

用射线方法计算浅海混响平均强度 (II)*

吴 承 义

(中国科学院声学研究所)

本文推广前文所述计算均匀层浅海远程混响强度的方法,使之能对由两个等速层 L_1 (靠近海底)、 L_3 (靠近海面)和一夹于其间的梯度层 L_2 所构成的非均匀浅海进行计算。

在这种混合层中的声线按其能否穿透梯度层 L_2 可分为两类。考虑到在远程情况下所有有效声线的掠射角都较小,从而可近似地求得计算混响所需的各声线的掠射角。文中计算了收发合置于上层 L_3 时的海底和海面混响强度 I_{3b}^+ 、 I_{3b}^- 和 I_{3s}^+ , 这里“ $\pm$ ”表示梯度 $a \gtrless 0$ 。远程的计算结果表明 $I_{3b}^+ \sim r^{-7/2}$ (对均匀散射)、 $I_{3b}^- \sim r^{-4}$ (对兰贝特散射)、 $I_{3b}^- \sim r^{-5}$ (对两种散射)、 $I_{3s}^+ \sim r^{-1}$ (对均匀散射)。

对收发合置于下层 L_1 的情况可作类似的计算,不会遇到更多的困难。

本文沿用前文^[1]的模型和方法,讨论声速剖面如图 1 所示的跃变层中,指向性声源和接收器合置时的界面混响平均强度。

一、跃变层中的声线和掠射角

图 1 的声速剖面可表为:

$$c(z) = \begin{cases} c_3 & z_2 \leq z \leq H \\ c_1 - az & z_1 < z < z_2 \\ c_1 & 0 \leq z \leq z_1 \end{cases} \quad (1.1)$$

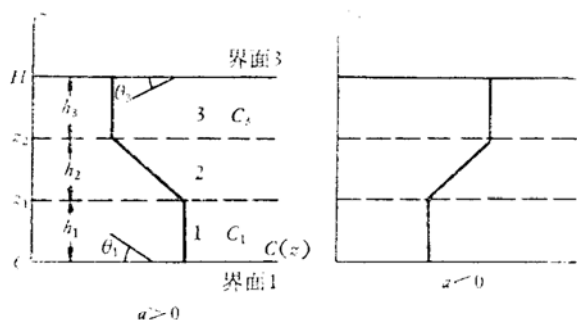


图 1 声速剖面图

式中 $a = (c_1 - c_3)/h_2$, 图中 h_1 、 h_2 、 h_3 为三个分层的厚度, $a > 0$ 称为正跃变层, $a < 0$ 为负跃变层。本文主要讨论收、发合置于上层 ($c = c_3$) 的情况,合置于下层时可作类似的推论。

在跃变层中,声线可分两类,第一类声线其掠角大于临界角 θ_p , 它能穿透梯度层而在上下界面之间被多次反射;第二类声线其掠角小于 θ_p , 它将在梯度层内不同深度(与掠角有关)弯转而折回,只受一个界面的多次反射。位于高速层中的源只能产生第一类声线,位于低速层中的源则可产生两类声线。由折射定律易知,临界角 θ_p 为:

位于高速层中的源只能产生第一类声线,位于低速层中的源则可产生两类声线。由折射定律易知,临界角 θ_p 为:

* 1978 年 11 月 21 日收到。

$$\theta_p = \begin{cases} \cos^{-1} \frac{c_3}{c_1} & a > 0 \\ \cos^{-1} \frac{c_1}{c_3} & a < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

因 θ_p 一般很小, 故有

$$\theta_p \cong \sqrt{\frac{2|a|h_2}{c}} \quad (1.3)$$

这里 c 可取为层中的平均声速或每秒 1500 米.

跃变层中的声线由直线和圆弧所组成, 图 2 和图 3 画出了 $a > 0$, 源在层 3 时两类声线的单元段. 下面分别求其对界面掠角的近似值.

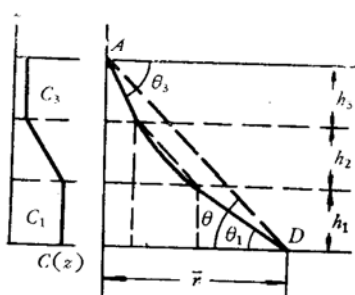


图 2 正跃变层中第一类声线的单元段

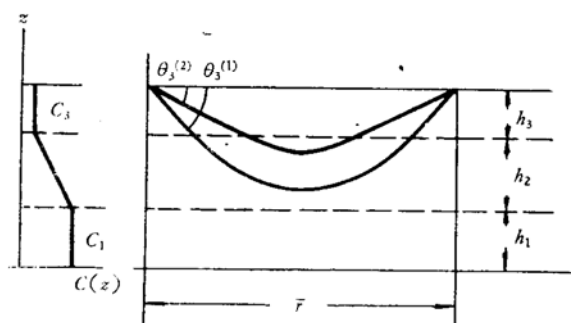


图 3 正跃变层中第二类声线的单元段

1. 第一类声线

按图 2, 第一类声线满足方程:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= h_1 \cot \theta_1 + h_2 \cot \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_3) + h_3 \cot \theta_3 \\ \frac{\cos \theta_3}{c_3} &= \frac{\cos \theta_1}{c_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

其小角度近似式为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &\cong \frac{h_1}{\theta_1} + \frac{2h_2}{\theta_1 + \theta_3} + \frac{h_3}{\theta_3} \\ \theta_3^2 - \theta_1^2 &\cong \theta_p^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

方程 (1.4) 或 (1.5) 很难严格求解, 只能求助于近似手段, 为此, 我们把图 2 中的虚线 AD 看作是当 $a = 0$ 时即均匀层中水平距离为 $\bar{r}$ 的声线段, 其掠角为 θ . 可以看出, 当 θ_3 较大时, θ 也较大, θ_3 和 θ_1 相对于 θ 有一不大的差值, 而当 θ_3 减小至趋近于其极限值 θ_p 时, θ 由大于 θ_p 变到小于 θ_p 以至于零, 此时声线在层 2 和层 3 中的水平距离趋近常数, 因而 θ_1 近似为 $h_1\theta/H$. 我们可以 $\theta = \theta_p$ 为分界, 分两种情况讨论 θ_3 和 θ_1 的近似值: 当 $\theta > \theta_p$ 时, 令

