

湍流附面层作用下弹性板的随机振动*

黄 曾 暘

(中国科学院声学研究所)

本文用富里叶变换和特征展开的方法讨论了弹性薄板在重介质(水)中的随机振动问题;在排除各振动方式通过介质相互作用的条件下,严格考虑了介质的反作用;并根据近年湍流附面层的实验结果,确定了用 δ 函数描写“准声”相关函数的适用范围。

引 言

近十年来,湍流附面层引起的随机振动,受到了工程界和声学界的注意^[1-4]。从理论上讲,如果一个振动系统的自由振动可以求解,作用力的有关统计特性已经知道,那么,处理该系统的随机振动就不存在原则性的困难。例如,Dyer^[1]在讨论板的随机振动时,应用 Lyon^[2]提出的格林函数方法,导出了振动位移相关函数与作用力场(湍流附面层“准声”)相关函数的积分关系式。

但是,这类一般的积分关系式还不适用于作工程计算。在本文中,我们用富里叶变换和特征展开的方法,并根据近年湍流附面层“准声”的实验研究结果,导出了振动位移功率谱与“准声”场有关统计参数及振动系统复共振频率的关系式。

本文是对水动力噪声的初步探讨之一。弹性板在水中振动的求解,不能按照通常的概念,把介质的作用仅仅归结为衰减和惯性的增加,下面,将在一个特定的情况,严格计算介质(水)对弹性板振动的作用。

最后,顺便说明一下常常发生的一个问题:大家知道,空气动力噪声和空气湍流附面层引起的随机振动,只是在接近声速或超声速的飞机与导弹出现以后,才受到工程界和声学界的重视。而目前水下航行物体的航速不会超过几十节,远小于声速,那么,水动力噪声**是否具有实际意义呢?我们认为:水动力辐射噪声在一般情况下可以忽略不计,因为它的辐射效率与马赫数的五次方成比例,但水动力近场噪声(即

“准声”)以及它通过弹性边界的辐射声,当航速较高时(例如20节以上)就不可忽视了。因为“准声”的声压级约为 $8 \cdot 10^{-3} \rho_0 U_0^2$,这就是说,当水下运动物体的速度达到空气中运动物体速度的1/30时,它们造成的近场噪声就相当了。

一、介质对弹性板振动的反作用

为了说明在重介质情况下,可以用特征展开方法解决振动问题,首先,我们来考察介质对振动体的反作用。

大家知道,介质对振动体的反作用是一个复杂的问题。要从理论上阐明这个问题,不能不从一些假想的情况出发,这种假想的情况最好能够排除各振动方式通过介质的相互作用。因此,我们来考察如图1所示的情况。

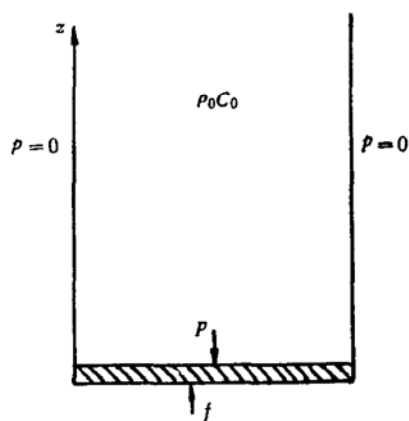


图 1

把所考察的板作为一半无限介质空间的底,板的四边简支,介质空间四壁的边界条件取

* 1965年8月6日收到。

** 这里水动力噪声不包括空化噪声。

为 $p = 0$ (符号涵义见附表), 在这种假想情况下, 如果板以方式 $\varphi_{mn}(F)$ 振动, 则它在介质中只激发同样方式的声扰动. 因此, 设有分布力 $f = f_{mn}\varphi_{mn}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$

$$= f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

作用于板上, 则板的位移 W 及介质中的声场 p 应具有下面的形式:

$$W(\mathbf{r}, t) = W_{mn}\varphi_{mn}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

$$p(\mathbf{R}, t) = p_{mn}\varphi_{mn}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

$W(\mathbf{r}, t)$ 满足振动方程

$$M \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + B \nabla^2 W = f - p|_{z=0}, \quad (4)$$

$p(\mathbf{R}, t)$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - C_0^2 \nabla^2 p = 0 \quad (5)$$

及定解条件

$$1) z = 0, \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho_0 \omega^2 W(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

2) 对 z 的依赖关系应代表沿 z 正向传播或指数衰减的波.

