

水下声道中的反转点会聚区(I)简正波理论*

张 仁 和

(中国科学院声学研究所)

本文用简正波方法讨论水下声道中反转点会聚区的声场。理论分析表明,反转点会聚区声场由大量的简正波同相叠加而成。在一定条件下,反转点会聚区的声强按 r^{-2} 衰减,会聚增益与会聚区号数无关,会聚区宽度与会聚区号数成正比,这些理论结果与 Hale 的实验一致。

在双直线声道情况下,会聚增益为

$$F = 4.1 \times a_1^{1/3} k_0^{2/3} (h_0 - z)$$

此处 a_1 是相对声速梯度, k_0 是波数, $(h_0 - z)$ 是声源至声道轴的距离。

应用反转点会聚区的理论来分析水池模拟实验的结果,计算得到的表面声道中会聚区的位置、会聚增益以及会聚区宽度与实验结果一致。

一、引 言

大洋中存在着比较稳定的水下声道,它具有十分良好的声传播性能,1 公斤炸药产生的爆炸声可以在几千公里之外收听到^[1]。声波在水下声道中传播时出现会聚的现象已为人们所熟知。Hale^[2] 较早地在海上实验中观测到很强的会聚效应,每隔 35 哩出现一个会聚区,会聚区声强比按球面扩展计算的声强可高达 25 公贝。Urick^[3] 利用声线图分析过会聚区的几何特征。如图 1 所示,从声源 0 点发出的声线在 $r-z$ 平面上形成许多散焦线,在声源处以水平方

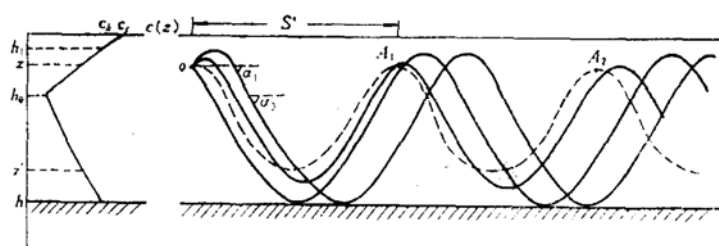


图1 水下声道中的声线

Rays in underwater sound channel

向出射的声线每隔一定的距离 S^* 重新返回声源深度,即图 1 上的 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 点,这些点是声线的反转点。在反转点附近一般有三条散焦线汇集,其中两条散焦线在反转点与水平面相切;因此在反转点附近声能特别集中,形成高强度的反转点会聚区。

按照经典的射线理论,分层介质中点源的声强为^[4]

* 1979 年 5 月 24 日收到。

$$I = \frac{I_0 \cos \alpha_1}{r \sin \alpha_p \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \right)} \quad (1)$$

式中 I_0 是单位距离上的声强, α_1 是声线在源点的掠角, α_p 是声线在接收点的掠角. 在散焦线上 $(\partial r / \partial \alpha_1) = 0$, 公式 (1) 变为无穷大, 因此经典的射线理论不能计算散焦线及其邻域的声场. Бреховских 基于波动理论讨论了散焦线及其邻域的声场, 他给出的散焦线上的声强为^[4]

$$I = \frac{I_0 2^{5/3} \cos \alpha_1 (k_1 \sin \alpha_1)^{1/3} A_i^2(0)}{r \sin \alpha_p} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha_1^2} \right)^{-2/3} \quad (2)$$

式中 $A_i(0) = 0.6293$. 正如 Бреховских 所指出的, 上述公式只适用于离反转点足够远的区域. 在反转点附近由于 $\alpha_p \rightarrow 0$, 公式 (2) 趋于无穷大. 文 [5] 对抛物型声速断面这一特殊情况讨论了声道轴附近的聚焦现象, 然而, 这种声速断面与实际情况相差甚远, 所得的结果具有局限性. 综上所述, 反转点会聚区声场还是一个没有很好解决的理论问题.

本文从声场的简正波表式出发, 利用一维波动方程的广义相积分近似解, 计算了反转点会聚区的声场, 得到了会聚增益的解析表式.

二、水下声道中的波导简正波

为确定起见, 我们讨论图 1 所示的水下声道模型. 设海面附近声速大于海底附近声速 ($c_s > c_b$), 波导区位于深度 h_1 与 h 之间. 对于足够高的频率, 波导区的声场主要由水中反转的简正波决定, 本文着重讨论这部分简正波所形成的反转点会聚区.

简谐点源的简正波声场为

$$P(z_1, z, r) = \sqrt{8\pi/r} e^{i\pi/4} \sum_l \Psi(z_1, \nu_l) \Psi(z, \nu_l) \sqrt{\nu_l} e^{i\nu_l r} \quad (3)$$

式中 z_1 与 z 为发射与接收深度, r 是水平距离, ν_l 是简正波频散方程的根, $\Psi(z, \nu_l)$ 是简正波的振幅函数. 简正波频散方程的根 ν_l 一般是复数 $\nu_l = \mu_l + \beta_l$. 但对于水中反转的简正波, 当反转深度 η_l 与 ζ_l 分别离海面与海底足够远并满足条件

$$\int_0^{\eta_l} \sqrt{\mu_l^2 - k^2(z)} dz > 1 \quad \text{与} \quad \int_{\zeta_l}^h \sqrt{\mu_l^2 - k^2(z)} dz > 1 \quad (4)$$

时根的虚部 β_l 很小, 这时 ν_l 由下列方程确定:

$$\int_{\eta_l}^{\zeta_l} \sqrt{k^2(z) - \nu_l^2} dz = (l + 1/2)\pi, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L \quad (5)$$

上式中 $k(z) = \omega/c(z)$, η_l 与 ζ_l 分别表示简正波在声道轴以上与下的反转深度, 它们由 $k(\eta_l) = k(\zeta_l) = \nu_l$ 确定.