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\theta - \theta_1}{\theta} = 1 - \frac{\theta_1}{\theta}, \quad \delta_3 = \frac{\theta_3 - \theta}{\theta_3} = 1 - \frac{\theta}{\theta_3} \quad \text{即} \\ \theta_1 &= (1 - \delta_1)\theta, \quad \theta_3 = \frac{\theta}{1 - \delta_3} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

将 (1.6) 式代入 (1.5) 式, 舍去 δ_1 和 δ_3 的高次项, 得到:

$$h_1(1 + \delta_1) + h_2\left(1 + \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_3}{2}\right) + h_3(1 - \delta_3) \cong \bar{r} \cdot \theta \cong H$$

$$\delta_1 + \delta_3 \cong \frac{\theta_p^2}{2\theta^2} \quad (1.7)$$

令 $(h_1 + h_2/2)/H = b_1$, $(h_3 + h_2/2)/H = b_3$, 可解得 $\delta_1 = b_3\theta_p^2/2\theta^2$, $\delta_3 = b_1\theta_p^2/2\theta^2$, 进而得到:

$$\theta_1 \cong \left(1 - \frac{b_3\theta_p^2}{2\theta^2}\right)\theta \quad \theta > \theta_p$$

$$\theta_3 \cong \left(1 + \frac{b_1\theta_p^2}{2\theta^2}\right)\theta \quad (1.8)$$

当 $\theta < \theta_p$ 时, 按前述有:

$$\theta_1 \cong \frac{h_1}{H}\theta \quad \theta < \theta_p$$

$$\theta_3 \cong \theta_p \quad (1.9)$$

由对称性易知, 对负跃变层有:

$$\theta_1 \cong \left(1 + \frac{b_3\theta_p^2}{2\theta^2}\right)\theta \quad \theta > \theta_p$$

$$\theta_3 \cong \left(1 - \frac{b_1\theta_p^2}{2\theta^2}\right)\theta \quad (1.10)$$

$$\theta_1 \cong \theta_p$$

$$\theta_3 \cong \frac{h_3}{H}\theta \quad \theta < \theta_p \quad (1.11)$$

2. 第二类声线

按图 3, 若令一个跨度的水平距离为 $\bar{r}$, 则声线掠角 θ_3 满足^[2]:

$$2\left(h_3 \cot \theta_3 + \frac{c_3}{a} \tan \theta_3\right) = \bar{r} \quad (1.12)$$

其小角度近似式为:

$$\frac{h_3}{\theta_3} + \frac{c_3}{a}\theta_3 = \frac{\bar{r}}{2} \quad \text{或} \quad \theta_3^2 - \frac{\bar{r}a}{2c_3}\theta_3 + \frac{ah_3}{c_3} = 0 \quad (1.13)$$

当满足

$$\bar{r} > 4\sqrt{\frac{h_3c_3}{a}} \quad (1.14)$$

后有双解:

$$\theta_3^{(1)} = \frac{\bar{r}a}{4c_3} + \sqrt{\left(\frac{\bar{r}a}{4c_3}\right)^2 - \frac{ah_3}{c_3}}$$

$$\theta_3^{(2)} = \frac{\bar{r}a}{4c_3} - \sqrt{\left(\frac{\bar{r}a}{4c_3}\right)^2 - \frac{ah_3}{c_3}} \quad (1.15)$$

当满足

$$\bar{r} = 4\sqrt{\frac{h_3c_3}{a}} \quad (1.16)$$

时有重根

$$\theta_3 = \bar{\theta} = \sqrt{\frac{ah_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{h_3}{2h_2}}\theta_p \quad (1.17)$$

二、海底混响强度

收发合置于正跃变层的上层时, 海底混响强度由往返均为第一类声线的路径所贡献. 类似于[1]的(3.1)式可写出其表式为:

$$I_{3b}^+(t) = 2c^2 t r \phi_e \sum_l \sum_m e^{-2\theta(l\theta_{1l} + m\theta_{1m})} f_{31l}^+ f_{13m}^+ \alpha_b(\theta_{1l}) e^{-\beta(R_l + R_m)} \quad (2.1)$$

其中 θ_{3l} 、 θ_{3m} 、 θ_{1l} 、 θ_{1m} 是往返路径 lm 在层 3 和层 1 中的掠射角, f_{31l}^+ 和 f_{13m}^+ 是在正跃变层中由层 3 至层 1 和由层 1 至层 3 的声强几何衰减因子, 其余各量的意义同于前文^[1]. 按射线理论^[3]

$$f_{31l}^+ = \frac{\cos \theta_{3l}}{r_l |\partial r_l / \partial \theta_{3l}| \sin \theta_{1l}}, \quad f_{13m}^+ = \frac{\cos \theta_{1m}}{r_m |\partial r_m / \partial \theta_{1m}| \sin \theta_{3m}} \quad (2.2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} r_l &= (2l+1)[h_3 \cot \theta_{3l} + h_2 \cot((\theta_{1l} + \theta_{3l})/2) + h_1 \cot \theta_{1l}] \\ r_m &= (2m+1)[h_3 \cot \theta_{3m} + h_2 \cot((\theta_{1m} + \theta_{3m})/2) + h_1 \cot \theta_{1m}] \\ \left| \frac{\partial r_l}{\partial \theta_{3l}} \right| &= (2l+1) \left[\frac{h_3}{\sin^2 \theta_{3l}} + \frac{h_2(1 + c_1 \sin \theta_{3l}/c_3 \sin \theta_{1l})}{1 - \cos(\theta_{1l} + \theta_{3l})} + \frac{h_1 c_1 \sin \theta_{3l}}{c_3 \sin^3 \theta_{1l}} \right] \\ \left| \frac{\partial r_m}{\partial \theta_{1m}} \right| &= (2m+1) \left[\frac{h_3 c_3 \sin \theta_{1m}}{c_1 \sin^3 \theta_{3m}} + \frac{h_2(1 + c_3 \sin \theta_{1m}/c_1 \sin \theta_{3m})}{1 - \cos(\theta_{1m} + \theta_{3m})} + \frac{h_1}{\sin^2 \theta_{1m}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} t_l &= (2l+1) \left[\frac{h_3}{c_3 \sin \theta_{3l}} + \frac{1}{a} \ln \frac{c_1(1 + \sin \theta_{3l})}{c_3(1 + \sin \theta_{1l})} + \frac{h_1}{c_1 \sin \theta_{1l}} \right] \\ t_m &= (2m+1) \left[\frac{h_3}{c_3 \sin \theta_{3m}} + \frac{1}{a} \ln \frac{c_1(1 + \sin \theta_{3m})}{c_3(1 + \sin \theta_{1m})} + \frac{h_1}{c_1 \sin \theta_{1m}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