将(1)–(3)代入(4)–(6)求解, 得:

$$\left[B k_{mn}^4 - M \omega^2 + \frac{\rho_0 \omega^2}{i \gamma_{mn}} \right] W_{mn} = f_{mn}, \quad (7)$$

其中

$$k_{mn}^2 = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (m^2 + n^2), \quad (8)$$

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_0} \right)^2 - k_{mn}^2}. \quad (9)$$

引入函数 $\Phi_{mn}(\omega)$,

$$\Phi_{mn}(\omega) = \frac{f_{mn}}{W_{mn}} = B k_{mn}^4 - M \omega^2 + \frac{\rho_0 \omega^2}{i \gamma_{mn}}, \quad (10)$$

并规定下列无量纲参数

$$x = \frac{\omega}{\omega_{mn}^{(0)}}, \quad (11a)$$

$$\lambda = \frac{\rho_0 C_0}{M \omega_{mn}^{(0)}} = \frac{\rho_0 C_0}{\rho_s C_s} \frac{1}{(k_{mn} h)^2}, \quad (11b)$$

$$\mu = \frac{k_{mn} C_0}{\omega_{mn}^{(0)}} = \frac{C_0}{C_s} \frac{1}{k_{mn} h}, \quad (11c)$$

其中 $\omega_{mn}^{(0)} = \sqrt{\frac{B}{M}} k_{mn}$ 是薄板弯曲振动在真空

中的共振频率, $C_s = \sqrt{\frac{E}{12(1-\sigma^2)\rho_s}}$ 是薄板中纵波速度的 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 倍.

采用上列参数, $\Phi_{mn} \Phi_{mn}^*$ 可化为下面的形式:

$$\Phi_{mn} \Phi_{mn}^* = M^2 [\omega_{mn}^{(0)}]^4 \times \frac{x^6 - (\mu^2 - \lambda^2 + 2)x^4 + (2\mu^2 + 1)x^2 - \mu^2}{x^2 - \mu^2}, \quad (12a)$$

或

$$\frac{1}{\Phi_{mn} \Phi_{mn}^*} = \frac{1}{M^2 [\omega_{mn}^{(0)}]^4} \times \frac{x^2 - \mu^2}{(x^2 - d_1)(x^2 - d_2)(x^2 - d_3)}, \quad (12b)$$

d_1, d_2, d_3 是方程

$$y^3 - (\mu^2 - \lambda^2 + 2)y^2 + (2\mu^2 + 1)y - \mu^2 = 0 \quad (13)$$

的根, 这些根只依赖于无量纲参数 $\frac{\rho_0}{\rho_s}, \frac{C_0}{C_s}$ 和 $k_{mn}h$. 对于确定的介质和材料, 它们只依赖于参数 $k_{mn}h$. 这样, 就提供了将理论计算规格化的可能性.

有理分式 $\frac{x^2 - \mu^2}{(x^2 - d_1)(x^2 - d_2)(x^2 - d_3)}$ 可以分解为下列三项之和:

$$\frac{A_1}{x^2 - d_1} + \frac{A_2}{x^2 - d_2} + \frac{A_3}{x^2 - d_3},$$

$$\text{其中 } A_1 = \frac{d_1 - \mu^2}{(d_1 - d_2)(d_1 - d_3)}, \quad (14a)$$

$$A_2 = \frac{d_2 - \mu^2}{(d_2 - d_1)(d_2 - d_3)}, \quad (14b)$$

$$A_3 = \frac{d_3 - \mu^2}{(d_3 - d_1)(d_3 - d_2)}, \quad (14c)$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0. \quad (15)$$

于是, 式(7)化为

$$W_{mn} W_{mn}^* = \frac{1}{M^2 [\omega_{mn}^{(0)}]^2} \left[\frac{A_1}{x^2 - d_1} + \frac{A_2}{x^2 - d_2} + \frac{A_3}{x^2 - d_3} \right] f_{mn} f_{mn}^*, \quad (16)$$

在本表达式中, 振动位移与作用力之间的关系具有明确的物理意义. 下一节的理论运算将以这个表达式为出发点.

