)和欧洲中期天气预报中心(ECMWF)数据大气模型下的后方位角偏差,用于盖革法的定位修正。Blom 等^[5]使用 NRL-G2S 大气模型的历史数据和几何声学(GeoAc)射线追踪方法计算了目标区域一年四季八个风向的后方位角偏差随声源到台站距离的统计模型,用于 BISL 算法的后方位角修正。Arrowsmith 等^[6]则使用基于 ECMWF 数据的大气模型和特征射线(Eigenray)方法^[19]搜索声源到各台站的特征射线,从而确定次声传播的后方位角偏移。De Negri 等^[8]使用最新的 NRLMSIS 2.0/HWM14 和 ECMWF 数据构建大气剖面模型并使用次声几何声学(InfraGA)射线追踪方法迭代计算射线,得到靠近台站位置的地面到达(射线与地面的交点),从而计算后方位角偏差来修正 IMS_vASC 算法。

目前一方面球面伪线性估计器只考虑了由传感器测量和参数估计产生的测量噪声,并未考虑次声传播产生的后方位角偏移,因此该类算法的定位结果和性能分析对于次声信号来说并不准确。另一方面现有方位角修正方法中主要存在以下限制和不足:(1)部分方法仅使用经验气候学模型(ECM)和大气历史模型。(2)绝大部分方法仅基于分层的时间空间无关的大气模型进行分析。(3)绝大部分方法缺少对后方位角偏差二阶矩的表征,因此难以对算法定位性能进行理论分析。针对上述问题,本研究首先对球面波达角度定位问题的后方位角噪声模型进行了完善,将由次声传播过程导致的后方位角偏移建模为传播噪声,分析了在含有传播噪声的情况下 SWPLE 算法和 SWIVE 算法的偏差和误差协方差性能,给出了理论表达式。然后设计了测量噪声和传播噪声的估计方法,并将球面伪线性估计器和传播噪声估计相结合提出了 SWPLE-prop 算法和 SWIVE-prop 算法,其中“prop”是“propagation noise estimation”的简写,表示算法结合了传播噪声估计。数值仿真和实测数据证明 SWIVE-prop 算法可以有效提升次声事件的定位精度。

1 问题构建

1.1 球面 AOA 定位模型

将广域次声源定位问题建模为球面 AOA 定位问题,如图 1 所示。不失一般性地将地球建模为半径 $R=1$ 的球体,并在球面上建立忽略高程的大地坐标系,图中 NP 表示北极。声源与台站均位于该球体表面,声源与台站的坐标由纬度 φ 和经度 λ 表示。

$s = [\varphi_s, \lambda_s]^T$ 表示未知的声源位置坐标, $r_n = [\varphi_n, \lambda_n]^T$ 表示已知的台站 $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ 的位置坐标, 上标 $(\cdot)^T$ 表示转置。 $\theta_n \in (-\pi, \pi]$ 为声源 s 到达台站 r_n 的后方位角。后方位角以正北方向为零, 顺时针方向为正。球模型下的后方位角公式^[22]为

$$\theta_n(s) = \arctan\left(\frac{x_n}{y_n}\right), \quad (1)$$

其中

$$x_n = \cos \varphi_s \sin(\lambda_s - \lambda_n), \quad (2a)$$

$$y_n = \cos \varphi_n \sin \varphi_s - \sin \varphi_n \cos \varphi_s \cos(\lambda_s - \lambda_n), \quad (2b)$$

$\arctan(\cdot)$ 为四象限反正切函数。

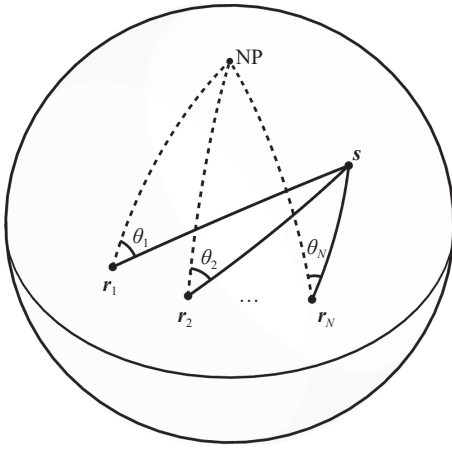


图1 球面 AOA 定位示意图

1.2 噪声模型

将次声传播过程对后方位角测量的影响添加到噪声模型中:

$$\tilde{\theta} = \theta(s) + \omega = \theta(s) + e + \varepsilon, \quad (3)$$

其中

$$\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_N]^T, \quad (4a)$$

$$\theta(s) = [\theta_1(s), \theta_2(s), \dots, \theta_N(s)]^T, \quad (4b)$$

$$e = [e_1, e_2, \dots, e_N]^T, \quad (4c)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N]^T, \quad (4d)$$

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]^T = [e_1 + \varepsilon_1, e_2 + \varepsilon_2, \dots, e_N + \varepsilon_N]^T, \quad (4e)$$

$\tilde{\theta}$ 表示台站处的后方位角测量值, ω 表示 $\tilde{\theta}$ 中包含的总噪声。 ω 由两个分量组成, 其一是由传感器测量以及次声检测算法导致的测量噪声 e , 其二是次声传播过程中横向风等大气环境的影响, 本文中将其定

义为传播噪声 ε 。不失一般性地, 本文假设传播噪声和测量噪声均服从相互独立的高斯分布:

$$e \sim N(0, C_e), \quad (5a)$$

$$\varepsilon \sim N(\mu, C_\varepsilon), \quad (5b)$$

其中

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]^T, \quad (6a)$$

$$C_e = \text{diag}(\sigma_{e,1}^2, \sigma_{e,2}^2, \dots, \sigma_{e,N}^2), \quad (6b)$$

$$C_\varepsilon = \text{diag}(\sigma_{\varepsilon,1}^2, \sigma_{\varepsilon,2}^2, \dots, \sigma_{\varepsilon,N}^2), \quad (6c)$$

μ 表示后方位角偏差, C_e 和 C_ε 分别表示 e 和 ε 的协方差矩阵, $\text{diag}(\cdot)$ 表示对角矩阵。于是, 总噪声服从高斯分布

$$\omega \sim N(\mu, C_\omega), \quad (7)$$

其中

$$C_\omega = \text{diag}(\sigma_{\omega,1}^2, \sigma_{\omega,2}^2, \dots, \sigma_{\omega,N}^2) = C_e + C_\varepsilon. \quad (8)$$

出于便捷性的考虑, 在进行理论推导和分析时假设噪声参数 μ , C_e , C_ε 已知, 噪声参数的估计方法将在 3.1 节中给出。

2 存在传播噪声时的球面伪线性算法性能分析

由于噪声模型中添加了新的分量, 因此有必要对原有球面伪线性估计器的性能进行重新分析, 从而确定新的噪声分量对算法性能的影响。

2.1 SWPLE 算法

当总噪声 ω 满足小噪声假设时, 球面 AOA 定位问题有如下伪线性关系^[16]:

$$\tilde{A}q = \eta, \quad (9)$$

其中

$$\tilde{A} = [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N]^T, \quad (10a)$$

$$\tilde{a}_n = \begin{bmatrix} -\sin \tilde{\theta}_n \sin \varphi_n \cos \lambda_n + \cos \tilde{\theta}_n \sin \lambda_n \\ -\sin \tilde{\theta}_n \sin \varphi_n \sin \lambda_n - \cos \tilde{\theta}_n \cos \lambda_n \\ \sin \tilde{\theta}_n \cos \varphi_n \end{bmatrix}, \quad (10b)$$

$$q = [\cos \varphi_s \cos \lambda_s, \cos \varphi_s \sin \lambda_s, \sin \varphi_s]^T, \quad (10c)$$

$$\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]^T, \quad (10d)$$

$$\eta_n = \sin \omega_n \sin \delta_n \approx \omega_n \sin \delta_n, \quad (10e)$$

$\tilde{A}$ 称为测量矩阵, η 称为伪线性噪声向量, δ_n 表示声源到台站的大圆弧长。SWPLE 算法有目标矩阵:

$$\mathbf{O}_{\text{SWPLE}} = \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}, \quad (11)$$

其中, 上标 $(\cdot)^{-1}$ 表示矩阵逆运算。由于 SWPLE 算法没有考虑传播噪声 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 所以权重矩阵 $\mathbf{W}$ 为

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\sigma_{e,1}^2 \sin^2 \delta_1, \sigma_{e,2}^2 \sin^2 \delta_2, \dots, \sigma_{e,N}^2 \sin^2 \delta_N), \quad (12)$$

为了后续分析方便, 假设 $\mathbf{W}$ 已知。

2.1.1 偏差分析

当观测数 (探测站数) N 足够大时 SWPLE 算法的偏差 ζ_{SWPLE} 为^[16]

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{SWPLE}} &= \mathbf{E}\{\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWPLE}} - \mathbf{s}\} = \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{s}_{\text{SWPLE}}\} \approx \\ &- \mathbf{D} \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_s & -\sin \varphi_s \cos \lambda_s \\ \cos \lambda_s & -\sin \varphi_s \sin \lambda_s \\ 0 & \cos \varphi_s \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\cos \varphi_s} \\ -\frac{\sin \lambda_s}{\cos \varphi_s} & \frac{\cos \lambda_s}{\cos \varphi_s} & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

因为传播噪声均值不为零, 并且由于 $\tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 都是总噪声 $\boldsymbol{\omega}$ 的函数, $\tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 相关, 所以有

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\} \neq \mathbf{0}. \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (13) 有

$$\zeta_{\text{SWPLE}} \neq \mathbf{0}. \quad (17)$$

因此 SWPLE 算法在存在传播噪声的环境下依然是有偏估计。

式 (13) 中第一项期望可以分解为

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{a}}_n \tilde{\mathbf{a}}_n^T\}}{\sigma_{e,n}^2 \sin^2 \delta_n}. \quad (18)$$

在满足小噪声假设时向量 $\tilde{\mathbf{a}}_n$ 可以分解为

$$\tilde{\mathbf{a}}_n \approx \mathbf{a}_n + \omega_n \boldsymbol{\xi}_n, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} -\sin \theta_n \sin \varphi_n \cos \lambda_n + \cos \theta_n \sin \lambda_n \\ -\sin \theta_n \sin \varphi_n \sin \lambda_n - \cos \theta_n \cos \lambda_n \\ \sin \theta_n \cos \varphi_n \end{bmatrix}, \quad (20a)$$

$$\boldsymbol{\xi}_n = \begin{bmatrix} -\cos \theta_n \sin \varphi_n \cos \lambda_n - \sin \theta_n \sin \lambda_n \\ -\cos \theta_n \sin \varphi_n \sin \lambda_n + \sin \theta_n \cos \lambda_n \\ \cos \theta_n \cos \varphi_n \end{bmatrix}. \quad (20b)$$

所以有

$$\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{a}}_n \tilde{\mathbf{a}}_n^T\} \approx \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^T + \mu_n \mathbf{a}_n \boldsymbol{\xi}_n^T + \mu_n \boldsymbol{\xi}_n \mathbf{a}_n^T + m_{2,n} \boldsymbol{\xi}_n \boldsymbol{\xi}_n^T, \quad (21)$$

其中

$$m_{2,n} = \mathbf{E}\{\omega_n^2\} = \sigma_{\omega,n}^2 + \mu_n^2. \quad (22)$$