严格地说, 式中的 θ_{3l} 、 θ_{3m} 、 θ_{1l} 、 θ_{1m} 应由方程 $r_l = r_m$ 和 $t_l + t_m = t$, 对给定的 t 、 l 和 m 求解而得到, 显然这是很困难的. 为此, 采用前文中的远程近似即令 $t_l \cong t_m = \frac{t}{2}$, $r_l \cong r_m = \frac{1}{2} ct = r$, 因而 $r/2l+1$ 和 $r/2m+1$ 等于上节中的 $\bar{r}$, 按照上节第一类声线的掠角近似解得到:

$$\theta_{3l} \cong \left[1 + \left(\frac{b_1}{2} \cdot \frac{\theta_p^2}{\theta_l^2} \right) \right] \theta_l \quad \theta_l > \theta_p \quad (2.5)$$

$$\theta_{1l} \cong \left[1 - \left(\frac{b_3}{2} \cdot \frac{\theta_p^2}{\theta_l^2} \right) \right] \theta_l$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{3l} &\cong \theta_p \\ \theta_{1l} &\cong (h_1/H)\theta_l \end{aligned} \right\} \quad \theta_l < \theta_p \quad (2.6)$$

θ_{3m} 和 θ_{1m} 有同样表式, 仅其中用 m 代替 l . 式中 θ_l 和 θ_m , 参照前文[1]为:

$$\theta_l \cong \sin^{-1} \left[\frac{\frac{4H}{ct} \left(l + \frac{1}{2} \right)}{1 + \frac{4H^2}{c^2 t^2} (l-m)(l+m+1)} \right]$$

$$\theta_m \cong \sin^{-1} \left[\frac{\frac{4H}{tc} \left(m + \frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{4H^2}{c^2 t^2} (l - m)(l + m + 1)} \right] \quad (2.7)$$

另外式(2.1)中的 $e^{-\beta(R_l+R_m)}$ 可近似取为 $e^{-\beta ct}$, 对 l 和 m 的求和限由 $0 \leq \theta_{3l} \leq \theta_c$ 和 $0 \leq \theta_{3m} \leq \theta_c$ 给定^[1]. 上述 (2.1) 至 (2.6) 式即为所论海底混响强度的计算表达式. 进而, 为求其近似解析式, 利用小角度近似将 (2.2) 式化为 $f_{31l}^+ \cong -1/[r_l(\partial r_l/\partial \theta_{3l})\theta_{1l}] = (-1/r_l)(\partial \theta_l/\partial r_l)(\partial \theta_{3l}/\partial \theta_l)(1/\theta_{1l})$, 并由 $\theta_l \cong (2l+1)H/r_l$, 对给定的 l 有 $\partial \theta_l/\partial r_l \cong -(2l+1)H/r_l^2 = -\theta_l/r_l$, 得到

$$f_{31l}^+ \cong \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\theta_l}{\theta_{1l}} \cdot \frac{\partial \theta_{3l}}{\partial \theta_l} \quad (2.8)$$

同样有:

$$f_{13m}^+ \cong \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\theta_m}{\theta_{3m}} \cdot \frac{\partial \theta_{1m}}{\partial \theta_m} \quad (2.8')$$

在将 (2.1) 式求和化为对 l 和 m 的积分时, 积分限仍近似取为(参见前文) $0 \rightarrow [r \tan(\theta_c/2)]/H$, 因为在所作近似下, 路径长度的改变已被忽略. 考虑到对 θ_l 、 θ_m 大于和小于 θ_p , 声线掠角近似式不同, 又应分为 $0 \rightarrow [r \tan(\theta_p/2)]/H$ 和 $[r \tan(\theta_p/2)]/H \rightarrow [r \tan(\theta_c/2)]/H$ 两段积分. 两段中 $\partial \theta_{3l}/\partial \theta_l$ 和 $\partial \theta_{1m}/\partial \theta_m$ 的表式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{3l}}{\partial \theta_l} &\cong \left[1 - \left(\frac{b_1}{2} \cdot \frac{\theta_p^2}{\theta_l^2} \right) \right] & \theta_l > \theta_p \\ \frac{\partial \theta_{1m}}{\partial \theta_m} &\cong \left[1 + \left(\frac{b_3}{2} \cdot \frac{\theta_p^2}{\theta_m^2} \right) \right] & \theta_m > \theta_p \end{aligned} \quad (2.9)$$

和

$$\begin{aligned} \partial \theta_{3l}/\partial \theta_l &\cong (h_1/H)^2(\theta_l/\theta_p) & \theta_l < \theta_p \\ \partial \theta_{1m}/\partial \theta_m &= h_1/H & \theta_m < \theta_p \end{aligned} \quad (2.10)$$

导出 (2.10) 式时利用了 $\partial \theta_{3l}/\partial \theta_l = (\partial \theta_{3l}/\partial \theta_{1l})(\partial \theta_{1l}/\partial \theta_l)$, 和按折射定律而有的 $\partial \theta_{3l}/\partial \theta_{1l} = (c_3 \sin \theta_{1l})/(c_1 \sin \theta_{3l}) \cong \theta_{1l}/\theta_{3l}$. 式 (2.9) 和 (2.10) 中 θ_l 和 θ_m 近似取为 $2lH/r$ 和 $2mH/r$. 将 (2.5)、(2.6)、(2.9)、(2.10) 各式代入 (2.1) 及 (2.8)、(2.8') 得到均匀散射海底 ($\alpha_b = \mu_b \sin \theta_{1l}$) 的海底混响强度为:

$$I_{3b}^+(t) \cong (c^2 t \tau / 2) \phi_c \mu_b e^{-2\beta r} S_{31}^+ T_{13}^+ \quad (2.11)$$