上面的推导假定了 γ_{mn} 为实数, 但在 γ_{mn} 为虚数的情况, 表达式(16)依然有效.

二、振动位移的功率谱

仍考察图 1 所示的特定情况. 薄板的外侧有湍流附面层, 它对板施加作用力, 这一作用力包括“准声”和真声(即通常意义下的声波)两部分. 这里, 只考虑“准声”, 并把它抽象为一个随机力场 $p_q(\mathbf{r}, t)$, 即不考虑板的振动对流场的反作用. 由于湍流附面层受到片流次层的保护, 在线性问题中, 不考虑反作用是容许的. 板在随机力场 $p_q(\mathbf{r}, t)$ 作用下产生的振动, 将在另一侧介质中引起声扰动, 因而, 介质又对板施加作用力 $p_0(\mathbf{r}, t)$. 这时, 位移的方程仍为(4)

$$M \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + B \nabla^2 W = p_q(\mathbf{r}, t) - p_0(\mathbf{r}, t),$$

将方程(4)对 t 作富里叶变换, 得

$$B \nabla^2 W(\mathbf{r}, \omega) - M \omega^2 W(\mathbf{r}, \omega) = p_q(\mathbf{r}, \omega) - p(\mathbf{R}, \omega)|_{z=0}, \quad (17)$$

$p(\mathbf{R}, \omega)$ 满足波动方程 $(\nabla^2 + k^2)p(\mathbf{R}, \omega) = 0$, 定解条件同前.

假定板在真空中的自由振动方式 $\varphi_{mn}(\mathbf{r})$ 是一个正交完备的函数系, 则可选取 $\varphi_{mn}(\mathbf{r})$ 为主坐标系. 将式(17)中的变量对 $\varphi_{mn}(\mathbf{r})$ 展开, 得:

$$W(\mathbf{r}, \omega) = \sum \sum W_{mn}(\omega) \varphi_{mn}(\mathbf{r}) \quad (18a)$$

$$p_q(\mathbf{r}, \omega) = \sum \sum f_{mn}(\omega) \varphi_{mn}(\mathbf{r}) \quad (18b)$$

$$p_0(\mathbf{r}, \omega) = \sum \sum p_{mn}(\omega) \varphi_{mn}(\mathbf{r}) \quad (18c)$$

代入式(1), 容易证明: 广义坐标 $W_{mn}(\omega)$ 与广义力 $f_{mn}(\omega)$ 之间的关系式依然是方程(7)

$$W_{mn}(\omega) = \frac{1}{\Phi_{mn}(\omega)} f_{mn}(\omega). \quad (19)$$

引入振动位移及“准声”的功率谱

$$S_W = 2 \overline{W(\mathbf{r}, \omega) W^*(\mathbf{r}, \omega)} = 2 \sum \sum \sum \sum W_{mn}(\omega) W_{ps}^*(\omega) \varphi_{mn}(\mathbf{r}) \varphi_{ps}(\mathbf{r}), \quad (20a)$$

$$S_p = 2 \overline{p_q(\mathbf{r}, \omega) p_q^*(\mathbf{r}, \omega)} = 2 \sum \sum \sum \sum f_{mn} f_{ps}^* \varphi_{mn}(\mathbf{r}) \varphi_{ps}(\mathbf{r}), \quad (20b)$$

“—”代表一种平均, 其意义如下: 在本文中, 我们认为“准声”和振动都是平稳随机过程, 对平稳随机过程 $\varphi(t)$ 的富里叶变换应按下述方式来进行, 取 $\varphi(t)$ 的替代函数 $\phi(t)$, 当 $|t| < T$

时, $\phi(t) = \varphi(t)$. 当 $|t| > T$ 时, $\phi(t) = 0$, 对 $\phi(t)$ 作富里叶变换, 得 $\varphi_T(\omega)$, 然后求极限