将式 (21) 代入式 (18), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} &\approx \frac{1}{N} (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Xi}) + \\ &\frac{1}{N} (\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Xi}), \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N]^T, \quad (24a)$$

$$\boldsymbol{\Xi} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N]^T, \quad (24b)$$

$$\mathbf{M}_1 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N), \quad (24c)$$

$$\mathbf{M}_2 = \text{diag}(m_{2,1}, m_{2,2}, \dots, m_{2,N}), \quad (24d)$$

$\mathbf{A}$ 为没有噪声 ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$) 时的测量矩阵, $\boldsymbol{\Xi}$ 称为偏差矩阵。

式 (13) 中第二项期望可以分解为

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{E}\{\eta_n \tilde{\mathbf{a}}_n\}}{\sigma_{e,n}^2 \sin^2 \delta_n}. \quad (25)$$

根据式 (10e) 和式 (19) 有

$$\mathbf{E}\{\eta_n \tilde{\mathbf{a}}_n\} \approx \mu_n \sin \delta_n \mathbf{a}_n + m_{2,n} \sin \delta_n \boldsymbol{\xi}_n, \quad (26)$$

将式 (26) 代入式 (25), 可以得到

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\} \approx \frac{1}{N} (\mathbf{A}^T (\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\Xi}^T (m_2 \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta})), \quad (27)$$

其中

$$\boldsymbol{\delta} = [\sin^{-1} \delta_1, \sin^{-1} \delta_2, \dots, \sin^{-1} \delta_N]^T, \quad (28a)$$

$$\mathbf{c}_e = [\sigma_{e,1}^{-2}, \sigma_{e,2}^{-2}, \dots, \sigma_{e,N}^{-2}]^T, \quad (28b)$$

$$m_2 = [m_{2,1}, m_{2,2}, \dots, m_{2,N}]^T, \quad (28c)$$

运算符 $\circ$ 表示哈德玛 (Hadamard) 积。所以在满足小高斯噪声和一阶近似且当 N 足够大时, SWPLE 算法的偏差 ζ_{SWPLE} 可以近似表示为

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{SWPLE}} &\approx -\mathbf{D} \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{A}^T (\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta}) + \\ &\boldsymbol{\Xi}^T (m_2 \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta})), \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Xi} + \\ &\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Xi}. \end{aligned} \quad (30)$$

2.1.2 误差协方差分析

当 N 足够大时 SWPLE 算法的误差协方差矩阵为^[16]

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{SWPLE}} &\approx \frac{1}{N} \mathbf{D} \mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T, \\ &\mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\}, \\ &\mathbf{U} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$m_{3,n} = \mathbf{E} \{ \omega_n^3 \} = \sigma_{\omega,n}^3 + 3\sigma_{\omega,n}^2 \mu_n + \mu_n^3, \quad (34a)$$

$$m_{4,n} = \mathbf{E} \{ \omega_n^4 \} = 3\sigma_{\omega,n}^4 + 6\sigma_{\omega,n}^2 \mu_n^2 + \mu_n^4. \quad (34b)$$

当 $n \neq i$ 时有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \omega_n \omega_i \tilde{\mathbf{a}}_n \tilde{\mathbf{a}}_i^T \} &\approx \mu_n \mu_i \mathbf{a}_n \mathbf{a}_i^T + \mu_n m_{2,i} \mathbf{a}_n \boldsymbol{\xi}_i^T + \\ &m_{2,n} \mu_i \boldsymbol{\xi}_n \mathbf{a}_i^T + m_{2,n} m_{2,i} \boldsymbol{\xi}_n \boldsymbol{\xi}_i^T. \end{aligned} \quad (35)$$

将式 (33) 和式 (35) 代入式 (32), 可以得到

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{E} \{ \omega_n \omega_i \tilde{\mathbf{a}}_n \tilde{\mathbf{a}}_i^T \}}{\sigma_{e,n}^2 \sigma_{e,i}^2 \sin \delta_n \sin \delta_i}. \quad (32)$$

当 $n = i$ 时有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \omega_n \omega_i \tilde{\mathbf{a}}_n \tilde{\mathbf{a}}_i^T \} &\approx m_{2,n} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^T + m_{3,n} \mathbf{a}_n \boldsymbol{\xi}_n^T + \\ &m_{3,n} \boldsymbol{\xi}_n \mathbf{a}_n^T + m_{4,n} \boldsymbol{\xi}_n \boldsymbol{\xi}_n^T, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} &\approx \frac{1}{N} (\mathbf{A}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\Xi}) + \\ &\frac{1}{N} (\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}_3 \boldsymbol{\Xi}), \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{m_{2,1}}{\sigma_{e,1}^4 \sin^2 \delta_1} & \frac{\mu_1 \mu_2}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_1 \mu_N}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_N} \\ \frac{\mu_2 \mu_1}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_1} & \frac{m_{2,2}}{\sigma_{e,2}^4 \sin^2 \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_2 \mu_N}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_N \mu_1}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_N \sin \delta_1} & \frac{\mu_N \mu_2}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_N \sin \delta_2} & \cdots & \frac{m_{2,N}}{\sigma_{e,N}^4 \sin^2 \delta_N} \end{bmatrix}, \quad (37a)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{m_{3,1}}{\sigma_{e,1}^4 \sin^2 \delta_1} & \frac{\mu_1 m_{2,2}}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_1 m_{2,N}}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_N} \\ \frac{\mu_2 m_{2,1}}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_1} & \frac{m_{3,2}}{\sigma_{e,2}^4 \sin^2 \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_2 m_{2,N}}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_N m_{2,1}}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_N \sin \delta_1} & \frac{\mu_N m_{2,2}}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_N \sin \delta_2} & \cdots & \frac{m_{3,N}}{\sigma_{e,N}^4 \sin^2 \delta_N} \end{bmatrix}, \quad (37b)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \frac{m_{4,1}}{\sigma_{e,1}^4 \sin^2 \delta_1} & \frac{m_{2,1} m_{2,2}}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_2} & \cdots & \frac{m_{2,1} m_{2,N}}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_N} \\ \frac{m_{2,2} m_{2,1}}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_1} & \frac{m_{4,2}}{\sigma_{e,2}^4 \sin^2 \delta_2} & \cdots & \frac{m_{2,2} m_{2,N}}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_{2,N} m_{2,1}}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_N \sin \delta_1} & \frac{m_{2,N} m_{2,2}}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_N \sin \delta_2} & \cdots & \frac{m_{4,N}}{\sigma_{e,N}^4 \sin^2 \delta_N} \end{bmatrix}. \quad (37c)$$

将式 (23) 和式 (36) 代入式 (31), SWPLE 算法的误差协方差矩阵在满足小高斯噪声假设和一阶近似且 N 足够大时可以近似为

$$\mathbf{C}_{\text{SWPLE}} \approx \mathbf{D} \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T, \quad (38)$$

其中

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\Xi} + \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A} + \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{A}_3 \boldsymbol{\Xi}. \quad (39)$$

2.2 SWIVE 算法

SWIVE 算法的目标矩阵为^[16]

$$\mathbf{O}_{\text{SWIVE}} = \mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}. \quad (40)$$

IV 矩阵 $\mathbf{G}$ 由式 (41) 估计, 其中 $\widehat{\theta}_n$ 使用 BCSWPLE 算法^[16] 估计, 并采用选择角度测量 (SAM) 策略^[23,16]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}(\widehat{\theta}_n), \quad (41a)$$

$$\widehat{\theta}_n = \begin{cases} \theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}}), & |\theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}}) - \widetilde{\theta}_n| < \chi_n, \\ \widetilde{\theta}_n, & |\theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}}) - \widetilde{\theta}_n| \geq \chi_n, \end{cases} \quad (41b)$$

其中, $\chi_n = \rho\sigma_n$ 为 SAM 阈值, ρ 为 SAM 阈值系数。同样为了分析方便, 假设权重矩阵 $\mathbf{W}$ 已知。

2.2.1 偏差分析

构造 IV 矩阵 $\mathbf{G}$ 的后方位角 $\widehat{\theta}_n$ 可以表示为

$$\widehat{\theta}_n = \theta_n(\mathbf{s}) + \nu_n. \quad (42)$$

对于绝大多数情况, 有 $\widehat{\theta}_n = \theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}})$, 因此有

$$\nu_n = \theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}}) - \theta_n(\mathbf{s}). \quad (43)$$

对 $\theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}})$ 在 $\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}} = \mathbf{s}$ 处进行泰勒展开并忽略二次以上项, 可以得到

$$\begin{aligned} \nu_n &\approx \frac{\partial \theta_n(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T} (\widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}} - \mathbf{s}) \approx \\ &\frac{\partial \theta_n(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T} [(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{SWPLE}} - \boldsymbol{\zeta}'_{\text{SWPLE}}) - \mathbf{s}] = \\ &\frac{\partial \theta_n(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T} (\Delta \mathbf{s}_{\text{SWPLE}} - \boldsymbol{\zeta}'_{\text{SWPLE}}), \end{aligned} \quad (44)$$

其中

$$\frac{\partial \theta_n(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T} = \left[\frac{\frac{\partial x_n}{\partial \varphi_s} y_n - x_n \frac{\partial y_n}{\partial \varphi_s}}{x_n^2 + y_n^2}, \frac{\frac{\partial x_n}{\partial \lambda_s} y_n - x_n \frac{\partial y_n}{\partial \lambda_s}}{x_n^2 + y_n^2} \right], \quad (45)$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial \varphi_s} = -\sin \varphi_s \sin(\lambda_s - \lambda_n), \quad (46a)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial \varphi_s} = \cos \varphi_n \cos \varphi_s + \sin \varphi_n \sin \varphi_s \cos(\lambda_s - \lambda_n), \quad (46b)$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial \lambda_s} = \cos \varphi_s \cos(\lambda_s - \lambda_n), \quad (46c)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial \lambda_s} = \sin \varphi_n \cos \varphi_s \sin(\lambda_s - \lambda_n), \quad (46d)$$

$\boldsymbol{\zeta}'_{\text{SWPLE}}$ 表示只存在测量噪声时 SWPLE 算法的偏差。当 N 足够大时 SWIVE 算法的偏差 $\boldsymbol{\zeta}_{\text{SWIVE}}$ 为^[16]

$$\boldsymbol{\zeta}_{\text{SWIVE}} \approx -\mathbf{DU} \left(\mathbf{U}^T \mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\}. \quad (47)$$

由式 (44) 和式 (10e) 可以看出虽然根据 $\widehat{\theta}_n$ 得到的 IV 矩阵 $\mathbf{G}$ 和伪线性噪声向量 $\boldsymbol{\eta}$ 的相关性很小, 但由于总噪声 $\boldsymbol{\omega}$ 的均值不为零, 因此依然有

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\} \neq \mathbf{0}, \quad (48)$$

将式 (48) 代入式 (47) 有

$$\boldsymbol{\zeta}_{\text{SWIVE}} \neq \mathbf{0}, \quad (49)$$

因此存在传播噪声时 SWIVE 算法不再具有渐近无偏性, 而成为有偏估计。

式 (47) 中第一项期望可以分解为

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{E} \{ \mathbf{g}_n \widetilde{\mathbf{a}}_n^T \}}{\sigma_{e,n}^2 \sin^2 \delta_n}. \quad (50)$$