式中,

$$\begin{aligned} S_{31}^+ &\cong \frac{2}{r^2} \int_0^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_c}{2}} e^{-2Ql\theta_{1l}} \frac{\theta_l}{\theta_{1l}} \frac{\partial \theta_{3l}}{\partial \theta_l} \theta_{1l} dl \cong \frac{2}{r^2} \left[\int_0^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_p}{2}} e^{-\frac{4Qh_1}{r} l^2} \frac{4h_1^2}{r^2 \theta_p} l^2 dl \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_p}{2}}^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_c}{2}} e^{-\frac{4l^2 H Q}{r} + \frac{b_3 r Q}{2H} \theta_p^2} \frac{2lH}{r} \left(1 - \frac{b_1 r^2 \theta_p^2}{8H^2 l^2} \right) dl \right] \cong \frac{1}{4Q\theta_p r^{5/2}} \sqrt{\frac{\pi h_1}{Q}} \left[\Phi \left(\sqrt{\frac{h_1}{H}} X_p \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{\frac{h_1 X_p}{\pi H}} e^{-\frac{h_1}{H} X_p} \right] + \frac{1}{2Qr^2} e^{\frac{b_2}{2} X_p} \left\{ e^{-X_p} - e^{-X_c} + \frac{b_1}{2} X_p [E_i(-X_p) - E_i(-X_c)] \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$T_{13}^+ \cong \frac{2}{r^2} \int_0^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_c}{2}} e^{-2Qm\theta_{1m}} \frac{\theta_m}{\theta_{3m}} \frac{\partial \theta_{1m}}{\partial \theta_m} dm$$

$$\begin{aligned}
& \cong \frac{2}{r^2} \int_0^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_p}{2}} e^{-\frac{4Qh_1}{r} m^2} \cdot \frac{2h_1 m}{r\theta_p} dm + \frac{2}{r^2} \int_{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_p}{2}}^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_c}{2}} e^{-\frac{4QH}{r} m^2 + \frac{b_3}{2} \frac{rQ}{H} \theta_p^2} \left[1 - \frac{(b_1 - b_3)r^2 \theta_p^2}{8H^2 m^2} \right] dm \\
& = \frac{1}{2Q\theta_p r^2} (1 - e^{-\frac{h_1}{H} X_p}) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{QH}} \frac{1}{r^{3/2}} e^{\frac{b_3}{2} X_p} [1 + (b_1 - b_3)X_p] [\Phi(\sqrt{X_c}) \\
& \quad - \Phi(\sqrt{X_p})] \quad (2.13)
\end{aligned}$$

式中 $X_p = (rQ/H)\theta_p^2$, $X_c = (rQ/H)\theta_c^2$, $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-y^2} dy$,

$$E_i(-x) = - \int_x^\infty (e^{-y}/y) dy$$

S_{31}^+ 和 T_{13}^+ 的后项为较大掠角的路径的贡献, 在足够的远程, $r \gg H/(Q\theta_p^2)$, 我们如只取其前项, 并令 $\Phi(\sqrt{(h/H)X_p}) \cong 1$, $e^{-(h_1/H)X_p} \cong 0$, 得到远程近似式:

$$I_{3b}^+(t) \cong \frac{c\tau\phi_e\mu_b}{8Q^2\theta_p^2} \sqrt{\frac{\pi h_1}{Q}} \frac{e^{-2\beta r}}{r^{7/2}} \quad \theta_p \neq 0 \quad (2.14)$$

对兰贝特散射海底, 相应地有

$$I_{3b}^+(t) \cong \frac{c\tau\phi_e\mu_b\pi h_1}{16Q^3\theta_p^2} \frac{e^{-2\beta r}}{r^4} \quad \theta_p \neq 0 \quad (2.14')$$

对负跃变层, 当 θ_l 和 θ_m 均小于 θ_p 时, $\theta_{1l} \cong \theta_p$, $\theta_{3l} \cong (h_3/H)\theta_l$, $\theta_{1m} \cong \theta_p$, $\theta_{3m} \cong (h_3/H)\theta_m$, $\partial\theta_{3l}/\partial\theta_l \cong h_3/H$, $\partial\theta_{1m}/\partial\theta_m = (\partial\theta_{1m}/\partial\theta_{3m})(\partial\theta_{3m}/\partial\theta_m) \cong (\theta_{3m}/\theta_{1m})(\partial\theta_{3m}/\partial\theta_m) \cong (h_3/H)^2\theta_m/\theta_p$ 相应地有:

$$S_{31}^- \cong \frac{2}{r^2} \int_0^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_p}{2}} \frac{h_3}{H} \frac{2Hl}{r} e^{-2Q\theta_p l} dl = \frac{h_3}{Q^2\theta_p^2 r^3} [1 - e^{-X_p}(1 + X_p)] \quad (2.15)$$

$$T_{13}^- \cong \frac{2}{r^2} \frac{h_3}{H} \frac{1}{\theta_p} \int_0^{\frac{r}{H} \tan \frac{\theta_p}{2}} \frac{2mH}{r} e^{-2Q\theta_p m} dm = \frac{h_3}{Q^2\theta_p^3 r^3} [1 - e^{-X_p}(1 + X_p)] \quad (2.16)$$

所以相应于 (2.14) 式和 (2.14') 的近似式为:

$$I_{3b}^-(t) \cong (c\tau\phi_e\mu_b h_3^2/Q^4\theta_p^5)(e^{-2\beta r}/r^5) \quad \theta_p \neq 0 \quad (2.17)$$

和

$$I_{3b}^-(t) \cong (c\tau\phi_e\mu_b h_3^2/Q^4\theta_p^4)(e^{-2\beta r}/r^5) \quad \theta_p \neq 0 \quad (2.17')$$

(2.17) 和 (2.17') 式中 r 的方次相同, 说明在负跃变层中, 收发合置于上层时, 远程海底混响衰减规律不依赖于海底散射的角度关系。这是显然的, 因为此时海底上的入射和散射掠角已接近于常数 θ_p 。