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \overline{\varphi_T(\omega) \varphi_T^*(\omega)}, \text{ 并定义 } \overline{\varphi \varphi^*} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \times \varphi_T(\omega) \varphi_T^*(\omega), \text{ 称之为功率谱.}$$

考察 S_W 对空间的平均值, 得

$$\overline{S_W} = 2 \sum \sum W_{mn} W_{mn}^* = \sum \sum \frac{2}{\Phi_{mn}(\omega) \Phi_{mn}^*(\omega)} \overline{f_{mn} f_{mn}^*} = 2 \sum \sum S_{mn}(\omega), \quad (21)$$

又根据随机过程理论, 不难得到

$$\overline{p_{mn} p_{mn}^*} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau \iint \langle p_q(\mathbf{r}, t) p_q(\mathbf{r}', t') \rangle \varphi_{mn}(\mathbf{r}) \varphi_{mn}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (22)$$

式(22)所表示的功率谱是理论上的功率谱, 实验可以测量的功率谱是它在一定频率范围的平均值. 另外, 在实际问题中, 往往是对一定频率范围的总振动感兴趣. 因此, 下面来考察 $\bar{S}_\omega$ 在频率范围 (ω_1, ω_2) 上的积分.

$$\begin{aligned} \langle W^2 \rangle &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \bar{S}_\omega d\omega \\ &= 2 \sum \sum \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{mn} d\omega = 2 \sum \sum \langle W^2 \rangle_{mn}, \end{aligned} \quad (23)$$

根据式(16), 则

$$\langle W^2 \rangle_{mn} = \frac{2}{M^2 [\omega_{mn}^{(0)}]^4} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{x^2 - d_j} \right) \overline{f_{mn} f_{mn}^*} d\omega,$$

下节将证明, 在一定条件下, 有

$$\overline{f_{mn} f_{mn}^*} = \frac{\langle p_q^2 \rangle}{\theta(KL)^2} \frac{1}{\omega^2 + 1/\theta^2}$$

若令 $d_4 = C_4^2 = -\left(\frac{1}{\theta \omega_{mn}^{(0)}}\right)^2$, $d_j = C_j^2$. $\langle W^2 \rangle_{mn}$

可化为

$$\langle W^2 \rangle_{mn} = \frac{2 \langle p_q^2 \rangle}{\theta(KL)^2 M^2 [\omega_{mn}^{(0)}]^5} \Sigma I_j \quad (24)$$

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{A_j}{C_j C_4 (C_j^2 - C_4^2)} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ C_4 \left[\frac{1}{x - C_j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{x + C_j} \right] + C_j \left[\frac{1}{x + C_4} - \frac{1}{x - C_4} \right] \right\} dx \\ x_1 &= \omega_1 / \omega_{mn}^{(0)} \quad x_2 = \omega_2 / \omega_{mn}^{(0)} \end{aligned}$$

考察积分 $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dz}{z - a}$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dz}{z - a} = \oint_C \frac{dz}{z - a} + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{dz}{z - a},$$

当 a 在迴路 C 之内时 (见图 2)

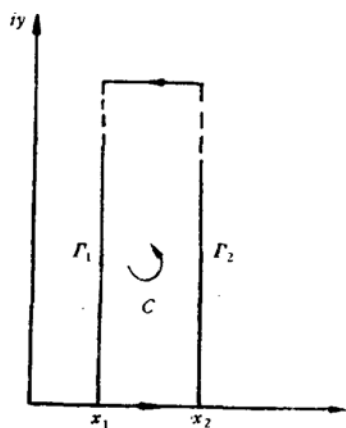


图 2

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i,$$

否则为零。容易证明,第二项为

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{dz}{z-a} = \ln \frac{x_2-a}{x_1-a},$$