根据式 (42), 在满足小噪声假设时, 向量 $\mathbf{g}_n$ 可以分解为

$$\mathbf{g}_n \approx \mathbf{a}_n + \nu_n \boldsymbol{\xi}_n. \quad (51)$$

而 N 足够大时, $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\eta}$ 的相关性很小, 故有 $\mathbf{E} \{ \omega_n \nu_n \} \approx \mathbf{E} \{ \omega_n \} \mathbf{E} \{ \nu_n \}$, 则

$$\mathbf{E} \{ \mathbf{g}_n \widetilde{\mathbf{a}}_n^T \} \approx \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^T + \mu_n \mathbf{a}_n \boldsymbol{\xi}_n^T + \nu_n \boldsymbol{\xi}_n \mathbf{a}_n^T + \mu_n \nu_n \boldsymbol{\xi}_n \boldsymbol{\xi}_n^T, \quad (52)$$

其中

$$\nu_n = \mathbf{E} \{ \nu_n \} \approx \frac{\partial \theta_n(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^T} \boldsymbol{\zeta}_{\text{BCSWPLE}}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{\text{BCSWPLE}} &= \mathbf{E} \{ \widehat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}} - \mathbf{s} \} \approx \boldsymbol{\zeta}_{\text{SWPLE}} - \boldsymbol{\zeta}'_{\text{SWPLE}} \approx \\ &-\mathbf{DU} (\mathbf{U}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{A}^T (\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\Xi}^T (\mathbf{m}_2 \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta})) + \\ &\mathbf{DU} [\mathbf{U}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{C}_e \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Xi}) \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Xi}^T \boldsymbol{\delta}. \end{aligned} \quad (54)$$

将式 (52) 代入式 (50), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}}{N} \right\} &\approx \frac{1}{N} (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Xi}) + \\ &\frac{1}{N} (\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{N} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{N} \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\Xi}), \end{aligned} \quad (55)$$

其中

$$\mathbf{N} = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N). \quad (56)$$

式 (47) 中第二项期望可以分解为

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{E} \{ \eta_n \mathbf{g}_n \}}{\sigma_{e,n}^2 \sin^2 \delta_n}. \quad (57)$$

根据式 (10e) 和式 (51) 有

$$\mathbf{E} \{ \eta_n \mathbf{g}_n \} \approx \mu_n \sin \delta_n \mathbf{a}_n + \mu_n \nu_n \sin \delta_n \boldsymbol{\xi}_n. \quad (58)$$

将式 (58) 代入式 (57), 可以得到

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\eta}}{N} \right\} \approx \frac{1}{N} (\mathbf{A}^T (\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\Xi}^T (\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\nu} \circ \mathbf{c}_e \circ \boldsymbol{\delta})), \quad (59)$$

其中

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N]^T, \quad (60)$$

所以在满足小高斯噪声假设和一阶近似且 N 足够大

时, SWIVE 算法在含有传播噪声的环境中的偏差 ζ_{SWIVE} 可以近似表示为

$$\zeta_{\text{SWIVE}} \approx -DU(U^T B_2 U)^{-1} U^T (A^T (\mu \circ c_e \circ \delta) + \Xi^T (\mu \circ v \circ c_e \circ \delta)), \quad (61)$$

其中

$$B_2 = A^T W^{-1} A + A^T M_1 W^{-1} \Xi + \Xi^T N W^{-1} A + \Xi^T M_1 N W^{-1} \Xi. \quad (62)$$

2.2.2 误差协方差分析

当 N 足够大时 SWIVE 算法的误差协方差矩阵为^[16]

$$C_{\text{SWIVE}} \approx \frac{1}{N} DU \left(U^T E \left\{ \frac{G^T W^{-1} \tilde{A}}{N} \right\} U \right)^{-1} U^T E \left\{ \frac{G^T W^{-1} \eta \eta^T W^{-1} G}{N} \right\} U \left(U^T E \left\{ \frac{\tilde{A}^T W^{-1} G}{N} \right\} U \right)^{-1} U^T D^T. \quad (63)$$

式 (63) 中的第二项期望可以分解为

$$E \left\{ \frac{G^T W^{-1} \eta \eta^T W^{-1} G}{N} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{E \{ \omega_n \omega_i g_n g_i^T \}}{\sigma_{e,n}^2 \sigma_{e,i}^2 \sin \delta_n \sin \delta_i}. \quad (64)$$

当 $n = i$ 时有

$$E \{ \omega_n \omega_i g_n g_i^T \} \approx m_{2,n} a_n a_n^T + m_{2,n} v_n a_n \xi_n^T + m_{2,n} v_n \xi_n a_n^T + m_{2,n} v_n^2 \xi_n \xi_n^T, \quad (65)$$

当 $n \neq i$ 时有

$$E \{ \omega_n \omega_i g_n g_i^T \} \approx \mu_n \mu_i a_n a_i^T + \mu_n \mu_i v_i a_n \xi_i^T + \mu_n \mu_i v_n \xi_n a_i^T + \mu_n \mu_i v_n v_i \xi_n \xi_i^T. \quad (66)$$

将式 (65) 和式 (66) 代入式 (64), 可以得到

$$E \left\{ \frac{G^T W^{-1} \eta \eta^T W^{-1} G}{N} \right\} \approx \frac{1}{N} (A^T A_1 A + A^T A_4 \Xi) + \frac{1}{N} (\Xi^T A_4^T A + \Xi^T A_5 \Xi), \quad (67)$$

其中

$$A_4 = \begin{bmatrix} \frac{m_{2,1} v_1}{\sigma_{e,1}^4 \sin^2 \delta_1} & \frac{\mu_1 \mu_2 v_2}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_1 \mu_N v_N}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_N} \\ \frac{\mu_2 \mu_1 v_1}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_1} & \frac{m_{2,2} v_2}{\sigma_{e,2}^4 \sin^2 \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_2 \mu_N v_N}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_N \mu_1 v_1}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_N \sin \delta_1} & \frac{\mu_N \mu_2 v_2}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_N \sin \delta_2} & \cdots & \frac{m_{2,N} v_N}{\sigma_{e,N}^4 \sin^2 \delta_N} \end{bmatrix}, \quad (68a)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \frac{m_{2,1} v_1^2}{\sigma_{e,1}^4 \sin^2 \delta_1} & \frac{\mu_1 \mu_2 v_1 v_2}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_1 \mu_N v_1 v_N}{\sigma_{e,1}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_1 \sin \delta_N} \\ \frac{\mu_2 \mu_1 v_2 v_1}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_1} & \frac{m_{2,2} v_2^2}{\sigma_{e,2}^4 \sin^2 \delta_2} & \cdots & \frac{\mu_2 \mu_N v_2 v_N}{\sigma_{e,2}^2 \sigma_{e,N}^2 \sin \delta_2 \sin \delta_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_N \mu_1 v_N v_1}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,1}^2 \sin \delta_N \sin \delta_1} & \frac{\mu_N \mu_2 v_N v_2}{\sigma_{e,N}^2 \sigma_{e,2}^2 \sin \delta_N \sin \delta_2} & \cdots & \frac{m_{2,N} v_N^2}{\sigma_{e,N}^4 \sin^2 \delta_N} \end{bmatrix}. \quad (68b)$$

将式 (55) 和式 (67) 代入式 (63), SWIVE 算法的误差协方差矩阵在满足小高斯噪声假设和一阶近似且 N 足够大时可以近似为

$$C_{\text{SWIVE}} \approx DU(U^T B_2 U)^{-1} U^T K_2 U(U^T B_2^T U)^{-1} U^T D^T, \quad (69)$$

其中

$$K_2 = A^T A_1 A + A^T A_4 \Xi + \Xi^T A_4^T A + \Xi^T A_5 \Xi. \quad (70)$$

与克拉美劳下界 (Cramér-Rao Lower Bound,

CRLB)^[16] 进行比较可以看出, SWIVE 算法的误差协方差无法达到 CRLB, 因此 SWIVE 算法在传播噪声下失去渐近有效性。需要注意的是 SAM 阈值系数 ρ 的取值会影响 SWIVE 算法的性能, 而文献^[16] 中对于 ρ 最优取值的分析并未考虑传播噪声。因此存在传播噪声时, SWIVE 算法可能无法达到理论定位性能。所以式 (61) 和式 (69) 实际上是 SWIVE 算法定位性能的下界。

3 结合传播噪声估计的球面伪线性估计器

为了解决传播噪声对广域次声源定位造成的不利影响,本节首先给出了噪声的参数估计方法,然后提出了将球面伪线性估计器与传播噪声估计相结合的广域次声源定位算法。

3.1 噪声参数估计

3.1.1 测量噪声参数估计

次声检测算法使用 PMCC 算法^[24,25], PMCC 检测结果为一组或多组 PMCC 族。PMCC 族由多个 PMCC 像素组成,每个像素的属性包括时间、频率、后方位角和视速度。将次声到达信号 PMCC 族中的所有像素作为样本,即可得到该次声信号的后方位角测量值 $\tilde{\theta}_n$ 和测量噪声的方差估计 $\tilde{\sigma}_{e,n}^2$:

$$\tilde{\theta}_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{i=1}^{Q_n} \theta_{n,i}, \quad (71a)$$

$$\tilde{\sigma}_{e,n}^2 = \frac{1}{Q_n - 1} \sum_{i=1}^{Q_n} (\theta_{n,i} - \tilde{\theta}_n)^2, \quad (71b)$$

其中, Q_n 表示 PMCC 族 n 中像素的个数, $\theta_{n,i}$ 表示每个像素的后方位角测量值。以相同的方法可以估计视速度的测量值 $\tilde{v}_{l,n}$ 和其方差估计 $\tilde{\sigma}_{v_l,n}^2$:

$$\tilde{v}_{l,n} = \frac{1}{Q_n} \sum_{i=1}^{Q_n} v_{l,n,i}, \quad (72a)$$

$$\tilde{\sigma}_{v_l,n}^2 = \frac{1}{Q_n - 1} \sum_{i=1}^{Q_n} (v_{l,n,i} - \tilde{v}_{l,n})^2, \quad (72b)$$

其中, $v_{l,n,i}$ 表示每个像素的视速度测量值。 $\tilde{\theta}_n$, $\tilde{\sigma}_{e,n}^2$, $\tilde{v}_{l,n}$, $\tilde{\sigma}_{v_l,n}^2$ 将用于传播噪声参数的估计。

3.1.2 传播噪声参数估计

传播噪声的参数估计需要构建大气剖面模型并使用射线追踪方法确定各次声台站处的后方位角偏差。为了最大限度保证射线追踪结果的准确性,本研究构建了基于 ECM 和大气再分析数据混合且时间空间相关的大气剖面模型。大气再分析数据是不均匀的气象观测和基于模型的天气预报经过数据同化得到的全球范围时间空间统一的气象数据。本研究 ECM 使用 NRLMSIS2.0/HWM14 经验气候学模型,大气再分析数据使用 ECMWF 的 ERA5 数据^[26],该数据可以提供最高 0.01 hPa (约 80 km), 时间分辨率 1 h, 空间分辨率 31 km 的大气数据。

首先使用 SWIVE 算法确定声源的初步位置 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}$, 结合次声台站地理位置确定射线追踪的经纬度范围并按 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\lambda$ 的间隔划分网格。然后假设次声传播的平均速度为 c , 使用最先接收到信号的台站 $\mathbf{r}_1$ 的次声到达时间 t_1 (PMCC 族中最早的时间) 估计声源的发生时间 $\hat{t}_s$ 和次声信号到达各个格点的时间 $\hat{t}_{\varphi,\lambda}$:

$$\hat{t}_s = t_1 - \frac{H(\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}, \mathbf{r}_1, R_e)}{c}, \quad (73)$$

$$\hat{t}_{\varphi,\lambda} = \hat{t}_s + \frac{H(\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}, [\varphi, \lambda]^T, R_e)}{c}, \quad (74)$$