上面讨论中应注意的是近似式 (2.14)、(2.14') 和 (2.17)、(2.17') 只适用于 $\theta_p \neq 0$, $r \gg H/(Q\theta_p^2)$ 的情况, 不满足此条件时, 应用一般式 (2.11)。实际上, 因 b_3 是小于 1 的常数, 利用渐近展开式^[3] $E_i(-x) \cong \exp(-x) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k-1)!/x^k$ 和 $\Phi \sqrt{x} \cong 1 - \exp(-x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma(k + \frac{1}{2}) / x^{k+\frac{1}{2}}/\pi$, 可知仅当 $\theta_p \neq 0$, $r \gg H/(Q\theta_p^2)$ 时, (2.12) 和 (2.13) 式的第二项与第一项相比可忽略, (2.11) 式简化为近似式 (2.14)、(2.14')。另外, 若采用较精确的近似式, 即在 (2.14)、(2.14')、(2.17)、(2.17') 各式中分别乘以因子 $[1 - \exp(-h_1 X_p/H)] \Phi(\sqrt{h_1 X_p/H})$ 、

$\Phi^2(\sqrt{h_1 X_p/H})$ 、 $[1 - (1 + X_p)\exp(-X_p)]^2$ 、 $[1 - (1 + X_p)\exp(-X_p)]^2$ ，则可知，当 $\theta_p \rightarrow 0$ 或 $r \ll H/(Q\theta_p^2)$ ，因而 $X_p \rightarrow 0$ 时，各式均 $\rightarrow 0$ ，此时混响强度将由 (2.12) 和 (2.13) 式的第二项决定。因为 $E_i(-X_p)$ 和 $\Phi(\sqrt{X_p})$ 的小宗量展开式为 $E_i(-X_p) \cong C + \ln X_p + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k X_p^k/k!k$ C 为常数， $\Phi(\sqrt{X_p}) \cong 2\exp(-X_p) \sum_{k=0}^{\infty} 2^k X_p^{k+1/2}/(2k+1)!!/\sqrt{\pi}$ ，所以此时 $S_{31}^+ \rightarrow [1 - \exp(-X_p)]/(2Qr^2)$ ， $T_{13}^+ \rightarrow \Phi(\sqrt{X_p})\sqrt{\pi}/(2\sqrt{QH}r^{3/2})$ ，(2.11) 式退化为均匀层的结果(见文[1]的(33)式)。注意到 (1.8) 和 (1.10) 式，可知在所论情况下，正、负跃变层的差别仅在于 b_1 和 b_3 前面的符号，当 $X_p \rightarrow 0$ 时，含有 b_1 和 b_3 的项 $\rightarrow 0$ ，因而负跃变层的结果也退化到均匀层的结果。

在上面所作的远程近似下，作为各路径声强之和的声场平均强度 $I_{13}^+(r)$ (正跃变层下发上收)、 $I_{31}^+(r)$ (正跃变层上发下收) 及 $I_{13}^-(r)$ 、 $I_{31}^-(r)$ 为*：

$$I_{13}^+(r) \cong I_{31}^+(r) = 2T_{13}^+ e^{-\beta r} \cong (1/Q\theta_p)(e^{-\beta r}/r^2) \quad (2.18)$$

$$I_{13}^-(r) \cong I_{31}^-(r) = 2T_{13}^- e^{-\beta r} \cong (2h_3/Q^2\theta_p^3)(e^{-\beta r}/r^3) \quad (2.18')$$

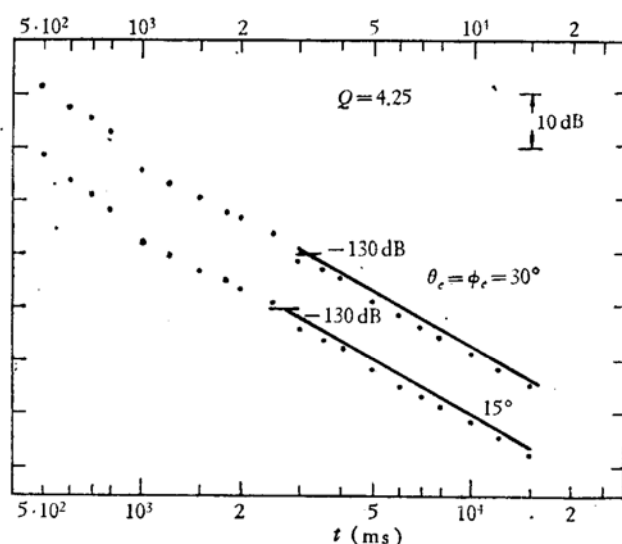


图4 均匀散射海底按 (2.1)–(2.7) 数值计算结果和按 (2.14) 式所得理论曲线

图4中画出了对均匀散射海底，按计算式 (2.1)–(2.7) 数值计算的结果(圆点)和按 (2.14) 式所得的理论曲线(实线)。计算参数为 $Q = 4.25$ ， $H = 60$ 米， $\theta_e = \phi_e = 30^\circ$ 和 15° ， $h_1 = 40$ 米， $h_2 = 10$ 米， $h_3 = 10$ 米， $\tau = 10$ 毫秒， $c = 1.5$ 米/毫秒， $\beta = 0$ ， $10 \log \mu_b = -28$ ， $c_3 = 1.488$ 米/毫秒， $c_1 = 1.493$ 毫秒，即 $a = 5 \cdot 10^{-4}$ ， $\theta_p = 8.12 \times 10^{-2} \cong 4.7^\circ$ 。由图看出，在所论情况下，采用简单近似式 (2.14) 引进的偏差约为 2 分贝。