由这些结果可知, ΣI_j 很自然地应分为两部分

$$\Sigma I_j = R_{mn} + S_{mn}, \quad (25)$$

R_{mn} 代表迴路 C 中极点的贡献 (留数), 对于确定的 (ω_1, ω_2) , 极点只有某些方式 (m, n) 才存在。因此, 无穷级数 (23) 中的 R_{mn} 部分仅有有限项不为零。当 $R_{mn} \neq 0$ 时, 其值为

$$R_{mn} = 4\pi I_m \left[\frac{A_1}{C_1(C_1^2 - C_4^2)} \right], \quad (26)$$

S_{mn} 代表沿 Γ_1 和 Γ_2 积分的贡献, 其值为

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{(C_j^2 - C_4^2)} \left[\frac{1}{C_j} \ln \frac{x_2 - C_j}{x_1 - C_j} + \frac{1}{C_4} \ln \frac{x_2 + C_4}{x_1 + C_4} \right], \quad (27)$$

对于共振频率 $\omega_{mn}^{(0)}$ 远大于 ω_2 的方式 (m, n)

$$S_{mn} \approx - \sum \frac{A_j \Delta x}{C_j^2 x_1 x_2} = - \omega_{mn}^{(0)} \frac{\Delta \omega}{\omega_1 \omega_2} \sum \frac{A_j}{d_j}, \quad (28)$$

因此, 无穷级数 $\frac{S_{mn}}{[\omega_{mn}^{(0)}]^5}$ 对于 $\omega_{mn}^{(0)}$ 大于 ω_2 的方式 (m, n) 将大体上按 $1/k^4$ (k 自然数) 收敛, 故不难根据具体情况作近似估计。

由方程 (25) — (27) 可见, 振动位移完全由板的有关参数 $\omega_{mn}^{(0)}$, C_j , A_j 及湍流附面层的有关参数 $\langle p_q^2 \rangle$, θ , K 确定。 θ , K 对于一定的频率范围可取为常数, C_j , A_j 只是 $k_{mn}h$ 的函数 (相

对于确定的介质和材料), 作出 C_j , A_j 对 $k_{mn}h$ 的关系曲线, 根据方程 (24) — (27), 就可以按一定规格计算一定频率范围内的振动位移。

三、用 δ 函数描写湍流附面层“准声”场的适用范围

湍流附面层“准声”在平面刚性边界上的时空相关函数, Kraichnan^[5,6] 曾作过理论上的探索, 但没有得到适用的结果。在文献 [1—3] 中假定它具有下面的形式:

$$\langle p_q(\mathbf{r}, t) p_q(\mathbf{r}', t') \rangle = A \langle p_q^2 \rangle \times \delta(x' - x - v_0 \tau) e^{-\frac{\tau}{\theta_0}}, \quad (29)$$

这种形式意味着“准声”场是时间平稳和空间均匀的随机过程。在附面层过渡区下游的一定区域内, 空间均匀的假定也是容许的。其次, 式 (29) 考虑了湍流涡旋的对流和衰减效应, 因而, 它应能在一定程度上反映了“准声”场的根本特性。

近年, 对空气湍流附面层平面边界上“准声”场的时空相关函数作了初步测量^[6], 发现窄带时空相关函数可以近似地用下面的函数形式来描写:

$$\langle p_q(x, t) p_q(x', t') \rangle = \langle p_q^2 \rangle \frac{\sin K(x' - x - v\tau)}{K(x' - x - v\tau)} e^{-\frac{|t-t'|}{\theta}} \quad (30)$$

这个窄带相关函数描写一定频率范围 (或一定尺度范围) 湍流涡旋的统计特性, 由于不同尺度涡旋的对流速度和衰减时间不同, 式 (30) 中的 K , θ , v 都应看成是与频率有关的参数。

下面, 从 (29), (30) 和 (22) 式出发来讨论用 δ 函数描写“准声”时空相关函数的适用范围。为了计算上的便利, 考察一维情况, 并假定

$$\varphi_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (31)$$

把 (29), (30) 分别代入式 (22) 进行计算 (同时应用 (31) 式), 结果表明, 当下列条件满足

$$\frac{v\theta}{L} \ll 1 \quad \frac{m\pi}{KL} \ll 1 \quad (32)$$

$$\omega \gg \gamma_m \left(\gamma_m = \frac{m\pi v}{L} \right) \quad (33)$$

并取式(29)中的常数 $A = \frac{\pi}{K}$ 时, 得到同样的

$\overline{p_m p_m^*}$ 近似表达式:

$$\overline{p_m p_m^*} = \frac{\langle p_q^2 \rangle}{\theta K L} \frac{1}{\omega^2 + 1/\theta^2} = \frac{1}{K L} S_f(\omega), \quad (34)$$