其中

$$H(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, R) = 2R \arcsin \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\varphi_j - \varphi_i}{2} \right) + \cos \varphi_j \cos \varphi_i \sin^2 \left(\frac{\lambda_j - \lambda_i}{2} \right)} \right). \quad (75)$$

函数 $H(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是半正矢球面距离公式^[27], 球体半径取地球的平均半径 $R_e = 6371393$ m。此时就得到了数据下载的时间和空间范围。分别按经纬度网格下载对应的 ERA5 数据并在目标区域内线性插值得到 $\vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ERA5}}$, 以及读取 ECM 数据 $\vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ECM}}$, 其中大气剖面数据 ϑ 包括高度、温度、纬向风、经向风、总质量密度和气压。然后将 $\vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ECM}}$ 和 $\vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ERA5}}$ 进行融合得到融合数据 $\vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{Hybrid}}$:

$$\vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{Hybrid}} = \begin{cases} \vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ECM}}, & h_{\max} < h, \\ \left(\frac{h_{\max} - h}{h_{\max} - h_{\min}} \right) \vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ERA5}} + \left(\frac{h - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}} \right) \vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ECM}}, & h_{\min} < h \leq h_{\max}, \\ \vartheta_{\varphi,\lambda,t,h}^{\text{ERA5}}, & h \leq h_{\min}. \end{cases} \quad (76)$$

此时得到了不同时间的空间相关大气剖面。使用与各个格点处次声到达时间 $\hat{t}_{\varphi,\lambda}$ 最相近的两组大气剖面按时间线性插值, 即可得到时间空间相关的混合大气剖面模型。

使用 InfraGA 射线追踪方法计算次声传播过程, 从声源估计位置 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}$ 向各台站方向 $\psi_n \pm \psi_{\text{lim}}$ 的方位角范围和 $[\phi_{\min}, \phi_{\max}]$ 的俯仰角范围, 以 $\Delta\psi$ 的方位角间隔和 $\Delta\phi$ 的俯仰角间隔计算次声射线, 获得地面到达信号参数, 参数包括经纬度、后方位角、俯仰角等。根据到达信号与台站到声源的距离差 Δd 、后方位角 θ 和视速度 v_l 比较射线追踪得到的地面到达信号和实际观测信号的相似度。台站 n 处射线地面到达信号 j 与观测信号的相似度定义为

$$\alpha_{n,j} = \sqrt{\left(\frac{\Delta d_{n,j}}{\sigma_{\Delta d,n}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{n,j} - \bar{\theta}_n}{\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}}\right)^2 + \left(\frac{v_{t,n,j} - \bar{v}_{t,n}}{\bar{\sigma}_{v_{t,n}}}\right)^2}, \quad (77)$$

其中

$$\Delta d_{n,j} = H(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}, [\varphi_j, \lambda_j]^T, R_e) - H(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}, \mathbf{r}_n, R_e), \quad (78a)$$

$$\sigma_{\Delta d,n} = 0.05 \cdot H(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}, \mathbf{r}_n, R_e), \quad (78b)$$

$$v_{t,n,j} = \frac{340}{\cos \phi_{n,j}}. \quad (78c)$$

最后选取最相似的 P 个到达信号作为样本计算传播噪声均值 $\bar{\mu}_n$ 和方差 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}^2$:

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P (\theta_{n,j} - \theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}})), \quad (79a)$$

$$\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}^2 = \frac{1}{P-1} \sum_{j=1}^P (\theta_{n,j} - \theta_n(\widehat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}) - \bar{\mu}_n)^2. \quad (79b)$$

3.2 SWPLE-prop 算法

在加入传播噪声的噪声模型下, 后方位角测量值的似然函数^[28]为

$$p(\bar{\theta}; s) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_\omega)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\bar{\theta} - \theta(s) - \mu)^T \mathbf{C}_\omega^{-1} (\bar{\theta} - \theta(s) - \mu)\right), \quad (80)$$

其中, $\det(\cdot)$ 表示矩阵行列式。则 MLE 目标函数为

$$J_{\text{MLE}}(s) = \frac{1}{2}(\bar{\theta} - \theta(s) - \mu)^T \mathbf{C}_\omega^{-1} (\bar{\theta} - \theta(s) - \mu) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\sigma_{\omega,n}^2} ((\bar{\theta}_n - \mu_n) - \theta_n(s))^2. \quad (81)$$

在小噪声假设下, 根据 SWPLE 算法的推导过程^[16]可以得到新的目标函数:

$$J_{\text{SWPLE-prop}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{q})^T \mathbf{W}'^{-1} (\widetilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{q}) \quad \text{s.t. } \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1, \quad (82)$$

其中

$$\widetilde{\mathbf{A}}^T = [\widetilde{\mathbf{a}}_1^T, \widetilde{\mathbf{a}}_2^T, \dots, \widetilde{\mathbf{a}}_N^T]^T, \quad (83a)$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_n = \begin{bmatrix} -\sin(\bar{\theta}_n - \mu_n) \sin \varphi_n \cos \lambda_n + \cos(\bar{\theta}_n - \mu_n) \sin \lambda_n \\ -\sin(\bar{\theta}_n - \mu_n) \sin \varphi_n \sin \lambda_n - \cos(\bar{\theta}_n - \mu_n) \cos \lambda_n \\ \sin(\bar{\theta}_n - \mu_n) \cos \varphi_n \end{bmatrix}, \quad (83b)$$

$$\mathbf{W}' = \text{diag}(\sigma_{\omega,1}^2 \sin^2 \delta_1, \sigma_{\omega,2}^2 \sin^2 \delta_2, \dots, \sigma_{\omega,N}^2 \sin^2 \delta_N). \quad (84)$$

此时即可使用 SWPLE 算法进行求解。将该算法命

名为 SWPLE-prop 算法, 其目标矩阵为

$$\mathbf{O}_{\text{SWPLE-prop}} = \widetilde{\mathbf{A}}'^T \widetilde{\mathbf{W}}'^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}', \quad (85)$$

其中

$$\widetilde{\mathbf{W}}' = \mathbf{W}'(\widehat{\delta}_n(\mathbf{r}_n, \widehat{\mathbf{s}}_{\text{SWPLE-prop}})). \quad (86)$$

$\widetilde{\mathbf{W}}'$ 的构建使用简化版 SPLE-prop 算法, 其目标矩阵为

$$\mathbf{O}_{\text{SPLE-prop}} = \widetilde{\mathbf{A}}'^T \mathbf{C}_\omega^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}'. \quad (87)$$

求解球面伪线性估计器首先需要对目标矩阵 $\mathbf{O}$ 进行特征值分解 (EVD):

$$\widehat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{v}_{\min}(\mathbf{O})}{|\mathbf{v}_{\min}(\mathbf{O})|}, \quad (88)$$

其中, $\mathbf{v}_{\min}$ 为 $\mathbf{O}_{\text{SPLE-prop}}$ 最小特征值对应的特征向量。然后再将三维笛卡尔坐标估计结果 $\widehat{\mathbf{q}}$ 转换为大地坐标 $\widehat{\mathbf{s}}$:

$$\widehat{\mathbf{s}} = \left[\arcsin \widehat{q}_3, \arctan\left(\frac{\widehat{q}_2}{\widehat{q}_1}\right) \right]^T. \quad (89)$$

最后进行对跖点判断^[16]:

$$\widehat{\mathbf{s}}_{[\text{alg}]} = \begin{cases} \widehat{\mathbf{s}}, & |\theta_n(\widehat{\mathbf{s}}) - \bar{\theta}_n| < \chi_A, \\ \widehat{\mathbf{s}}_{\text{ap}}, & |\theta_n(\widehat{\mathbf{s}}) - \bar{\theta}_n| \geq \chi_A, \end{cases} \quad (90)$$

其中, χ_A 表示方向一致性阈值, 通常可设置为 $\pi/2$, $\widehat{\mathbf{s}}_{\text{ap}}$ 表示对跖点, 下标 $(\cdot)_{[\text{alg}]}$ 表示不同的算法名称。根据文献^[16]的分析方法可知 SWPLE-prop 算法是有偏估计, 当 N 足够大时算法的偏差为

$$\zeta_{\text{SWPLE-prop}} \approx -\mathbf{D}\mathbf{U}[\mathbf{U}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{W}'^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{\Xi}^T \mathbf{C}_\omega \mathbf{W}'^{-1} \mathbf{\Xi}) \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{\Xi}^T \delta. \quad (91)$$

算法的误差协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{SWPLE-prop}} &\approx \mathbf{D}\mathbf{U}[\mathbf{U}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{W}'^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{\Xi}^T \mathbf{C}_\omega \mathbf{W}'^{-1} \mathbf{\Xi}) \mathbf{U}]^{-1} \\ &\quad \mathbf{U}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{W}'^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{\Xi}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Xi}) \mathbf{U} \cdot \\ &\quad [\mathbf{U}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{W}'^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{\Xi}^T \mathbf{C}_\omega \mathbf{W}'^{-1} \mathbf{\Xi}) \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T, \end{aligned} \quad (92)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3\sin^{-2} \delta_1 & \sin^{-1} \delta_1 \sin^{-1} \delta_2 & \cdots & \sin^{-1} \delta_1 \sin^{-1} \delta_N \\ \sin^{-1} \delta_2 \sin^{-1} \delta_1 & 3\sin^{-2} \delta_2 & \cdots & \sin^{-1} \delta_2 \sin^{-1} \delta_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin^{-1} \delta_N \sin^{-1} \delta_1 & \sin^{-1} \delta_N \sin^{-1} \delta_2 & \cdots & 3\sin^{-2} \delta_N \end{bmatrix}. \quad (93)$$

SWPLE-prop 算法总结见表 1。

表 1 SWPLE-prop 算法流程

获取 $\mathbf{r}_n, n \in \{1, 2, \dots, N\}$
根据 3.1.1 节测量噪声参数估计方法得到 $\bar{\theta}, \bar{\sigma}_{\varepsilon,n}^2$
使用 SWIVE 算法估计初始位置 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}$
根据 3.1.2 节传播噪声参数估计方法得到 $\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_{\varepsilon,n}^2$
构造 $\tilde{\mathbf{A}}'$ (式(83)), $\mathbf{C}_\omega$ (式(8)), $\mathbf{O}_{\text{SPL}} - \text{prop}$ (式(87))
计算 $\mathbf{O}_{\text{SPL}} - \text{prop}$ 的 EVD
根据式(88)—式(90)得到 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SPL}} - \text{prop}$
构造 $\tilde{\mathbf{W}}'$ (式(86)), $\mathbf{O}_{\text{SWPLE}} - \text{prop}$ (式(85))
计算 $\mathbf{O}_{\text{SWPLE}} - \text{prop}$ 的 EVD
根据式(88)—式(90)得到 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWPLE}} - \text{prop}$

3.3 SWIVE-prop 算法

因为 SWPLE-prop 算法是有偏估计, 所以根据文献 [16], 使用 SWIVE-prop 算法来解决偏差问题。SWIVE-prop 算法的目标矩阵为

$$\mathbf{O}_{\text{SWIVE-prop}} = \mathbf{G}'^T \tilde{\mathbf{W}}'^{-1} \tilde{\mathbf{A}}', \quad (94)$$