三、海面混响强度

收发合置于正跃变层上层时，海面混响的往返路径都包括两类声线，这里我们着重讨论往

* 式(2.18)和(2.18')中， T_{13}^+ 和 T_{13}^- 前乘 2 是因为当接收器置于层内(非界面上)时，路径增加一倍。参见前文图 1。

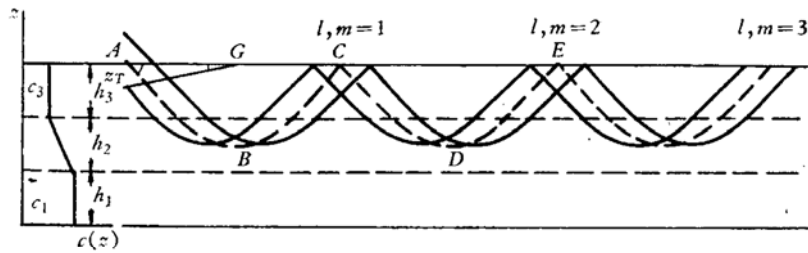


图5 海面混响声线(第二类)示意图

返均为第二类声线的情况。为使讨论具有一般性,把海面反射系数写作 $V_3(\theta) = e^{-2Q_3\theta}$ 的形式。所论情况的声线示意图如图5所示。 $l, m = 0$ 的路径对应于图中直线 $Z_T G$ 实际上其贡献可忽略。和均匀层一样,用路径 $ABCD$ 代表一对路径。所论海面混响强度为(对均匀散射海面^[1]):

$$I_{3s}^+(t) \cong (1/2)c^2 t r \phi_e \mu_s e^{-\beta c t} \sum_l \sum_m A_l A_m \quad (3.1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_l &= (1 + e^{-2Q_3\theta_{3l}^{(1)}}) e^{-2lQ_3\theta_{3l}^{(1)}} \sin \theta_{3l}^{(1)} f_{33l(1)}^{(1)} + (1 + e^{-2Q_3\theta_{3l}^{(2)}}) e^{-2lQ_3\theta_{3l}^{(2)}} \sin \theta_{3l}^{(2)} f_{33l(2)}^{(2)} \\ A_m &= (1 + e^{-2Q_3\theta_{3m}^{(1)}}) e^{-2mQ_3\theta_{3m}^{(1)}} f_{33m(1)}^{(1)} + (1 + e^{-2Q_3\theta_{3m}^{(2)}}) e^{-2mQ_3\theta_{3m}^{(2)}} f_{33m(2)}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

按图3和式(1.12)知, $r_l = 2l[h_3 \cot \theta_{3l} + (c_3 \tan \theta_{3l})/a]$, $r_m = 2m \cdot [h_3 \cot \theta_{3m} + (c_3 \tan \theta_{3m})/a]$, 利用远程近似即令 $r_l \cong r_m = r = ct/2$, $\sin \theta \cong \theta$, $\cos \theta \cong 1$, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{3l}^{(1),(2)} &= (ra/4c_3l) \pm \sqrt{(ra/4c_3l)^2 - (ah_3/c_3)}, \\ \theta_{3m}^{(1),(2)} &= (ra/4c_3m) \pm \sqrt{(ra/4c_3m)^2 - (ah_3/c_3)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

其中(1)对应“+”号,(2)对应“-”号。由上式具有实数解的条件可决定 t 时刻, l, m 的最大值 $l_{\max}$ 和 $m_{\max}$ 为:

$$l_{\max} = m_{\max} = [(r/4) \sqrt{a/c_3 h_3}]. \quad (3.4)$$

式中 $[x]$ 表示取 x 的最大整数。进而,由 $f_{33l}^+ = \cot \theta_{3l}/r_l |\partial r_l / \partial \theta_{3l}|$ 和 $f_{33m}^+ = \cot \theta_{3m}/r_m |\partial r_m / \partial \theta_{3m}|$ 得到:

$$\left. \begin{aligned} f_{33l(1)}^+ &\cong \frac{1}{r^2} \cdot \frac{[\theta_{3l}^{(1)}]^2 + \bar{\theta}^2}{[\theta_{3l}^{(1)}]^2 - \bar{\theta}^2}, & f_{33l(2)}^+ &\cong \frac{1}{r^2} \cdot \frac{[\theta_{3l}^{(2)}]^2 + \bar{\theta}^2}{\bar{\theta}^2 - [\theta_{3l}^{(2)}]^2} \\ f_{33m(1)}^+ &\cong \frac{1}{r^2} \cdot \frac{[\theta_{3m}^{(1)}]^2 + \bar{\theta}^2}{[\theta_{3m}^{(1)}]^2 - \bar{\theta}^2}, & f_{33m(2)}^+ &\cong \frac{1}{r^2} \cdot \frac{[\theta_{3m}^{(2)}]^2 + \bar{\theta}^2}{\bar{\theta}^2 - [\theta_{3m}^{(2)}]^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中 $\bar{\theta}$ 为:

$$\bar{\theta} = \sqrt{ah_3/c_3} = \theta_p \sqrt{h_3/(2h_2)} \quad (3.6)$$

当 $l = l_{\max}$ 时 $\theta_{3l}^{(1)} = \theta_{3l}^{(2)} = \bar{\theta}$, 同样,当 $m = m_{\max}$ 时 $\theta_{3m}^{(1)} = \theta_{3m}^{(2)} = \bar{\theta}$ 。(3.1)式中对 l 和 m 的求和在满足 $r \gg 4 \sqrt{c_3 h_3/a}$ 后可化为对 $\theta_{3l}^{(1)}$ 、 $\theta_{3l}^{(2)}$ 和 $\theta_{3m}^{(1)}$ 、 $\theta_{3m}^{(2)}$ 的积分,为此由 $2l[(h_3/\theta_{3l}) + c_3 \theta_{3l}/a] \cong r$ 即 $l \cong r a \theta_{3l}/2c_3(\theta_{3l}^2 + \bar{\theta}^2)$, 及对 m 的相应式子,得到:

$$\left. \begin{aligned} \partial l / \partial \theta_{3l} &\cong (ra/2c_3) \cdot [(\bar{\theta}^2 - \theta_{3l}^2)/(\theta_{3l}^2 + \bar{\theta}^2)^2], \\ \partial m / \partial \theta_{3m} &\cong (ra/2c_3) [(\bar{\theta}^2 - \theta_{3m}^2)/(\theta_{3m}^2 + \bar{\theta}^2)^2] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\text{和} \quad l\theta_{3l} \cong (ra/2c_3) \cdot [\theta_{3l}^2/(\theta_{3l}^2 + \bar{\theta}^2)], \quad m\theta_{3m} \cong (ra/2c_3)[\theta_{3m}^2/(\theta_{3m}^2 + \bar{\theta}^2)^2] \quad (3.8)$$