表明(29)与(30)在由(32), (33)规定的条件下是等效的。

对于水湍流附面层, 有关参数 K, θ, ν 还没有实验数据, 但参考雷诺数相当情况下空气湍流附面层的实验数据, 可以相信, 在当前有实际意义的水动力噪声问题中, 上述条件是能够满足的。现在的问题是, 如果广义坐标不是如同式(31)的简单形式, 上面的结论是否依然成立? 对于这个问题, 这里不拟从数学上给予一般的解答, 我们只指出: 上述条件的物理意义是: “准声”场的相关尺度比弹性边界的尺度和弯曲波波长小得多。把这一点同熟知的声学点源条件对照一下, 就不难理解, 在上述条件下, “准声”场具有点源分布力场的性质, 是很自然的。

基于上述讨论, 我们认为, 在水动力噪声有关计算中, 把式(34)作为“准声”广义力的普适表达式是适当的。因此, 水湍流附面层的实验研究, 应当测量出较为完整的 K, θ 数据, 这比进一步精确测定相关函数的形式更有实用价值。

最后, 顺便作两点说明: 1) 本文所采用的方法也可以用来估计湍流附面层通过弹性板产生的声场。对于板面上的声场, 这只要把函数 $\Phi_{mn} \Phi_{mn}^*$ 中的 $M^2 [\omega_{mn}^{(0)}]^4$ [见(12)] 改为 $\frac{1}{\lambda^2 x^4}$ 即可。2) 对一些典型的介质和材料, C_j, d_j, A_j 与 $k_{mn} h$ 的关系, 将在另文给出数值结果。

符 号 表

$\mathbf{r}(x, y)$ 板的平面坐标

$\mathbf{R}(x, y, z)$ 空间坐标

t 时间

$\tau = t' - t$ 延迟时间

x 纵向坐标(沿流动方向)

∇_2^4 双重二维拉普拉斯算符

∇^2 三维拉普拉斯算符

k 波数

ω 频率

C_0 介质中声速

ρ_0 介质密度

ρ_s 板材料的密度

M 板单位面积质量

B 板的弯曲劲度

L 板的边长

h 板的厚度

p_q “准声”压力

$p(\mathbf{R}, t)$ 介质中声压

$p_0(\mathbf{r}, t)$ 板面上声压

$v_0(v)$ 湍流涡旋对流速度或自由流速度

$\theta_0(\theta)$ 湍流涡旋的衰减时间

K 湍流涡旋的波数 $\left(\frac{\pi}{K} \text{ 尺度}\right)$

参 考 文 献

- [1] Dyer I., *J. Acoust. Soc. Am.*, **31** (1959), 922.
- [2] Kraichnan R. H., *J. Acoust. Soc. Am.*, **29** (1957), 65.
- [3] Powell A., *Random Vibration*, 189.
- [4] Lyon R. H., *J. Acoust. Soc. Am.*, **28** (1956), 391.
- [5] Kraichnan R. H., *J. Acoust. Soc. Am.*, **28** (1956), 64.
- [6] Kraichnan R. H., *J. Acoust. Soc. Am.*, **28** (1956), 378.
- [7] Tack D. H., Smith M. W., Lambert R. F., *J. Acoust. Soc. Am.*, **33** (1961), 410.

ON THE RANDOM VIBRATION OF ELASTIC PLATE

HUANG ZENG-YANG

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

In this paper, the random vibration of elastic plate submerged in water is discussed with the method of Fourier transform and expansion in eigenfunctions. The reaction of the medium to the vibrating plate was strictly investigated under the condition that the interaction between the different modes had been excluded. The range in which the Dirac δ function might be used to describe the correlation function of quasi-sound field in turbulent boundary layer was determined based on the experimental results in the last years.