式中

$$\mathbf{G}' = \mathbf{A}(\hat{\theta}_n), \quad (95a)$$

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \theta_n(\hat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE-prop}}), & \left| \theta_n(\hat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE-prop}}) - (\bar{\theta}_n - \mu_n) \right| < \chi_n, \\ \bar{\theta}_n - \mu_n, & \left| \theta_n(\hat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE-prop}}) - (\bar{\theta}_n - \mu_n) \right| \geq \chi_n, \end{cases} \quad (95b)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}' = \mathbf{W}(\hat{\delta}_n(\mathbf{r}_n, \hat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE-prop}})), \quad (96)$$

其中, $\chi_n = \rho \sigma_n$ 为 SAM 阈值, ρ 为 SAM 阈值系数。 $\tilde{\mathbf{W}}'$ 和 $\mathbf{G}'$ 的构建需要使用 BCSWPLE-prop 算法, 其目标矩阵为

$$\mathbf{O}_{\text{BCSWPLE-prop}} = \tilde{\mathbf{A}}'^T \tilde{\mathbf{W}}'^{-1} \tilde{\mathbf{A}}' - \tilde{\mathbf{E}}'^T \mathbf{C}_\omega \tilde{\mathbf{W}}'^{-1} \tilde{\mathbf{E}}', \quad (97)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{E}}' = \mathbf{E}(\theta_n(\hat{\mathbf{s}}_{\text{SPL}} - \text{prop})). \quad (98)$$

根据文献 [16] 的分析方法可知 SWIVE-prop 算法是渐近无偏和渐近有效估计, 即算法偏差为

$$\zeta_{\text{SWIVE-prop}} = \mathbf{0} \quad \text{as } N \rightarrow \infty, \quad (99)$$

误差协方差矩阵为

$$\mathbf{C}_{\text{SWIVE-prop}} \approx \mathbf{D}\mathbf{U}(\mathbf{U}^T \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{W}}'^{-1} \mathbf{A}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T. \quad (100)$$

SWIVE-prop 算法总结见表 2。

4 仿真分析

本节将提出的 SWPLE-prop 算法和 SWIVE-prop 算法与 SWPLE 算法以及 SWIVE 算法的定位性能进行了比较。

表 2 SWIVE-prop 算法流程

获取 $\mathbf{r}_n, n \in \{1, 2, \dots, N\}$
根据 3.1.1 节测量噪声参数估计方法得到 $\bar{\theta}, \bar{\sigma}_{\varepsilon,n}^2$
使用 SWIVE 算法估计初始位置 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}}$
根据 3.1.2 节传播噪声参数估计方法得到 $\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_{\varepsilon,n}^2$
构造 $\tilde{\mathbf{A}}'$ (式(83)), $\mathbf{C}_\omega$ (式(8)), $\mathbf{O}_{\text{SPL}} - \text{prop}$ (式(87))
计算 $\mathbf{O}_{\text{SPL}} - \text{prop}$ 的 EVD
根据式(88)—式(90)得到 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SPL}} - \text{prop}$
构造 $\tilde{\mathbf{E}}'$ (式(98)), $\tilde{\mathbf{W}}'$ (式(86)), $\mathbf{O}_{\text{BCSWPLE}} - \text{prop}$ (式(97))
计算 $\mathbf{O}_{\text{BCSWPLE}} - \text{prop}$ 的 EVD
根据式(88)—式(90)得到 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{BCSWPLE}} - \text{prop}$
构造 $\mathbf{G}'$ (式(95)), $\tilde{\mathbf{W}}'$ (式(96)), $\mathbf{O}_{\text{SWIVE}} - \text{prop}$ (式(94))
计算 $\mathbf{O}_{\text{SWIVE}} - \text{prop}$ 的 EVD
根据式(88)—式(90)得到 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{SWIVE}} - \text{prop}$

4.1 试验参数与评价指标

为了较为全面地对算法定位性能进行评价, 仿真在 $[20, 40]^\circ\text{N}$ 、 $[100, 120]^\circ\text{E}$ 的经纬度范围按均匀分布随机设置台站的空间分布, 每种台站分布的台站数量 $N = 30$, 仿真总台站分布数 $M = 50$, 声源位置在 $[10, 50]^\circ\text{N}$ 、 $[90, 130]^\circ\text{E}$ 的经纬度范围同样按均匀分布随机设置, 如图 2 所示, 其中蓝色五星表示随机声源位置的一次实现, 绿色倒三角表示随机台站位置的一次实现, 浅蓝色和浅绿色区域分别为随机声源和随机台站的位置范围。每种台站分布的蒙特卡罗试验次数为 $L = 2000$ 。SWIVE 算法和 SWIVE-prop 算法的 SAM 阈值系数 $\rho = -11.92N^{-1.201} + 3.445$ [16]。仿真分析中假设各台站处的传播噪声来自区域内单一方向的大气平流层风, 传播噪声均值 μ_n 和方差 $\sigma_{\varepsilon,n}^2$ 分别满足

$$\mu_n = |\mu_0| b(d_n) \sin(\theta_w - \theta_n), \quad (101a)$$

$$\sigma_{\varepsilon,n}^2 = \sigma_{\varepsilon,0}^2 b(d_n), \quad (101b)$$

其中

$$b(d_n) = \begin{cases} 0.005d_n, & 0 \leq d_n \leq 200 \text{ km}, \\ 1, & d_n > 200 \text{ km}, \end{cases} \quad (102)$$

μ_0 和 $\sigma_{\varepsilon,0}^2$ 分别表示传播噪声的参考均值和方差, d_n 表示声源到台站的距离, θ_w 为大气平流层风的去风向, 仿真中设为 $\theta_w = -45^\circ$ 。

算法定位性能的评价指标主要包括偏差距离 e_{bias} 和均方根误差 (RMSE) e_{RMS} 两部分:

$$e_{\text{bias}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M H(\text{geomean}(\hat{\mathbf{s}}_{k,1}, \hat{\mathbf{s}}_{k,2}, \dots, \hat{\mathbf{s}}_{k,L}), \mathbf{s}, \mathbf{R}_\varepsilon), \quad (103)$$

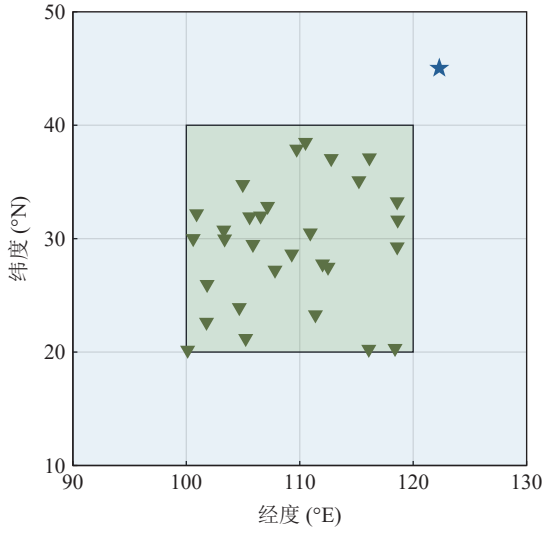


图2 台站声源几何位置分布示意图

$$e_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{ML} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^L (H(\hat{s}_{k,l}, s, R_e))^2}, \quad (104)$$

其中, $\text{geomean}(\cdot)$ 表示地理均值, $\hat{s}_{k,l}$ 表示台站分布 k 第 l 次蒙特卡罗试验的声源位置估计。此外计算了给定条件下 SWIVE-prop 算法的理论 RMSE (SWIVE-prop-th)^[16] 和声源位置估计 RMSE 的 CRLB^[16] 作为算法性能参照。

4.2 测量噪声水平

本仿真假设传播噪声参数不变, 令 $|\mu_0| = 3^\circ$ 和 $\sigma_{e,0} = 3^\circ$, 其余设置与 4.1 节相同。首先分析了测量噪声服从独立同分布的高斯噪声, 即 $e \sim N(0, \sigma_e^2 \mathbf{I})$ 时各算法的定位性能。图 3 展示了当测量噪声标准差 $\sigma_e \in \{0.5^\circ, 1^\circ, \dots, 5^\circ\}$ 时各算法的偏差和 RMSE 性能, 其中“-th”后缀表示算法理论结果。从图中可以看出 SWPLE 算法和 SWIVE 算法由于没有考虑传播噪声,

在整个测量噪声仿真范围内定位性能较差, 其中 SWPLE 算法由于本身的偏差特性导致其偏差和 RMSE 性能是参与比较算法中最差的。存在传播噪声时 SWIVE 算法也不再具有渐近无偏和渐近有效的特性, 存在较大的定位偏差和 RMSE。由于 SWIVE 算法 SAM 阈值 χ_n 的选取忽略了 σ_e 的影响, 因此在 σ_e 一定时 σ_e 越大 χ_n 越接近理想取值, 导致 SWIVE 算法的偏差性能随 σ_e 的增大而有所提升。SWPLE-prop 算法考虑了传播噪声的影响, 在测量噪声水平较小时其偏差和 RMSE 表现均要好于传统算法。但是受限于其偏差特性, 算法始终存在较大的偏差且偏差随 σ_e 的增大而增大。因此当测量噪声水平较大时, SWPLE-prop 算法的偏差和 RMSE 性能均劣于 SWIVE 算法但仍优于 SWPLE 算法。得益于渐近无偏和渐近有效性, SWIVE-prop 算法取得了最优的定位性能, 在测量噪声仿真范围内近乎无偏, 并且 RMSE 性能接近 CRLB。

进一步将测量噪声设置为非同分布高斯噪声, 即 $e_n \sim N(0, \sigma_{e,n}^2)$, 其中 $\sigma_{e,n}^2 = \sigma_{e,0}^2 (\delta_n^2(s)/\delta_0^2)$ 。图 4 展示了当测量噪声的参考标准差 $\sigma_{e,0} \in \{0.5^\circ, 1^\circ, \dots, 5^\circ\}$ 时各算法的偏差和 RMSE 性能。图 4 中展示的仿真结果与图 3 十分接近, 进一步证明了 SWIVE-prop 算法在存在传播噪声的环境中可以取得最优的定位性能。从图 3 和图 4 中还可以看出 SWIVE-prop 算法的理论 RMSE 性能可以达到 CRLB。

4.3 传播噪声水平

本节假设测量噪声参数不变, 即服从 4.2 节设定的非同分布高斯噪声, 令 $\sigma_{e,0} = 3^\circ$ 。首先分析了传播噪声均值变化对各算法定位性能的影响, 图 5 展示了当 $\sigma_{e,0} = 3^\circ$, $|\mu_0| \in \{0^\circ, 0.5^\circ, \dots, 5^\circ\}$ 时各算法的偏差