式中 θ_{3l} 和 θ_{3m} 分别取为 $\theta_{3l}^{(1)}$ 、 $\theta_{3l}^{(2)}$ 和 $\theta_{3m}^{(1)}$ 、 $\theta_{3m}^{(2)}$ 。令 (3.2) 中 $(1 + e^{-2Q_3\theta_{3l}^{(1),(2)}})$ 和 $(1 + e^{-2Q_3\theta_{3m}^{(1),(2)}})$ 等于 2, 即与多次反射相比, 略去一次反射的损失。代入 (3.1), 计算得到:

$$I_{3r}^+(t) = r\tau\phi_e\mu_s e^{-2\beta r} S_{33II}^+ T_{33II}^+ \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad S_{33II}^+ &= a/rc_3 \int_0^{\theta_p} e^{-Q_3(ra/c_3)(x^2/x^2 + \bar{\theta}^2)} (x/x^2 + \bar{\theta}^2) dx \\ &= \frac{\theta_p^2}{4h_2r} e^{-Q_3r\theta_p^2/2h_2} \left[E_i\left(\frac{Q_3r}{2h_2}\theta_p^2\right) - E_i\left(\frac{Q_3r}{2h_2} \cdot \frac{h_3}{h_3 + 2h_2}\theta_p^2\right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

这里 $E(u) = \int_{-\infty}^u \exp(y)/y \cdot dy$ 。积分号下 x 的意义是: 若 $\bar{\theta} < \theta_p$ (由 3.6 式, 即 $2h_2 > h_3$) 则当 $0 \leq x \leq \bar{\theta}$ 时 $x = \theta_{3l}^{(2)}$, 当 $\bar{\theta} < x \leq \theta_p$ 时 $x = \theta_{3l}^{(1)}$; 若 $\bar{\theta} > \theta_p$ ($2h_2 < h_3$) 则 $x = \theta_{3l}^{(2)}$ 。

$$T_{33II}^+ = a/rc_3 \int_0^{\theta_p} e^{-(Q_3ra/c_3)(x^2/x^2 + \bar{\theta}^2)/(x^2 + \bar{\theta}^2)} dx \quad (3.11)$$

其中 x 的意义同上, 仅 $\theta_{3l}^{(1)}$ 和 $\theta_{3l}^{(2)}$ 换为 $\theta_{3m}^{(1)}$ 和 $\theta_{3m}^{(2)}$ 。令 $x = \bar{\theta} \tan \psi$, (3.11) 化为

$$T_{33II}^+ = \frac{a}{rc_3\bar{\theta}} \int_0^{\tan^{-1}\theta_p/\bar{\theta}} e^{-Q_3r\sin^2\psi/c_3} d\psi \quad (3.12)$$

若 $\bar{\theta} > \theta_p$ 即 $2h_2 < h_3$, 取 $\sin^2\psi \cong \psi^2$, 得

$$T_{33II}^+ \cong (1/2r) \sqrt{\pi/Q_3rh_3} \Phi(\theta_p \sqrt{Q_3r/h_3}) \quad (3.13)$$

若 $\bar{\theta} < \theta_p$ 即 $2h_2 > h_3$, (3.12) 取为

$$\begin{aligned} T_{33II}^+ &\cong \frac{a}{rc_3\bar{\theta}} \left[\int_0^1 e^{-\frac{Q_3ra}{c_3}\psi^2} d\psi + e^{-\frac{Q_3ra}{c_3}} \int_1^{\tan^{-1}\theta_p/\bar{\theta}} d\psi \right] \\ &= \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{\pi}{Q_3rh_3}} \Phi\left(\theta_p \sqrt{\frac{Q_3r}{2h_2}}\right) + \frac{\theta_p}{r\sqrt{2h_2h_3}} e^{-\frac{Q_3r}{2h_2}\theta_p^2} \left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{2h_2}{h_3}} - 1\right) \end{aligned} \quad (3.13')$$

当 $h_2 \rightarrow 0$ 时, 计算模型退化为两个均匀层 ($c_3, h_3; c_1, h_1; c_3 < c_1$) 毗连的“理想跃变层”。对这里讨论的第二类声线而言, 掠射角不大于临界角 θ_p , 下界面是全内反射的, 上界面具有用 Q_3 表征的反射损失和所给定的散射特性, 此时 (3.9) 式应退化为厚为 h_3 , 声速为 c_3 的均匀层的结果。这是很容易看出的, 实际上, 此时 T_{33II}^+ 应取 (3.13) 式, 而在 (3.10) 式中若令 $Q_3r\theta_p^2/2h_2 = z$, 注意到 $2h_2 \ll h_3$, 则可将 S_{33II}^+ 表为:

$$S_{33II}^+ = (z/2Q_3r^2) e^{-z} \{ E_i(z) - E_i[z - (Q_3r\theta_p^2/h_3)] \}$$

对 $E_i[z - (Q_3r\theta_p^2/h_3)]$ 作泰勒展开, 因 $d^n E_i(z)/(dz)^n = \exp(z) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k z^{-k}\right)/z$, 当 $h_2 \rightarrow 0$ 即 $z \rightarrow \infty$ 时上述导数近似为 $\exp(z)/z$, 由此即可得到 $S_{33II}^+ \rightarrow [1 - \exp(-Q_3r\theta_p^2/h_3)]/2Q_3r^2$, 进而有:

$$I_{3r}^+(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{Q_3h_3}} \frac{c\tau\phi_e\mu_s}{4Q_3r^{5/2}} e^{-2\beta r} [1 - e^{-\frac{Q_3r}{h_3}\theta_p^2}] \Phi\left(\theta_p \sqrt{\frac{Q_3r}{h_3}}\right)$$

这与文 [1] (3.3) 式“均匀散射”结果相同, 仅这里 θ_p 代替了有效垂直束宽 θ_e , 这是必然的, 因已设海面是均匀散射的。

前述 (3.9) 的各式中, 如果用 Q_3 表征海底反射损失, h_3 表示靠近海底的均匀层的厚度, 则

(3.9) 式就是负跃变层中的第二类声线的海底混响强度 (此时 (3.13') 中 a 应取为 $|a|$, (3.9) 中 μ_s 换为 μ_b).