类似于文献 [6] 的方法可得到简正波的振幅函数. 对于水中反转的简正波, 其振幅函数为

$$\Psi(z, \nu_l) = \sqrt{\frac{2}{S_l}} \times \begin{cases} \frac{\text{sh}(f_0^z) e^{-f_0^{\eta_l}}}{[\nu_l^2 - k^2(z)]^{1/4}} & 0 \leq z < \eta_l \\ d^{-1/6} [A_l(z) - 1/2 e^{-2\int_0^{\eta_l} B_l(z)}] & z \approx \eta_l \\ \sin\left(\int_{\eta_l}^z + \pi/4 - \theta_l\right) & \eta_l < z < \zeta_l \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} (-1)^l b^{-1/b} \left[A_l(\tau) + V(v_l)/2 \cdot e^{-\int_{\zeta_l}^h B_l(\tau)} \right] & z \approx \zeta_l \\ \frac{(-1)^l}{2[v_l^2 - k^2(z)]^{1/4}} \left[e^{-\int_{\zeta_l}^z} + V(v_l) e^{-\int_{\zeta_l}^h + \int_{\zeta_l}^z} \right] & \zeta_l < z \leq h \end{cases}$$

上式中

$$t \equiv -\left(\frac{3}{2} \int_{\eta_l}^z \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy\right)^{2/3}, \quad \tau \equiv -\left(\frac{3}{2} \int_z^{\zeta_l} \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy\right)^{2/3} \quad (7)$$

$$d \equiv \left. \frac{dk^2(z)}{dz} \right|_{\eta_l}, \quad b \equiv -\left. \frac{dk^2(z)}{dz} \right|_{\zeta_l} \quad (8)$$

$$\theta_l \cong \arctan\left(\frac{1}{2} e^{-2\int_0^{\eta_l}}\right) \quad (9)$$

$$S_l \equiv 2 \int_{\eta_l}^{\zeta_l} \frac{v_l dz}{\sqrt{k^2(z) - v_l^2}} \quad (10)$$

为了书写简便,在公式(6)中引用了简化符号:

$$\int_0^{\eta_l} \equiv \int_0^{\eta_l} \sqrt{v_l^2 - k^2(y)} dy, \quad \int_{\eta_l}^z \equiv \int_{\eta_l}^z \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy \quad (11)$$

公式(6)中 $A_l(t)$ 与 $B_l(t)$ 表示艾里函数,它们与贝塞尔函数的关系为

$$A_l(t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{3} [I_{-\frac{1}{3}}(t) - I_{\frac{1}{3}}(t)] \quad (12)$$

$$B_l(t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{3} [I_{-\frac{1}{3}}(t) + I_{\frac{1}{3}}(t)] \quad (13)$$

当满足条件(4)时简正波的振幅函数(6)可进一步简化为

$$\Psi(z, v_l) \cong \sqrt{\frac{2}{S_l}} \times \begin{cases} \frac{\exp\left(-\int_z^{\eta_l}\right)}{2[v_l^2 - k^2(z)]^{1/4}} & 0 < z < \eta_l \\ d^{-1/6} A_l(t) & z \approx \eta_l \\ \frac{\sin\left(\int_{\eta_l}^z + \pi/4\right)}{[k^2(z) - v_l^2]^{1/4}} & \eta_l < z < \zeta_l \\ (-1)^l b^{-1/6} A_l(\tau) & z \approx \zeta_l \\ \frac{(-1)^l \exp\left(-\int_{\zeta_l}^z\right)}{2[v_l^2 - k^2(z)]^{1/4}} & \zeta_l < z < h \end{cases} \quad (14)$$

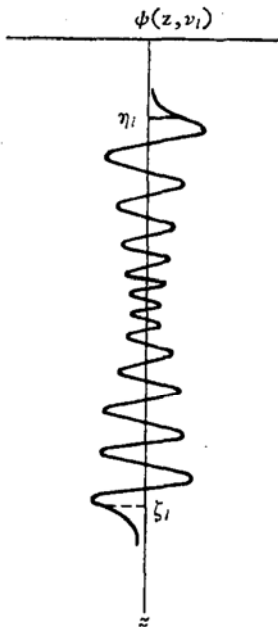


图2 水下声道中波导简正波的振幅函数

Amplitude function (sound pressure versus depth) for the wave-guide mode in underwater sound channel.

表式(14)实际上是无界声道中的简正波振幅函数^[7]。上述分析表明,当简正波的反转深度离边界足够远时其振幅函数与无界声道相似。简正波振幅函数的形状如图2所示,在反转深度之外($z < \eta_l$ 与 $z > \zeta_l$)是指数减小的函数,在反转深度之间($\eta_l < z < \zeta_l$)是

振荡的函数,在反转深度附近取最大值。

在反转深度附近 $k^2(z)$ 取线性近似

$$z \approx \eta_l, \quad k^2(z) - v_l^2 = d \cdot (z - \eta_l) \quad (15)$$

于是

$$z \approx \eta_l, \quad t = d^{1/3}(\eta_l - z) = d^{-2/3}[v_l^2 - k^2(z)] \quad (16)$$

简正波振幅函数 (14) 在反转深度附近用艾里函数表示, 离反转深度足够远就是经典的 W. K. B 近似。为了计算反转点会聚区的声场, 利用附录中给出的艾里函数近似表式可以对振幅函数作进一步简化。利用公式 (16) 与附录的公式 (66) 可以将声道轴以上 ($0 < z < h_0$) 的振幅函数 (14) 表为

$$\Psi(z, v_l) \cong \sqrt{\frac{2}{S_l}} \times \begin{cases} \frac{\exp\left(-\int_z^{\eta_l} \sqrt{v_l^2 - k^2(y)} dy\right)}{\sqrt{2} \{Bd^{4/3} - Dd^{2/3}[k^2(z) - v_l^2] + 16[k^2(z) - v_l^2]^2\}^{1/8}} & 0 < z < \eta_l \\ \frac{\sin\left(\int_{\eta_l}^z \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy + \pi/4\right)}{\{Bd^{4/3} - Dd^{2/3}[k^2(z) - v_l^2] + [k^2(z) - v_l^2]^2\}^{1/8}} & \eta_l \leq z < h_0 \end{cases} \quad (17)$$

式中 $B = 2.152$, $D = 1.619$ 。公式 (17) 是一种广义的相积分近似, 其形式简单并具有一定的精度, 它在反转深度附近逼近于艾里函数, 离反转深度足够远就退化为经典的 W. K. B 近似。如要求更高的精度, 则可利用更复杂的逼近函数 (例如附录中的 (64) 与 (65) 式)。