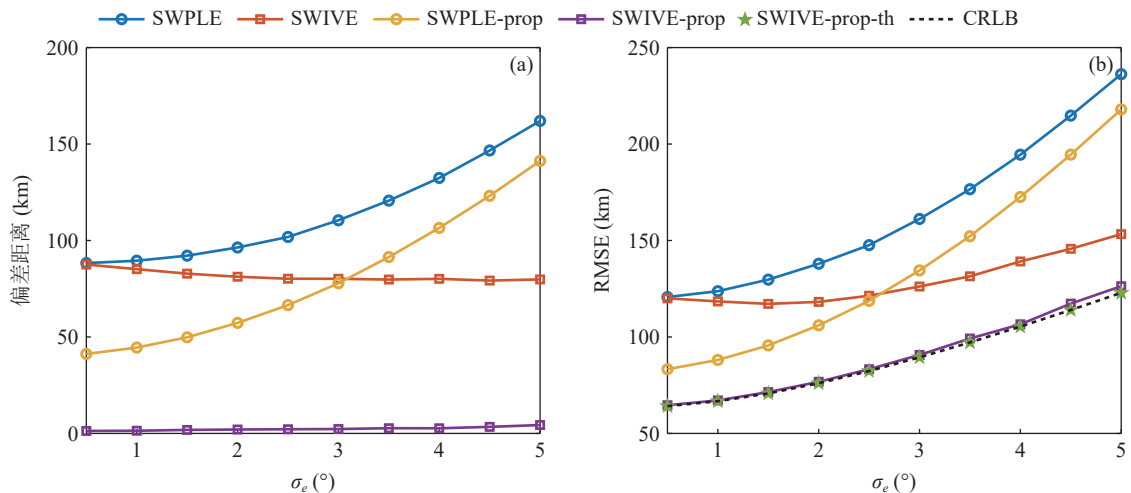


图3 独立同分布测量噪声下各算法的定位性能 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

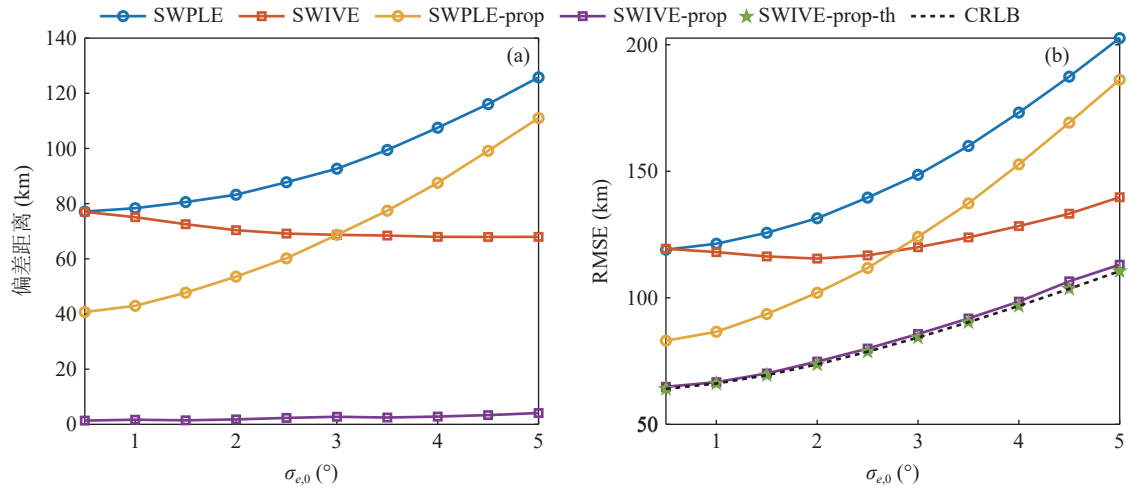


图4 非同分布测量噪声下各算法的定位性能 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

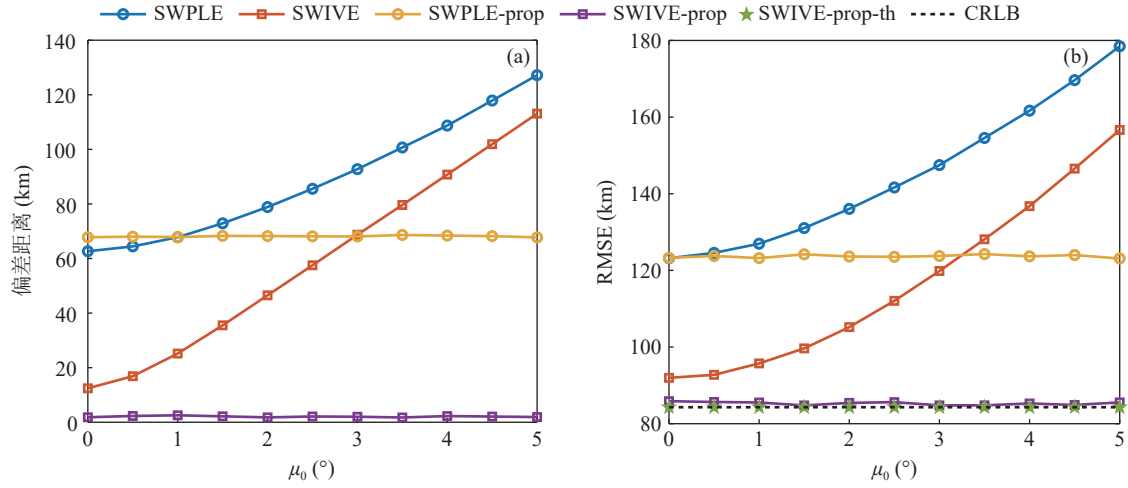


图5 传播噪声均值对各算法定位性能的影响 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

和 RMSE 性能。从图中可以看出 SWPLE 算法和 SWIVE 算法的定位性能受 $|\mu_0|$ 的影响显著, 当 $|\mu_0|$ 增大时这两种算法的偏差和 RMSE 性能均显著下降。同时可以发现 SWIVE 算法的偏差在 $|\mu_0| = 0^\circ$ 时较小, 说明存在传播噪声时 SWIVE 算法的偏差主要来自噪声的均值。SWPLE-prop 算法和 SWIVE-prop 算法由于考虑了传播噪声, 定位性能稳定。SWPLE-prop 算法的大偏差和大 RMSE 源自其偏差特性, 而 SWIVE-prop 算法在 $|\mu_0|$ 的仿真范围内均表现出近乎无偏的偏差性能以及接近 CRLB 的 RMSE 性能。

进一步设置 $|\mu_0| = 3^\circ$, $\sigma_{\epsilon,0} = 3^\circ$, 通过改变平流层风的去风向 θ_w 来改变各台站处传播噪声均值 μ_n 的大小和正负, 从而进一步考察各算法的稳定性。图 6 展示了 $\theta_w \in \{-135^\circ, -90^\circ, \dots, 180^\circ\}$ 时各算法的偏差和 RMSE 性能。SWPLE 算法和 SWIVE 算法的定位性能随风向的改变并不稳定, 其中 SWPLE 算法的偏差和 RMSE 性能起伏较大。而 SWPLE-prop 算法和 SWIVE-prop 算法对于不同风向的定位性能比较

稳定。

最后设置 $|\mu_0| = 3^\circ$, $\theta_w = -45^\circ$, 在 $\sigma_{\epsilon,0} \in \{0.5^\circ, 1^\circ, \dots, 5^\circ\}$ 时分析各算法的定位性能, 结果如图 7 所示。可以看出仿真结果与 4.2 节结果相似, SWIVE-prop 算法的定位性能优于其他算法。SWIVE 算法在 $\sigma_{\epsilon,0}$ 较大时的偏差增加同样源于忽略传播噪声导致的 SAM 阈值选取不合理。

4.4 观测数

本仿真展示了各算法定位性能随观测数 $N \in \{20, 30, \dots, 100\}$ 的变化情况, 假设 $\sigma_{\epsilon,0} = 3^\circ$, $|\mu_0| = 3^\circ$, $\sigma_{\epsilon,0} = 3^\circ$, 其余设置与 4.1 节相同, 结果如图 8 所示。从图中可以看出 SWIVE-prop 算法得益于其渐近无偏和渐近有效的特性, 在 N 的仿真范围内始终具有较小的偏差和 RMSE, 同时随 N 的增大偏差逐渐趋于 0, RMSE 逐渐接近 CRLB。其余算法均存在较大的定位偏差和 RMSE, 其中定位偏差随 N 的增加没有明显减小, RMSE 随 N 的增加虽然减小, 但减小幅