若令 $Q_3 = 0$, 则前面的 S_{33II}^+ 和 T_{33II}^+ 简化为:

$$S_{33II}^+ = \frac{a}{2rc_3} \ln\left(1 + \frac{2h_2}{h_3}\right) = \frac{\theta_p^2}{4rh_2} \ln\left(1 + \frac{2h_2}{h_3}\right) \quad (3.14)$$

$$T_{33II}^+ = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{c_3 h_3}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2h_2}{h_3}} = \left(\frac{\theta_p}{r \sqrt{2h_2 h_3}}\right) \tan^{-1} \sqrt{\frac{2h_2}{h_3}} \quad (3.15)$$

并有

$$I_{3r}^+(t) = (A/r) e^{-2\beta r} \quad (3.16)$$

$$A = \frac{c\tau\phi_e\mu_s\theta_p^3}{4h_2\sqrt{2h_2h_3}} \ln\left(1 + \frac{2h_2}{h_3}\right) \tan^{-1} \sqrt{\frac{2h_2}{h_3}} \quad (3.16')$$

如果收发的联合等效垂直束宽 θ_e (单边) 小于 θ_p , 则在 (3.10) 和 (3.11) 式中积分上限应取为 θ_e , 此时 (3.16') 变为:

$$A = \frac{c\tau\phi_e\mu_s\theta_p^3}{4h_2\sqrt{2h_2h_3}} \ln\left(1 + \frac{2h_2\theta_e^2}{h_3\theta_p^2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{\theta_e}{\theta_p} \sqrt{\frac{2h_2}{h_3}}\right) \quad (3.17)$$

最后, 由 (3.13)、(3.13') 和 (3.15) 式可得到正跃变层中, 收发均置于上层时, 远程声场平均强度 $2T_{33II}^+(r)$ 为:

$$I_{33II}^+(r) = \sqrt{\frac{\pi}{Q_3 h_3}} \frac{e^{-\beta r}}{r^{3/2}} \Phi\left(\theta_p \sqrt{\frac{Q_3 r}{h_3}}\right) \quad 2h_2 < h_3 \quad (3.18)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{Q_3 h_3}} \frac{e^{-\beta r}}{r^{3/2}} \Phi\left(\theta_p \sqrt{\frac{Q_3 r}{2h_2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{h_2 h_3}} \frac{\theta_p}{r} e^{-\left(\frac{Q_3 \theta_p^2}{2h_2} + \beta\right)r} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{2h_2}{h_3}} - 1\right) \quad 2h_2 > h_3 \quad (3.18')$$

$$\text{若 } Q_3 = 0, \quad I_{33II}^+(r) = \sqrt{\frac{2}{h_2 h_3}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2h_2}{h_3}}\right) \frac{\theta_p}{r} e^{-\beta r} \quad (3.19)$$

此式当 $h_2 \rightarrow 0$ 时退化为

$$I_{33II}^+(r) = (2\theta_p/h_3 r) e^{-\beta r} \quad (3.20)$$

(3.20) 式右端又可写为 $(2r\theta_p/h_3) \cdot \exp(-\beta r)/r^2$, 这里前一因子是在水平距离 r 处, 以 $2\theta_p$ 为张角时所对应的源点处的垂直距离与层厚之比, 即虚源总数, 后一因子即直达波场强, 显然 (3.20) 式就是界于绝对反射界面之间的均匀层中的平均场强.

其它情况, 如由第一类声线贡献的海面混响强度 I_{3rI}^+ 、 I_{3rI}^- 及收发合置于下层时的海底、海面混响强度 I_{1b}^+ 、 I_{1b}^- 、 I_{1r}^+ 、 I_{1r}^- 等, 均可按文中方法作类似计算而得到, 不作赘述.

参 考 文 献

- [1] 吴承义“用射线方法计算浅海混响平均强度 (I)”, 声学学报, (1979), No. 2, 114—119.
- [2] Л. М. 布烈霍夫斯基赫, “分层介质中的波”, 第六章, 中译本(科学出版社, 1960).
- [3] P. G. 柏格曼等, “水声学物理基础”, 上册, 中译本(科学出版社, 1958).
- [4] И. М. 雷日克等, “函数表与积分表”, 中译本(高等教育出版社, 1959).
- [5] Mackenzie, K. V., “Long-Range Bottom Reverberation”, J. A. S. A., **34** (1962), 62.
- [6] Macpherson, J. D., “Practical Model of Shallow-water Acoustic propagation”, J. A. S. A., **41** (1967), 850.

CALCULATION OF SHALLOW WATER REVERBERATION INTENSITY BASED ON RAY THEORY, PART (II)

Wu Cheng-yi

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

The method used for calculating the long range reverberation intensity in shallow homogeneous layer had been described in part I. It will be extended to include the inhomogeneous layer consisted of two isovelocity layers L_1 (near the bottom), L_3 (near the surface) and a gradient layer L_2 (Located between L_1 and L_3) in this paper.

The rays in this mixed layer may be divided into two classes according to whether they can penetrate through the gradient layer L_2 . Considering the fact that, at long ranges, the grazing angles of all effective rays would be small, the grazing angles needed to calculate the reverberation can be obtained approximately for both classes. Then the bottom and the surface reverberation intensities I_{3b}^+ , I_{3b}^- and I_{3s}^+ are calculated analytically, as the projector and the receiver are at the same place in layer L_3 (the sign “+” or “-” means the velocity gradient $a > 0$ or $a < 0$). The results for adequate long range show that $I_{3b}^+ \sim r^{-7/2}$ (for the omnidirectional scattering), $-r^{-4}$ (for the lambert's scattering), $I_{3b}^- \sim r^{-5}$ (for both scattering) and $I_{3s}^+ \sim r^{-1}$ (for the omnidirectional scattering).

A similar calculation can be carried out as well for the case the projector and the receiver are at the same place in L_1 , and no more difficulties will exist.

Captions of figures

1. Sound speed profile.
2. Ray trace of the first kind of rays in positive gradient layer.
3. Ray trace of the second kind of rays in positive gradient layer.
4. The numerical results from (2.1)—(2.7) and the theoretical curve from (2.14) for omnidirectional scattering bottom.
5. Rays for surface reverberation (the second kind).