三、反转点会聚区声场

我们仅讨论声道轴之上的反转点会聚区。设发射与接收深度相等并位于声道轴之上的波导区域内, 即 $h_1 < z_1 = z < h_0$ 。这时公式 (1) 变为

$$P(z, z, r) = \sqrt{8\pi/r} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{l=0}^L \sqrt{v_l} \Psi^2(z, v_l) e^{i v_l r}. \quad (18)$$

对给定的深度 z , 存在着某一号数 l^* , 该号简正波的反转深度 η_{l^*} 最接近 z , 即 $\eta_{l^*} \cong z$ 。号数 l^* 由下式确定:

$$l^* = \left[1/\pi \int_z^{z'} \sqrt{k^2(y) - k^2(z)} dy - 1/2 \right]_{\text{整数}}, \quad (19)$$

此处 z' 是在声道轴之下与深度 z 的声速相同的深度 (见图 1), 即 $c(z') = c(z)$ 。相应于第 l^* 号简正波的 v_{l^*} 值与跨度 S_{l^*} 值为

$$v_{l^*} = k(\eta_{l^*}) \cong k(z) \quad (20)$$

$$S_{l^*} \cong 2 \int_z^{z'} \frac{k(z) dy}{\sqrt{k^2(y) - k^2(z)}} = S^* \quad (21)$$

此处 S^* 就是在深度 z 出现第一个反转点会聚区的距离 (图 1 中的 A_1 点)。

不难看出, 号数 l 小于 l^* 的简正波其反转深度 η_l 大于 z , 号数 l 大于 l^* 的简正波其反转深度 η_l 小于 z 。将广义相积分近似 (17) 代入 (18), 经适当运算后得到

$$P(z, z, r) = P_1(z, z, r) + P_2(z, z, r) \quad (22)$$

$$P_1(z, z, r) = \sqrt{8\pi/r} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{l=0}^L \frac{\sqrt{v_l}}{S_l} G(z, l) e^{i v_l r} \quad (23)$$

$$P_2(z, z, r) = \sqrt{8\pi/r} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{l=l^*}^L \frac{\sqrt{v_l}}{S_l} G(z, l) \sin\left(2 \int_{\eta_l}^z \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy\right) e^{i v_l r} \quad (24)$$

上述公式中

$$G(z, l) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-2 \int_z^{\eta_l} \sqrt{v_l^2 - k^2(y)} dy\right)}{\{B d^{4/3} - D d^{2/3} [k^2(z) - v_l^2] + 16 [k^2(z) - v_l^2]^2\}^{1/4}} & l < l^* \\ \frac{1}{\{B d^{4/3} - D d^{2/3} [k^2(z) - v_l^2] + [k^2(z) - v_l^2]^2\}^{1/4}} & l \geq l^* \end{cases} \quad (25)$$

为了计算反转点会聚区的声场,令 $r = nS^* + x$, 分别讨论 P_1 与 P_2 . 我们将 v_l 视为 l 的连续函数,在 l^* 附近展开为泰勒级数

$$v_l = v_{l^*} + \dot{v}_{l^*}(l - l^*) + \frac{1}{2} \ddot{v}_{l^*}(l - l^*)^2 + \dots \quad (26)$$

由方程 (5) 对 l 求微商得到

$$\dot{v}_l \equiv dv_l/dl = -2\pi/S_l \quad (27)$$

将 (26) 与 (27) 代入 (23), 得

$$P_1(z, z, nS^* + x) = \sqrt{\frac{8\pi}{nS^* + x}} e^{i v_{l^*}(nS^* + x) + i\frac{\pi}{4}} \sum_{l=0}^L \frac{\sqrt{v_l}}{S_l} G(z, l) \exp \left[i \dot{v}_{l^*} x (l - l^*) + \frac{i}{2} \ddot{v}_{l^*} (nS^* + x) (l - l^*)^2 \right] \quad (28)$$

当满足条件

$$|\dot{v}_{l^*} x| \ll 1 \text{ 与 } |\ddot{v}_{l^*} nS^*| \ll 1 \quad (29)$$

时,级数 (28) 相邻项的相位变化很小,可用积分代替求和

$$P_1(z, z, nS^* + x) \cong \sqrt{\frac{8\pi}{nS^*}} e^{i v_{l^*}(nS^* + x) + i\frac{\pi}{4}} \int_0^L \frac{\sqrt{v_l}}{S_l} G(z, l) \exp \left[i \dot{v}_{l^*} x (l - l^*) + \frac{i}{2} \ddot{v}_{l^*} nS^* (l - l^*)^2 \right] dl \quad (30)$$

应用稳相法可以计算积分 (30) 的渐近值. 稳相点为

$$\tilde{l} = l^* - \frac{\dot{v}_{l^*} x}{\ddot{v}_{l^*} nS^*} = l^* + \frac{2\pi x}{\dot{v}_{l^*} n(S^*)^2} \quad (31)$$

计算得到

$$P_1(z, z, nS^* + x) \cong \frac{4\pi i}{n(S^*)^2} \sqrt{\frac{v_{l^*}}{\ddot{v}_{l^*}}} G(z, \tilde{l}) e^{i v_{l^*}(nS^* + x) + \frac{i}{2} \dot{v}_{l^*} x (\tilde{l} - l^*)} \quad (32)$$

我们来说明上述计算过程的物理意义. 在反转点会聚区 ($r = nS^* + x$), 由于 $\dot{v}_{l^*} nS^* = -2n\pi$, 当满足条件 (29) 时在 $l = \tilde{l}$ 附近的许多简正波发生同相叠加. 同相叠加的简正波的有效数目 l_e 决定于泰勒展开式 (26) 的高阶项, 近似地有

$$l_e \cong \sqrt{2\pi/\ddot{v}_{l^*} nS^*} \quad (33)$$

此外,在反转点附近 ($r \cong nS^*$) 稳相点 $\tilde{l} \cong l^*$, 这时 $G(z, \tilde{l})$ 具有较大的值. 因此, 反转点附近的声场包含着大量的、具有较大振幅的简正波同相叠加.