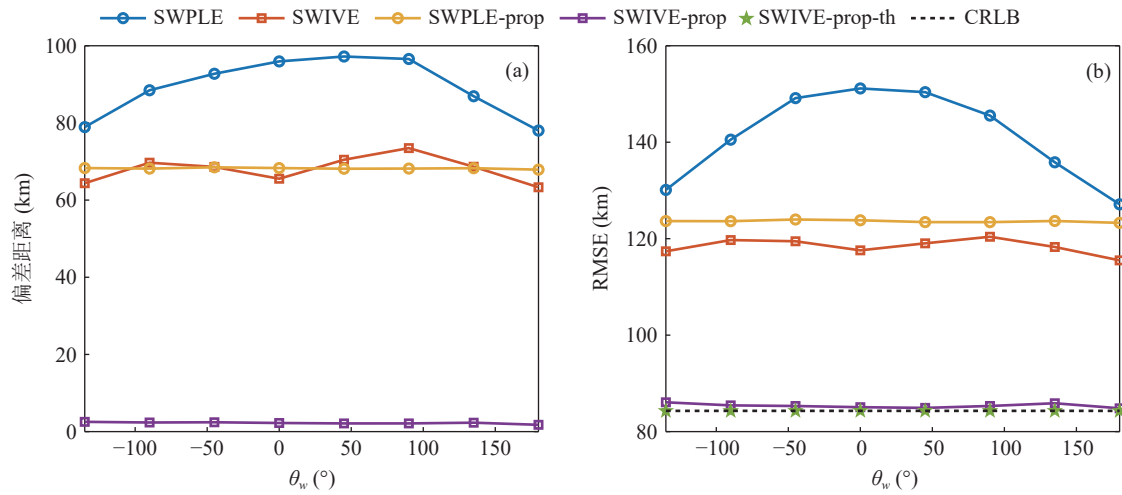


图6 横向风风向对各算法定位性能的影响 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

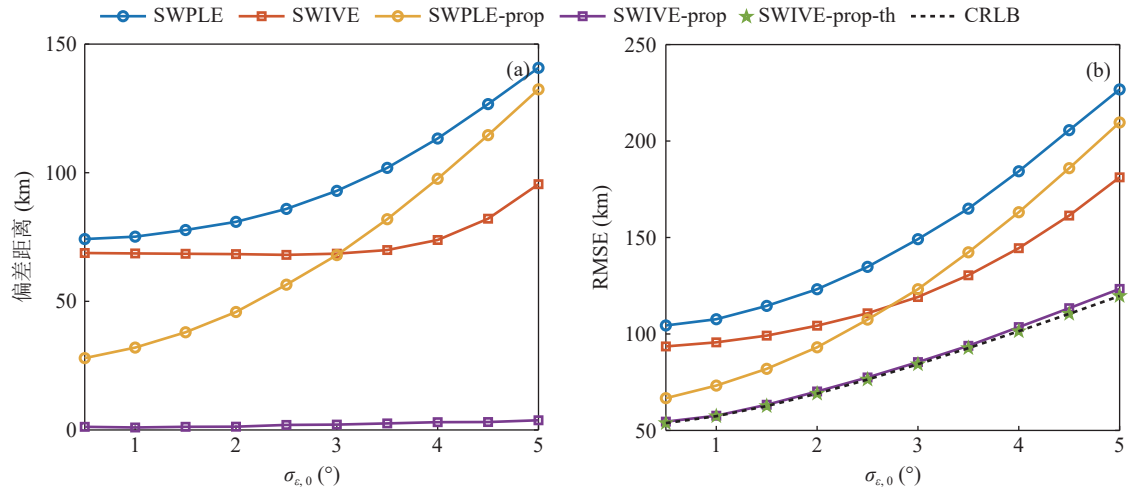
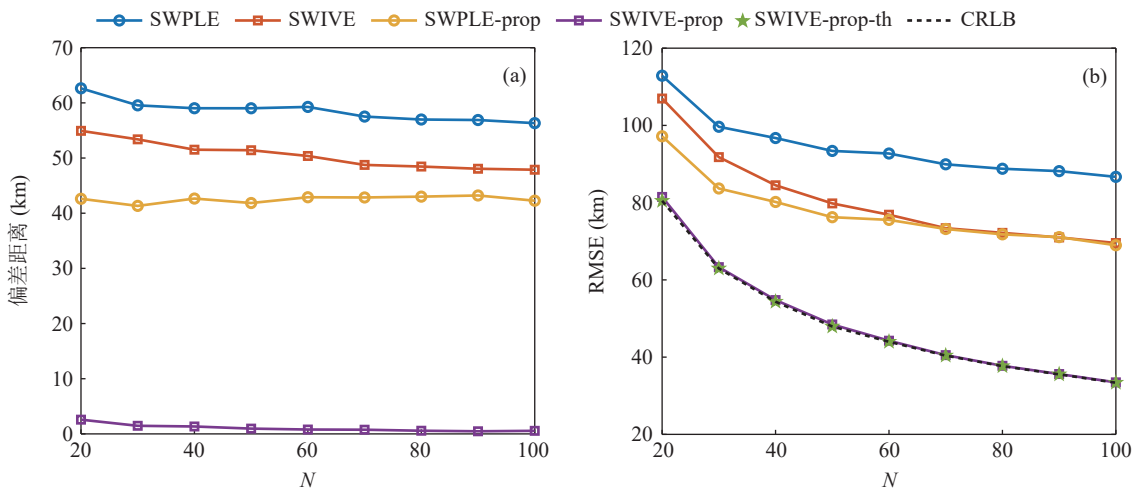


图7 传播噪声标准差对各算法定位性能的影响 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

图8 观测数 N 对各算法定位性能的影响 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

度不明显, 距离 CRLB 较远。

4.5 算法理论与仿真性能对比

本仿真将各算法的理论偏差距离和 RMSE 与仿

真结果进行对比。由于各个算法定位性能理论值要求观测数 N 足够大, 所以设置 $N = 150$ 。另外由于 SWIVE 算法 SAM 阈值选取会影响其定位性能, 妨碍与理论值的比较, 所以本节中 SWIVE 算法 SAM 阈

值设置为最优取值。其余仿真设置与 4.2 节非同分布测量噪声仿真保持一致, 结果如图 9 所示。可以看出各算法偏差和 RMSE 性能理论与仿真结果对应良好, 证明了本文中算法理论分析的正确性。

为进一步分析观测数 N 对算法定位性能理论准确性的影响, 对比了 $N \in \{20, 40, \dots, 200\}$ 时各算法理论定位性能和仿真结果, 如图 10 所示。可以看出随着 N 的增加, 各算法的理论定位性能逐渐接近仿真结果。在 N 较小时 SWPLE 和 SWPLE-prop 算法的理论定位性能与仿真结果有一定的差异, 而 SWIVE 和 SWIVE-prop 算法的理论定位性能和仿真结果在整个 N 的仿真范围内均表现出良好的契合度, 因此在实际应用中 SWIVE-prop 算法的理论误差协方差可以用作定位性能的评价指标。

5 实验验证

英国邦斯菲尔德当地的一个油库于 2005 年 12 月 11 日发生爆炸^[20], 爆炸位置 (51.78°N , 0.43°W)。德国 IGA、I26 次声台站, 瑞典 UPP 次声台站均接收到了该事件产生的次声信号。该事件的特点是单个台站接收到了多个到达信号, 并且 UPP 台站和 IGA 台站处收到的信号受到大气横向风的影响, 传播方向发生了明显偏移。这导致台站处测得的后方位角偏离了真实方位, 因此该事件十分适合用于实验验证。事件的声源台站地理位置关系如图 11 所示, 其中红色五星表示真实事件位置, 蓝色倒三角表示次声台站位置, 黑色线条表示示向线。

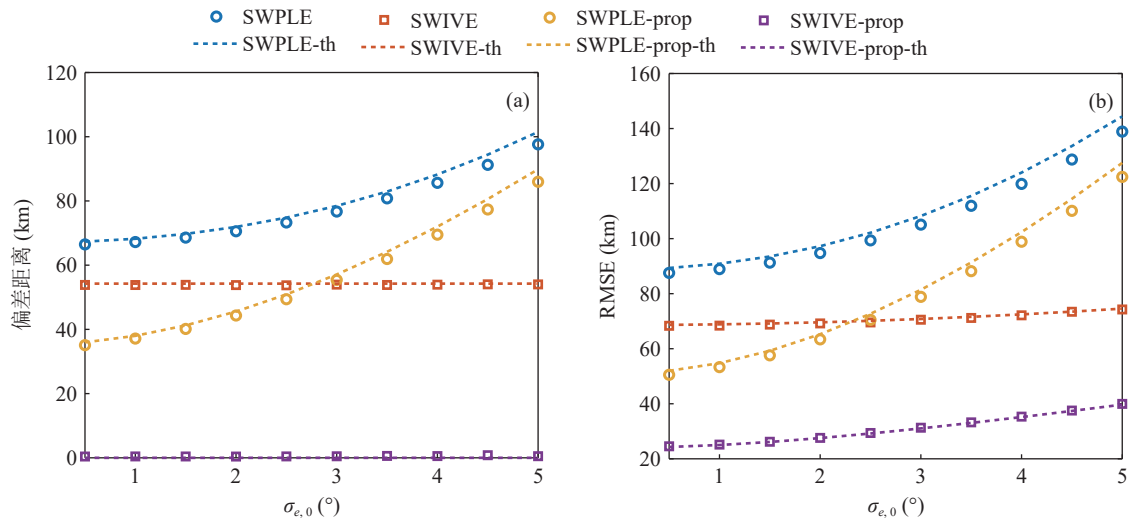


图 9 各算法理论定位性能和仿真结果随测量噪声水平变化的对比 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

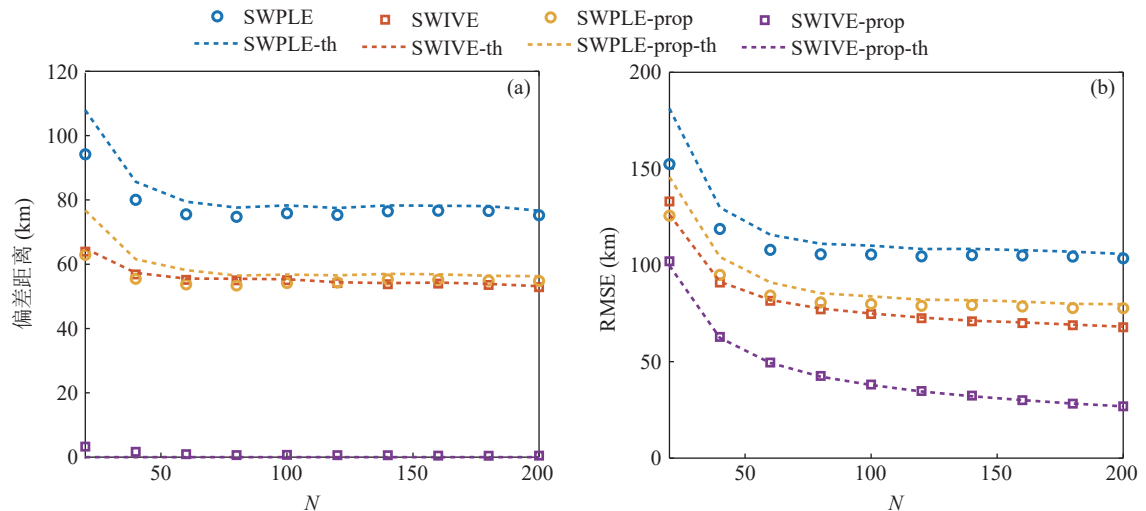


图 10 各算法理论定位性能和仿真结果随观测数变化的对比 (a) 偏差性能; (b) RMSE 性能

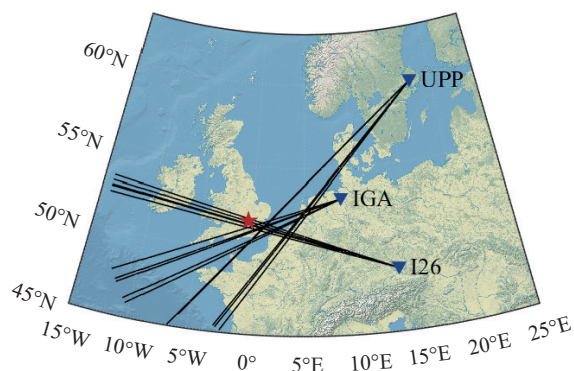


图 11 邦斯菲尔德爆炸事件声源台站位置关系

使用 PMCC 算法^[24-25]和 3.1.1 节描述的测量噪声参数估计方法得到的次声后方位角测量值和测量噪声标准差估计结果如表 3 所示, 可知 IGA 和 UPP 台站的后方位角测量受到了大气横向风影响而明显偏离真实方位。本研究分别在只使用 ECM 和使用基于 ECM 和 ERA5 大气再分析数据的混合大气模型 (Hybrid) 的条件下估计了传播噪声均值和标准差。两种大气剖面模型如图 12 所示, 混合大气模型相较于 ECM 在大气中间层及以下展现出更丰富的细节, 更有利于准确估计传播噪声。传播噪声参数估计的参数设置如表 4 所示, 传播噪声估计结果如表 5 所示, 使用混合大气模型估计的传播噪声相较于只使用 ECM 估计更加接近真实情况。

分别使用 SWIVE 算法和 SWIVE-prop 算法对事件进行定位, 结果如图 13 和表 6 所示。图 13 中圆点表示事件位置估计, 椭圆表示 99% 误差椭圆, 其中蓝色实线、短横线和点线分别表示未考虑传播噪声、使用 ECM 和混合大气模型计算的 SWIVE 算法误差椭圆。从实验结果中可以看出由于 SWIVE 算法未

表 3 邦斯菲尔德爆炸事件次声信号检测和测量噪声参数估计结果

次声台站	地理位置	后方位角 真值 (°)	编号	后方位角 测量值 (°)	标准差估计 (°)
IGA	53.26°N, 8.69°E	-101.28	I1	-112.91	0.52
			I2	-104.09	0.30
			I3	-111.60	0.96
			I4	-106.61	0.78
			I5	-107.38	1.12
I26	48.85°N, 13.71°E	-66.66	I1	-65.33	1.68
			I2	-67.19	0.38
			I3	-67.35	0.30
			I4	-67.44	1.04
			I5	-66.34	0.23
			I6	-68.53	0.18
UPP	59.85°N, 17.61°E	-120.77	I1	-132.14	4.83
			I2	-124.72	8.84
			I3	-130.69	8.24
			I4	-124.55	4.87
			I5	-131.13	5.90

考虑传播噪声, 事件定位结果与真实位置相差较大, SWIVE-prop 算法的定位结果更加靠近事件真实位置。由于传统的 SWIVE 算法性能分析中并未将次声传播的影响考虑其中, 因此图 13 中蓝色实线表示的未考虑传播噪声计算的误差椭圆低估了 SWIVE 算法的不确定度, 并不能准确反映算法定位性能。而使用本文提出的考虑传播噪声的 SWIVE 分析方法并使用混合大气模型计算的误差椭圆更符合算法的真实定位性能, 同时对比只使用 ECM (蓝色短横线) 和使用混合大气模型 (蓝色点线) 计算的误差椭圆可以看出大气剖面模型的准确性对于算法不确定