对公式 (24) 的 P_2 可作类似的讨论. 为简略起见, 这里仅指出 P_2 是反转点会聚区声场的

次要成份。由于 (24) 含有振荡的正弦函数 $\sin\left(2 \int_{\eta_l}^x \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy\right)$, 使 $|P_2|$ 的贡献减小; 频率越高, 正弦函数的宗量变化越快, $|P_2|$ 的值越小。令

$$\delta(l) \equiv 2 \int_{\eta_l}^x \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy \quad (34)$$

有

$$\delta(l^*) = 0, \quad \delta(l^* + l_e) \cong \frac{4}{3d} \left[\frac{4\pi k(z) l_e}{S^*} \right]^{3/2} \quad (35)$$

当 $\delta(l^* + l_e) < 1$ 时我们称为低频情况, 这时

$$P_2(z, z, nS^* + x) \cong P_1(z, z, nS^* + x) \times \sin\left(2 \int_{\eta_l}^x \sqrt{k^2(y) - v_l^2} dy\right)_{\tilde{l}}. \quad (36)$$

当 $\delta(l^* + l_e) \gg 1$ 时称为高频情况, 这时

$$|P_2(z, z, nS^* + x)| \ll |P_1(z, z, nS^* + x)|. \quad (37)$$

许多实际问题都属于高频情况。

对于高频情况, 反转点会聚区的声强可表为 (不计常数因子 $1/2\rho c$)

$$I(z, z, nS^* + x) \cong |P_1(z, z, nS^* + x)|^2 = \frac{16\pi^2 k(z)}{n^2 (S^*)^4 |\ddot{v}_l^*|} G^2(z, \tilde{l}) \quad (38)$$

为了便于计算, 我们简化 $G^2(z, \tilde{l})$ 的表式。令

$$T \equiv -d^{-2/3} [k^2(z) - (v_l^*)^2]. \quad (39)$$

由于 $v_l^* \cong k(z)$, 因此

$$k^2(z) - (v_l^*)^2 \cong (v_l^*)^2 - (v_l)^2 = 2v_l^* \dot{v}_l^* (l^* - \tilde{l}) \quad (40)$$

将 (40) 代入 (39) 并利用 (31) 得

$$T = -(Q/n)x \quad (41)$$

其中

$$Q = 8\pi^2 k(z) / [(S^*)^3 \ddot{v}_l^* d^{2/3}] \quad (42)$$

此外, 利用 $k^2(y) \cong k^2(z) + d \cdot (y - z)$ 得

$$\begin{aligned} \int_x^{\eta_l} \sqrt{(v_l^*)^2 - k^2(y)} dy &\cong \frac{2}{3d} \left[(v_l^*)^2 \right. \\ &\left. - k^2(z) \right]^{3/2} = \frac{2}{3} T^{3/2} \end{aligned} \quad (43)$$

将 (41) 与 (43) 代入 (25) 得

$$G^2(z, \tilde{l}) = d^{-2/3} K(T) \quad (44)$$

其中

$$K(T) = \begin{cases} 1/[B + DT + T^2]^{1/2} & T \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{8}{3} T^{3/2}\right) / [B + DT + 16T^2]^{1/2} & T > 0 \end{cases} \quad (45)$$

函数 $K(T)$ 的形状如图 3 所示。

将 (44) 代入 (38), 得到反转点会聚区声强的简明表式:

$$I(z, z, r) \cong 2|Q|S^*K(T)/r^2 \quad (46)$$

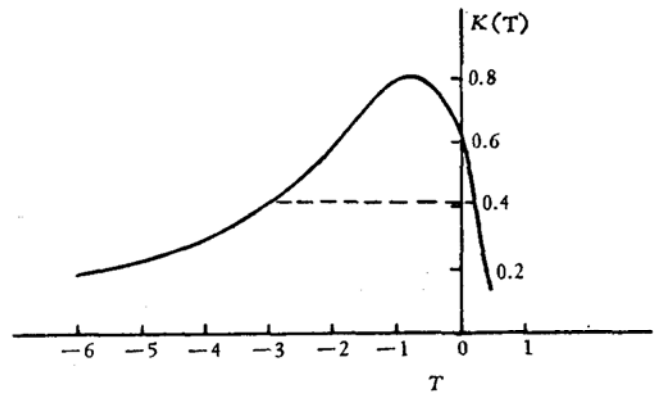


图 3 函数 $K(T)$ 的形状, 它控制反转点会聚区声强随距离的变化

Shape of the function $K(T)$, which controls the sound intensity versus range at turning-point convergence-zone.

式中 $r = nS^* + x$, $(x/nS^*) \ll 1$.

从公式(46)看出,在反转点附近声强随距离的变化主要由 $K(T)$ 所控制. 当 $T = -0.8$ 时 $K(T)$ 取极大值,因此反转点会聚区声强的峰值位于

$$r_n = n(S^* + 0.8/Q) \quad (47)$$

(47)式说明会聚区峰值不正好在反转点上,偏离反转点的距离为 $0.8n/Q$.

会聚增益 F 定义为会聚区声强的峰值与按球面扩展计算的声强之比. 由于 $K(-0.8) = 0.817$, 因此会聚增益为

$$F = 1.63|Q|S^* \quad (48)$$

F 的分贝数 $10\log F$ 有时也称为会聚增益.

我们将会聚区的有效宽度定义为会聚区声强由峰值下降一半的距离范围. 从函数 $K(T)$ 可知, $K(T)$ 由峰值下降一半的宽度为

$$\Delta T \cong 3.2 \quad (49)$$

因此,按照公式(41),第 n 个反转点会聚区的有效宽度为

$$\Delta x_n = (n/|Q|)\Delta T = 3.2n/|Q| \quad (50)$$

从公式(46), (48) 与 (50) 看出, 反转点会聚区声强按 r^{-2} 衰减, 会聚增益与会聚区号数无关, 会聚区有效宽度与号数 n 成正比, 这些结果与 Hale^[2] 的实验一致. 但应指出, 当 n 足够大时条件(29)逐渐地不满足, 相邻简正波之间的相位差增大, 会聚效应逐渐降低, 会聚区逐渐地变得模糊起来.