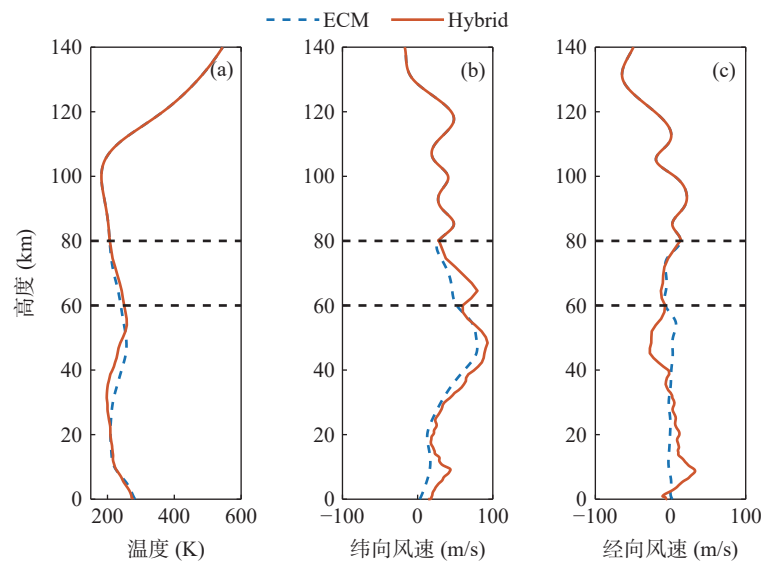


图 12 大气剖面模型对比 (a) 温度; (b) 纬向风; (c) 经向风

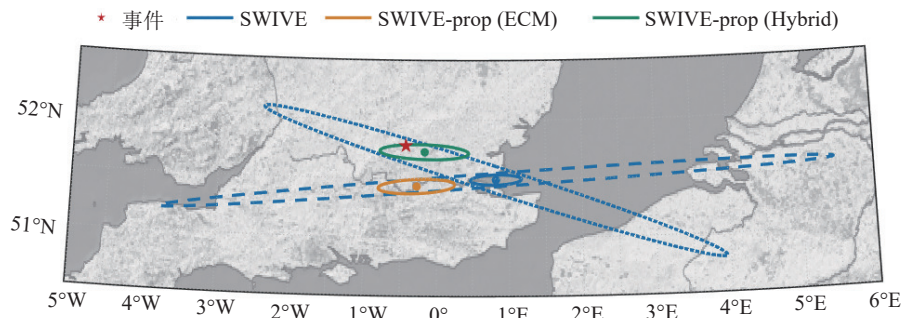


图 13 邦斯菲尔德爆炸事件定位结果

表 4 传播噪声估计的参数设置

参数	取值
平均声速 c	300 m/s
纬度间隔 $\Delta\varphi$	1°
经度间隔 $\Delta\lambda$	1°
最小融合高度 $h_{\min}$	60 km
最大融合高度 $h_{\max}$	80 km
射线追踪方位角范围 ψ_{lim}	10°
射线追踪方位角步长 $\Delta\psi$	1°
射线追踪俯仰角范围 $[\phi_{\min}, \phi_{\max}]$	$[1^\circ, 45^\circ]$
射线追踪俯仰角步长 $\Delta\phi$	1°
到达信号样本数 P	50

表 5 邦斯菲尔德爆炸事件传播噪声参数估计结果

编号	期望估计 (ECM) ($^\circ$)	标准差估计 (ECM) ($^\circ$)	期望估计 (Hybrid) ($^\circ$)	标准差 估计 (Hybrid) ($^\circ$)
IGA11	-3.19	0.37	-5.71	1.22
IGA12	-1.71	0.20	-3.50	0.36
IGA13	-3.25	0.40	-6.29	1.11
IGA14	-2.18	0.19	-3.91	0.32
IGA15	-2.47	0.20	-4.39	0.54
I26I1	0.71	0.44	-0.11	1.56
I26I2	0.52	0.36	1.56	0.18
I26I3	0.59	0.36	1.56	0.18
I26I4	1.20	0.18	-1.56	0.14
I26I5	1.61	0.15	-1.56	0.19
I26I6	1.70	0.19	-1.77	0.16
UPPI1	-4.03	1.70	-6.77	2.09
UPPI2	-3.46	1.42	-5.50	1.67
UPPI3	-2.89	0.54	-5.59	1.63
UPPI4	-4.96	1.21	-8.18	2.68
UPPI5	-2.87	0.55	-5.37	1.56

度的计算至关重要,同时可以验证混合大气模型相较于只使用 ECM 对真实大气的描述更准确。式 (105) 定义了变量 x_i 与变量 x_j 相比的百分比变化量 p , 根据该式可得使用混合大气模型计算的 SWIVE-prop 算法定位误差比 SWIVE 算法减少 79.6%, SWIVE-prop 算法误差椭圆面积比使用混合大气模型计算的

表 6 算法定位性能比较

算法	定位误差 (km)	99%误差椭圆面积 (km^2)
SWIVE	92.35	365.28
		6383.99 (ECM)
		8836.15 (Hybrid)
SWIVE-prop	39.88	772.36 (ECM)
	18.88	933.71 (Hybrid)

SWIVE 算法误差椭圆面积减少 89.4%。

$$p = \frac{x_i - x_j}{x_j} \times 100\% . \tag{105}$$

6 结论

本研究首次在球面伪线性估计器中考虑了次声传播过程的影响,将其建模为传播噪声加入噪声模型,并给出了 SWPLE 算法和 SWIVE 算法偏差和误差协方差的解析表达式。通过理论分析可以发现,球面伪线性估计器的定位性能均受传播噪声的影响而明显下降,其中 SWIVE 算法失去了渐近无偏性和渐近有效性。为了使算法能更好地解决广域次声源定位问题,使用基于 ECM 和大气再分析数据的混合大气剖面模型和射线追踪方法估计传播噪声的均值和方差,提出了 SWPLE-prop 算法和 SWIVE-prop 算法。仿真分析表明,各算法的理论性能分析准确,并且 SWIVE-prop 算法在不同的台站分布、测量噪声标准差、传播噪声均值和标准差以及观测数下均可以达到接近无偏的偏差性能和接近 CRLB 的 RMSE 性能。使用邦斯菲尔德爆炸事件验证了 SWIVE-prop 算法的性能优势,其中使用混合大气模型的 SWIVE-prop 算法相较 SWIVE 算法定位误差减少 79.6%, 99% 误差椭圆面积减少 89.4%。

参 考 文 献

1 Le Pichon A, Blanc E, Hauchecorne A. Infrasound monitoring for atmospheric studies: Challenges in middle atmosphere dynamics and societal benefit. Cham: Springer International Publishing,

- 2019
- 2 Lee W H K, Stewart S W. Principles and applications of microearthquake networks. New York: Academic Press, 1981
- 3 Jordan T H, Sverdrup K A. Teleseismic location techniques and their application to earthquake clusters in the South-Central Pacific. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1981; **71**(4): 1105–1130
- 4 Bratt S R, Bache T C. Locating events with a sparse network of regional arrays. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1988; **78**(2): 780–798
- 5 Blom P S, Marcillo O, Arrowsmith S J. Improved Bayesian infrasonic source localization for regional infrasound. *Geophys. J. Int.*, 2015; **203**(3): 1682–1693
- 6 Arrowsmith S, Park J, Che I Y, *et al.* Event location with sparse data: When probabilistic global search is important. *Seismol. Res. Lett.*, 2021; **92**(2A): 976–985
- 7 Matoza R S, Green D N, Le Pichon A, *et al.* Automated detection and cataloging of global explosive volcanism using the International Monitoring System infrasound network. *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, 2017; **122**(4): 2946–2971
- 8 De Negri R, Matoza R S. Rapid location of remote volcanic infrasound using 3D ray tracing and empirical climatologies: Application to the 2011 Córdón Caulle and 2015 Calbuco eruptions, Chile. *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, 2023; **128**(3): 1–18
- 9 Almendros J, Chouet B. Performance of the radial semblance method for the location of very long period volcanic signals. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 2003; **93**(5): 1890–1903
- 10 Mckee K, Fee D, Rowell C, *et al.* Network-based evaluation of the infrasonic source location at Sakurajima volcano, Japan. *Seismol. Res. Lett.*, 2014; **85**(6): 1200–1211
- 11 Fee D, Toney L, Kim K, *et al.* Local explosion detection and infrasound localization by reverse time migration using 3-D finite-difference wave propagation. *Front. Earth Sci.*, 2021; **9**: 1–14
- 12 吕君, 郭泉, 冯浩楠, 等. 北京地震前的异常次声波. *地球物理学报*, 2012; **55**(10): 3379–3385
- 13 郭泉, 杨亦春, 吕君, 等. 基于广域次声传感器网络的地震本地次声波监测. *地球科学(中国地质大学学报)*, 2014; **39**(12): 1807–1817
- 14 杨亦春, 郭泉, 吕君, 等. 大地震前出现的异常次声波观测研究. *物理学报*, 2014; **63**(13): 224–237
- 15 赵久彬, 刘元雪, 杨骏堂, 等. 滑坡次声信号简正波模型的匹配场超前定位算法. *岩土力学*, 2020; **41**(12): 4116–4126
- 16 Zhang T, Teng P, Lyu J, *et al.* Quasi-closed-form algorithms for spherical angle-of-arrival source localization. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2024; **72**: 432–448
- 17 Diamond M. Cross wind effect on sound propagation. *J. Appl. Meteorol. Clim.*, 1964; **3**(2): 208–210
- 18 Smets P S M, Assink J D, Le Pichon A, *et al.* ECMWF SSW forecast evaluation using infrasound. *J. Geophys. Res.: Atmos.*, 2016; **121**(9): 4637–4650
- 19 Blom P, Waxler R. Modeling and observations of an elevated, moving infrasonic source: Eigenray methods. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2017; **141**: 2681–2692
- 20 Ceranna L, Le Pichon A, Green D N, *et al.* The Buncefield explosion: A benchmark for infrasound analysis across Central Europe. *Geophys. J. Int.*, 2009; **177**(2): 491–508
- 21 Pilger C, Ceranna L, Ross J O, *et al.* The European infrasound bulletin. *Pure Appl. Geophys.*, 2018; **175**(10): 3619–3638
- 22 Vincenty T. Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. *Surv. Rev.*, 1975; **23**(176): 88–93
- 23 Doğançay K. 3D pseudolinear target motion analysis from angle measurements. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2015; **63**(6): 1570–1580
- 24 Cansi Y. An automatic seismic event processing for detection and location: The P.M.C.C. method. *Geophys. Res. Lett.*, 1995; **22**(9): 1021–1024
- 25 Havelock D, Kuwano S, Vorländer M. Handbook of signal processing in acoustics. New York: Springer, 2008: 1425–1435
- 26 Hersbach H, Bell B, Berrisford P, *et al.* The ERA5 global reanalysis. *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, 2020; **146**(730): 1999–2049
- 27 Korn G A, Korn T M. Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. Dover ed. Mineola, N. Y.: Dover Publications, 2000
- 28 Torrieri D J. Statistical theory of passive location systems. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1984; **20**(2): 183–198