利用简正波折射线的概念^[6], 可以借助于射线公式来计算 $\ddot{v}_1^*$. 容易证明,

$$\ddot{v}_1^* = \frac{4\pi^2}{(S^*)^3 k_0 \sin \alpha_0^*} \left. \frac{dS}{d\alpha_0} \right|_{\alpha_0^*} \quad (51)$$

此处 $S(\alpha_0)$ 是声线的跨度, α_0 是声线在声道轴的掠角, α_0^* 是从声源以水平方向出射的声线在声道轴的掠角. 将(51)代入(42)得

$$Q = \frac{2k(z)k_0 \sin \alpha_0^*}{d^{2/3} \left(\frac{dS}{d\alpha_0} \right)_{\alpha_0^*}} \quad (52)$$

例如, 对于双直线型声道 $k(z)$ 为

$$k(z) = \begin{cases} k_0[1 - a_1(h_0 - z)] & z < h_0 \\ k_0[1 - a_2(z - h_0)] & z > h_0 \end{cases} \quad (53)$$

计算得到会聚增益

$$F = 4.1 \times a_1^{1/3} k_0^{2/3} (h_0 - z). \quad (54)$$

最后, 我们还指出对发射与接收深度的要求. 根据同相叠加的简正波数目 l_e 可以算出这些简正波反转深度 η_l 的范围 ($z - \Delta z < \eta_l < z + \Delta z$), 不难得到

$$\Delta z = \frac{1}{a(z)} \left[\frac{\pi \sin \alpha_0^*}{2nk_0 \left| \frac{dS}{d\alpha_0} \right|_{\alpha_0^*}} \right]^{1/2} \quad (55)$$

再考虑到条件(4), 我们要求发射与接收深度离海面的距离大于 $[\Delta z + (3/2)^{2/3} d^{-1/3}]$.

四、表面声道模拟实验结果的分析

表面声道可视为水下声道的一种特殊情况, 它相当于声道轴位于海表面。前面的理论可应用于表面声道, 这时公式 (51) 与 (52) 中的 α_0 应当是声线在海面的掠角, α_0^* 是反转声线在海面的掠角 (见图 4)。下面我们来分析表面声道模拟实验的结果。

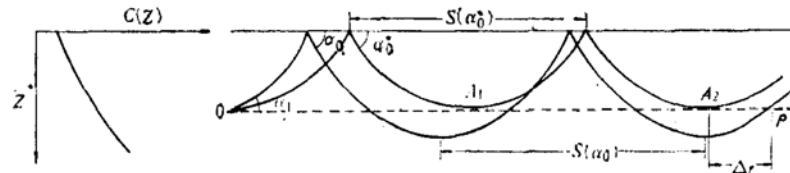


图 4 表面声道中的声线图
Rays in surface sound channel

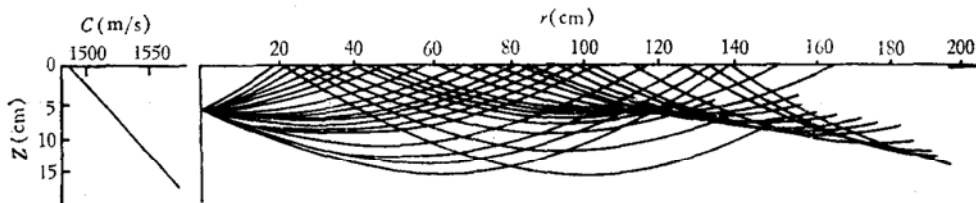


图 5 第一类表面声道的声线图

Ray diagram for the first type of surface sound channel, $c(z) = c_0(1 - bz)^{-1/2}$.

文献 [9] 在长 3 米、宽 0.5 米、高 0.5 米的消声水池中用溶液扩散的方法形成正声速梯度, 使用填充频率 480 千赫的脉冲进行了表面声道模拟实验。实验研究了两种类型的表面声道。

1. 第一种情况, 声速分布为

$$c(z) = c_0(1 - bz)^{-1/2} \quad (56)$$

其中 $c_0 = 1.4845 \times 10^5$ 厘米/秒, $b = 7.98 \times 10^{-3}$ /厘米。声源与接收器位于同一深度, $z_1 = z = 6$ 厘米。声速分布及其相应的声线图如图 5 所示。从图 5 看出, 在反转点 ($z = 6$ 厘米, $r = 107$ 厘米) 附近声线特别集中, 形成反转点会聚区。图 6 是测量得到的声强-距离关系曲线, 图上圆点为实验值, 直线代表球面衰减规律。从图 6 看出, 在比较近的距离 ($r < 50$ 厘米) 声强按球面扩展规律下降, 在距离 114 厘米出现第一会聚区的峰值, 峰值比球面衰减直线高 13.5 分贝。若将声强从峰值下降 3 分贝的距离范围定义为会聚区宽度, 则从实验曲线得到的会聚区宽度为 18 厘米。

对于声速分布 (56), 由声线公式不难得到

$$S(\alpha_0) = 2 \sin(2\alpha_0)/b \quad (57)$$

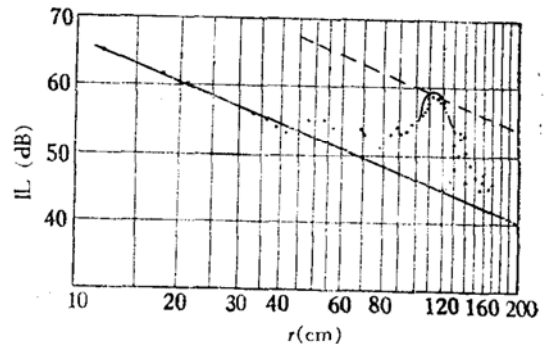


图 6 由模拟实验得到的第一类表面声道的传播衰减
Transmission loss for the first type of surface sound channel obtained by model experiment the first turning-point convergence-zone occurs at distance 114cm, convergence-gain is of 13.5dB.

反转声线在海面的掠角 α_0^* 由下式确定

$$\cos \alpha_0^* = c_0/c(z_1) \quad (58)$$

此处 z_1 是声源深度。将 (56) 代入 (58) 得到 $\alpha_0^* = 0.2188$, 再由 (57) 得 $S^* = S(\alpha_0^*) = 107.0$ 厘米, $\left(\frac{dS}{d\alpha_0}\right)_{\alpha_0^*} = 453.2$ 厘米。将这些数据代入 (52) 得 $Q = 0.173$, 然后由 (47), (48) 与 (50) 得

$$\text{峰值距离} \quad r_n = 111.7 \times n \text{ 厘米}$$

$$\text{会聚增益} \quad 10 \log F = 14.8 \text{ 分贝}$$

$$\text{会聚区宽度} \quad \Delta x_n = 18.5 \times n \text{ 厘米}$$

对于第一会聚区, 理论计算与实验结果对比如下:

第一会聚区的峰值距离、会聚增益与会聚区宽度

Distance of peak, convergence-gain and width of the first zone

	峰值距离 (cm) (Distance)	会聚增益 (dB) (Gain)	会聚区宽度 (cm) (Width)
理论 (Theoretical)	111.7	14.8	18.5
实验 (Experimental)	114	13.5	18

我们还用公式 (46) 计算了第一会聚区的声强曲线, 计算结果用实线画在图 6 上, 计算与实验值符合较好。

2. 第二种情况, 声速分布为

$$c(z) = c_0(1 - b_2 z - b_1 z^2)^{-1/2} \quad (59)$$

其中 $c_0 = 1.475 \times 10^5$ 厘米/秒, $b_1 = 7.0 \times 10^{-4}$ /厘米², $b_2 = 1.8 \times 10^{-3}$ /厘米。声源与接收器皆位于深度 5 厘米, 声速分布及其相应的声线图如图 7 所示。从图 7 看出, 在反转点 ($z = 5$ 厘米, $r = 101.7, 203.4$ 厘米) 附近声线发生会聚, 形成反转点会聚区。图 8 是测量得到的声强—距离曲线, 图中圆点为实验值, 直线代表球面衰减规律。从图 8 看出, 在距离 101 厘米出现第一会聚区的峰值, 它比球面衰减直线高 16 分贝, 第一会聚区的宽度约为 7 厘米; 在距离 202 厘米出现第二会聚区的峰值, 它比球面衰减直线高 17 分贝, 第二会聚区的宽度约为 11 厘米。

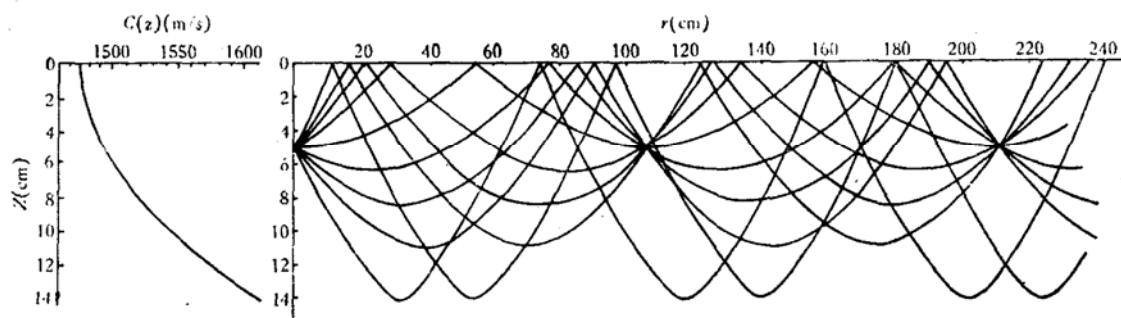


图 7 第二类表面声道的声线图

Ray diagram for the second type of surface sound channel, $c(z) = c_0(1 - b_2 z - b_1 z^2)^{-1/2}$.

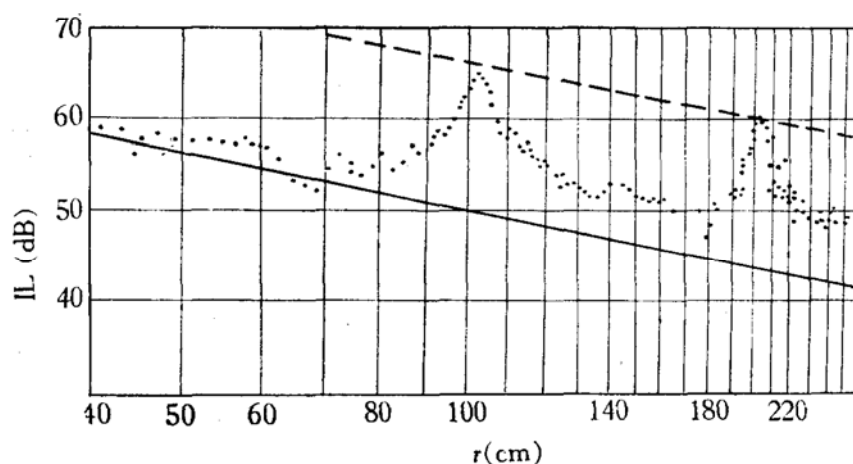


图 8 由模拟实验得到的第二类表面声道的传播衰减

Transmission loss for the second type of surface sound channel obtained by model experiment the first and second turning-point convergence-zones occur at distances 101 and 202 cm, convergence-gains are of 16.0 and 17.0 dB.

对于声速分布 (59), 由声线公式计算得到

$$S(\alpha_0) = \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{b_1}} \left[\pi - 2 \arcsin \left(\frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + 4b_1 \sin^2 \alpha_0}} \right) \right] \quad (60)$$

类似于第一种情况的计算步骤得到: $\alpha_0^* = 0.1635$, $S^* = 101.7$ 厘米, $(dS/d\alpha_0)_{\alpha_0^*} = -106.7$ 厘米, $Q = -0.518$ 以及

峰值距离 $r_n = 100.2 \times n$ 厘米

会聚增益 $10 \log F = 19.3$ 分贝

会聚区宽度 $\Delta x_n = 6.1 \times n$ 厘米

对于第一、二会聚区, 理论计算与实验结果比较如下:

第一、二会聚区的峰值距离、会聚增益与会聚区宽度

Distances of peak, convergence-gains and widths of the first and second zone

	峰值距离 (cm) (Distance)		会聚增益 (dB) (Gain)		会聚区宽度 (cm) (Width)	
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$
理 论 (Theoretical)	100.2	200.4	19.3	19.3	6.1	12.2
实 验 (Experimental)	101●	202	16.0	17.0	7	11

对上述两种类型的表面声道所作的分析表明, 理论计算的会聚区位置、会聚增益以及会聚区的宽度皆与实验结果较好地符合, 初步检验了反转点会聚区理论的正确性。

孙庚辰同志完成了本文的部分计算工作, 曹念甫同志提供了实验数据并做过有益的讨论, 著者谨向他们表示深切的谢意。

附录: 艾里函数的广义相积分近似

艾里函数 $A_i(t)$ 具有渐近行为

$$A_i(t) \approx \begin{cases} \frac{\sin \left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right]}{(-t)^{1/4}} & t < 0 \\ \frac{\exp \left(-\frac{2}{3}t^{3/2} \right)}{2t^{1/4}} & t > 0 \end{cases} \quad (61)$$

渐近式 (61) 相当于经典的 W. K. B 近似 (相积分近似), 当 $|t| \gg 1$ 时它具有很高的精度. $t = 0$ 相当于反转点, 渐近式 (61) 在反转点发散. 图 9 中给出了艾里函数 $A_i(t)$ 的形状, 它类似于一个具有振幅与相位调制的信号, 渐近式 (61) 实际上已给出了 $|t| \gg 1$ 时信号的包络与相位. 为了给出整个区间 (包括 $t \approx 0$) 上的包络与相位, 我们将艾里函数表为如下形式:

$$t \leq 0, \quad A_i(t) = A(t) \sin \left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} - \phi(t) \right]. \quad (62)$$

可以用数值逼近方法寻找适当的逼近函数 $A(t)$ 与 $\phi(t)$, 使 (62) 具有所需的精度.

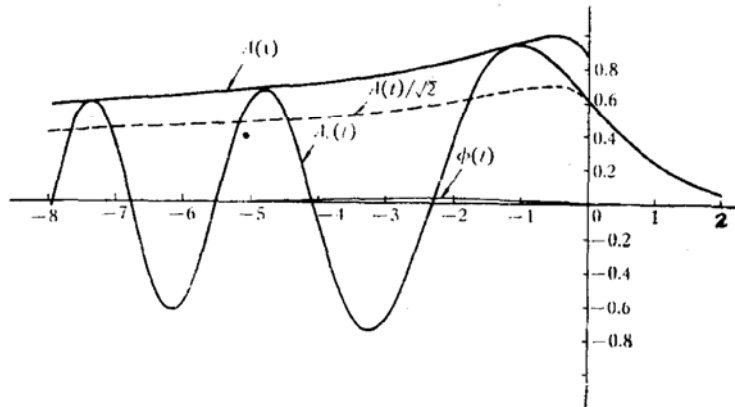


图 9 艾里函数 $A_i(t)$ 的包络 $A(t)$ 与相位 $\phi(t)$

Envelope $A(t)$ and phase $\phi(t)$ of Airy Function $A_i(t)$ $A(t)$ is given by the expression (65), $\phi(t)$ is given by the expression (64)

我们按照下列要求寻找 $A(t)$ 与 $\phi(t)$ 的近似表式:

(a) $A(t)$ 与 $\phi(t)$ 是比较平滑地变化的函数, 以便于用稳相法来计算含有 $A_i(t)$ 的积分;

(b) 当 $t \rightarrow -\infty$ 时 $A(t)$ 与 $\phi(t)$ 趋于相应的渐近式^[8]

$$A(t) \approx 1/(-t)^{1/4}, \quad \phi(t) \approx 0.10416/(-t)^{3/2} \quad (63)$$

(c) 当 $t = 0$ 时 $\phi(0) = 0$ 以及 $A(0) = \sqrt{2} A_i(0)$, 使得振荡区 ($t < 0$) 包络函数的有效值 $A(t)/\sqrt{2}$ 与非振荡区 ($t > 0$) 的艾里函数 $A_i(t)$ 相连接 (见图 9);

(d) 函数 $\phi(t)$ 使得 (62) 中正弦函数的零点 t_m (即 $\frac{2}{3}(-t_m)^{3/2} + \frac{\pi}{4} - \phi(t_m) = m\pi$) 与艾里函数 $A_i(t)$ 的零点一致.

形如 (62) 的近似表式我们称为艾里函数的广义相积分近似, 根据所需要的精度可求出不同形式的逼近函数 $A(t)$ 与 $\phi(t)$. 作为例子, 这里给出两种数值逼近函数.

1. $A(t)$ 与 $\phi(t)$ 由下列函数给出:

表 1 按公式 (64) 与 (65) 计算的 $\phi(t)$ 与 $A(t)$
 Calculated $\phi(t)$ and $A(t)$ by the expressions (64) and (65)

t	$A(t)$	$\phi(t)$	公式 (56)	$A_i(t)$	偏差
0.0	0.88992	0.00000	0.62927	0.62927	0.00000
-0.2	0.96344	0.00082	0.72012	0.72012	0.00000
-0.4	0.98904	0.00304	0.80509	0.80509	0.00000
-0.6	0.98981	0.00632	0.87710	0.87710	0.00000
-0.8	0.97721	0.01031	0.92801	0.92801	0.00000
-1.0	0.95776	0.01466	0.94926	0.94926	0.00000
-1.2	0.93507	0.01903	0.93266	0.93266	0.00000
-1.4	0.91111	0.02306	0.87152	0.87152	0.00000
-1.6	0.88694	0.02642	0.76191	0.76191	0.00000
-1.8	0.86334	0.02874	0.60407	0.60398	0.00009
-2.0	0.84089	0.02969	0.40334	0.40307	0.00027
-2.2	0.82109	0.02892	-0.17092	0.17041	0.00051
-2.4	0.80342	0.02626	-0.07721	-0.07681	0.00040
-2.6	0.78751	0.02346	-0.31770	-0.31639	0.00131
-2.8	0.77305	0.02111	-0.52480	-0.52305	0.00175
-3.0	0.75983	0.01913	-0.67325	-0.67143	0.00182
-3.2	0.74767	0.01744	-0.74153	-0.73990	0.00163
-3.4	0.73642	0.01598	-0.71591	-0.71464	0.00127
-3.6	0.72598	0.01471	-0.59422	-0.59338	0.00084
-3.8	0.71623	0.01360	-0.38831	-0.38791	0.00040
-4.0	0.70710	0.01263	-0.12456	-0.12454	0.00003
-4.2	0.69853	0.01176	0.15839	0.15812	0.00027
-4.4	0.69045	0.01099	0.41467	0.41423	0.00044
-4.6	0.68282	0.01030	0.59870	0.59820	0.00050
-4.8	0.67560	0.00967	0.67406	0.67360	0.00046
-5.0	0.66874	0.00911	0.62205	0.62171	0.00034
-5.2	0.66221	0.00860	0.44787	0.44769	0.00018
-5.4	0.65599	0.00814	0.18252	0.18245	0.00007
-5.6	0.65006	0.00771	-0.12123	-0.12111	0.00012
-5.8	0.64438	0.00732	-0.39785	-0.39765	0.00020
-6.0	0.63894	0.00697	-0.58361	-0.58339	0.00022

$$\phi(t) = \begin{cases} 0.02191t^2 + 0.007243t^3 & t_1 < t \leq 0 \\ 0.10416/[-t]^{3/2} + 0.2473 & t \leq t_1 \end{cases} \quad (64)$$

$$A(t) = \begin{cases} A_i(t) / \sin \left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} - \phi(t) \right] & -1.8 < t \leq 0 \\ 1/(-t)^{1/4} & t \leq -1.8 \end{cases} \quad (65)$$

式中 $t_1 = -2.33810$ 是艾里函数 $A_i(t)$ 的第一个零点。由 (64) 与 (65) 算出的 $\phi(t)$ 与 $A(t)$ 值以及将它们代入 (62) 得到的艾里函数近似值列于表 1, 近似值与准确值之差不大于 0.00183, 具有较高的精度。函数 $A(t)$ 与 $\phi(t)$ 的图形表示在图 9 上, 它们都是比较缓变的函数, 而且 $A(t)$ 较好地具有包络的特征。

2. 从表 1 与图 9 看出, 函数 $\phi(t)$ 的数值很小, 其最大值不超过 0.03。在精度要求不十分

表 2 按公式 (66) 计算的 $\tilde{A}_i(t)$
Calculated $\tilde{A}_i(t)$ by the expression (66)

t	$\tilde{A}_i(t)$	$A_i(t)$	t	$\tilde{A}_i(t)$	$A_i(t)$
-8.2	-0.4038	-0.3928	-2.0	0.3966	0.4031
-8.0	-0.0983	-0.0934	-1.8	0.6060	0.6040
-7.8	0.2384	0.2355	-1.6	0.7693	0.7619
-7.6	0.5035	0.4932	-1.4	0.8795	0.8715
-7.4	0.6200	0.6050	-1.2	0.9355	0.9327
-7.2	0.5576	0.5421	-1.0	0.9413	0.9493
-7.0	0.3282	0.3266	-0.8	0.9060	0.9280
-6.8	0.0257	0.0215	-0.6	0.8423	0.8771
-6.6	-0.2944	-0.2898	-0.4	0.7654	0.8051
-6.4	-0.5394	-0.5267	-0.2	0.6918	0.7201
-6.2	-0.6500	-0.6317	0.0	0.6425	0.6293
-6.0	-0.6029	-0.5834	0.2	0.5779	0.5383
-5.8	-0.4139	-0.3977	0.4	0.4842	0.4515
-5.6	-0.1301	-0.1211	0.6	0.3947	0.3719
-5.4	0.1831	0.1824	0.8	0.3164	0.3010
-5.2	0.4585	0.4477	1.0	0.2500	0.2398
-5.0	0.6411	0.6217	1.2	0.1948	0.18810
-4.8	0.6984	0.6736	1.4	0.14986	0.14541
-4.6	0.6241	0.5982	1.6	0.11377	0.11084
-4.4	0.4366	0.4142	1.8	0.08528	0.08337
-4.2	0.1728	0.1581	2.0	0.06315	0.06190
-4.0	-0.1204	-0.1245	2.2	0.04620	0.04539
-3.8	-0.3958	-0.3879	2.4	0.03341	0.03289
-3.6	-0.6130	-0.5934	2.6	0.02389	0.02355
-3.4	-0.7442	-0.7146	2.8	0.01689	0.01668
-3.2	-0.7763	-0.7399	3.0	0.01182	0.01168
-3.0	-0.7109	-0.6714	3.2	0.00818	0.00809
-2.8	-0.5615	-0.5230	3.4	0.00560	0.00555
-2.6	-0.3500	-0.3164	3.6	0.00380	0.00377
-2.4	-0.1026	-0.0768	3.8	0.00255	0.00253
-2.2	0.1541	0.1704	4.0	0.00170	0.00168

高的情况下我们设 $\phi(t) = 0$, 用下列函数来逼近 $A_i(t)$:

$$\tilde{A}_i(t) = \begin{cases} \sin \left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] / [B + Dt + t^2]^{1/8} & t \leq 0 \\ \exp \left(-\frac{2}{3} t^{3/2} \right) / \{ \sqrt{2} [B + Dt + 16t^2]^{1/8} \} & t > 0 \end{cases} \quad (66)$$

用电子计算机确定的最佳 B, D 值为

$$B = 2.152, \quad D = 1.619. \quad (67)$$

表 2 列出了按 (66) 计算的近似值 $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{A}_i(t)$ 与准确值 $A_i(t)$ 的最大偏差为 0.039. 相应于公式 (66) 的包络函数为

$$\tilde{A}(t) = 1/[B + Dt + t^2]^{1/8} \quad t \leq 0. \quad (68)$$

TURNING-POINT CONVERGENCE-ZONES IN UNDERWATER SOUND CHANNEL (I) A NORMAL-MODE THEORY

ZHANG REN-HE

(*Institute of Acoustics, Academia Sinica*)

In this paper, by use of the normal-mode method, the sound field of the turning-point convergence-zones in underwater sound channel is treated. Theoretical analysis shows that the sound field of the turning-point convergence-zone is the superposition of a great number of in-phase normal modes. Under certain conditions, the sound intensity at the turning-point convergence-zone is proportional to r^{-2} , the convergence-gain is independent to the order of zone and the width of zone is proportional to the order of zone. These theoretical results are consistent with Hale's experiment.

For a bilinear channel, the convergence-gain is

$$F = 4.1 a_1^{1/3} k_0^{2/3} (h_0 - z),$$

where a_1 is the relative velocity gradient, k_0 is wave number and $(h_0 - z)$ is distance from channel axis to source.

By using the theory on the turning-point convergence-zone, the experimental results in model tank are analysed. Calculated positions of zones, convergence-gains and widths of zones in surface sound channel agree with experimental results.