

压电振子的多维耦合振动(I)——纯压电振子

任 树 初

(中国科学院声学研究所)

1981年8月17日收到

摘 要

本文利用表观弹性法分析了各种压电振子,包括矩形断面的长条、矩形板、实心圆柱和空心圆柱的二维和三维耦合振动的基模并且得到了上述振子的共振频率的极其简单的解析表达式。由这些公式计算了频率常数随振子几何尺寸改变的关系曲线。所得到的结果分别与用有限差法、有限元法以及里兹变分法所得到的结果满意地符合,也与实验结果满意地符合。

由于共振频率的计算公式极其简单,因此共振频率的计算可以用微型计算器很快完成而不必利用计算机,所以对工程设计和估算来说这种方法比上述种种方法要简便得多。

最后,应当强调指出这种方法显然也可用来计算复合压电振子的多维耦合振动的基频。

一、引 言

弹性体或压电体的多维耦合振动无论从理论上还是从工程上来说都是十分重要的,因此多年来一直是人们感兴趣的课题。由于问题的复杂性,一般说来是得不到严格的解析解的,因此在电子计算机出现以前就已发展了许多处理这类问题的近似方法,在电子计算机出现后近似方法特别是数值方法又得到进一步发展,目前已广泛采用有限元法来处理这类问题。尽管数值近似方法有种种优点,但由于工作量大,准备工作繁琐,必须用电子计算机才能得到所需要的数值结果,并且对结果的整理和解释也比较麻烦,这对于工程设计和估算来说是很不方便的,因此寻求一种计算简便的近似方法仍然是人们追求的目标。

近年来,森荣·司等提出了处理各向同性实心圆柱耦合振动的基模的表观弹性法^[1]。这种方法十分简单,计算结果与实验结果符合得很好。

本文尝试将文献[1]的方法加以推广,应用于工程上常用的各种基本压电陶瓷振子的二维和三维耦合振动,包括厚度和宽度之比为任意的压电长条的二维耦合振动,长度和宽度之比为任意的压电矩形板的二维耦合振动,高度和半径之比为任意的压电圆柱的三维耦合振动以及高度和半径之比为任意、厚度为任意的空心压电圆柱的三维耦合振动等等。得到了相应的表观弹性常数的表达式,计算了基频随尺寸比的变化曲线,计算结果分别与有限差、有限元以及里兹变分法所得出的结果符合得很好,也与实验结果符合得很好。由于计算公式十分简单,利用微型计算器即可很快得到所需的结果而无需计算机,这对工程设计和估算来说是极其方便的。

这种方法显然也可用来计算其它各种复杂形状的压电和非压电振子以及由它们所构成的复合振子的二维和三维耦合振动。

二、方法的基本原理

方法的基本原理可扼要地归纳如下：在只考虑伸缩变形而不计剪切变形的条件下，首先引入一个表征弹性应力比的耦合参数 n ，然后通过压电方程在忽略压电效应的情况下求得所考虑的压电振子在相应方向的表观弹性常数，所得到的表观弹性常数应当在压电振子的外形尺寸过渡到一维或二维问题时趋于相应的一维或二维问题的已知结果。

在得到了表观弹性常数之后，我们可以假定压电振子多维耦合振动的基频仍然应同时满足通常的外表面不受力的一维或二维振子所满足的频率方程，不过，此时的弹性常数应当用相应方向的表观弹性常数来代替。由两个频率方程我们可以建立起耦合参数 n 与压电振子的几何尺寸的关系，此外，由于耦合参数 n 又包含在频率方程中，因此我们就以 n 作为中间参数，从而建立起共振频率与几何尺寸的关系。在给定材料参数后，便可算出共振频率与几何尺寸的关系曲线，由此便可求出给定频率下振子的几何尺寸或给定几何尺寸下振子的共振频率。

关于方法的基本原理可以通过对各种具体问题的详细分析得到更进一步的了解。至于忽略压电效应所引起的误差可参看后面的讨论。

三、表观弹性常数和频率方程

下面分别就各种压电振子的二维和三维耦合振动的表观弹性常数和频率方程推导如下：

情况 1 矩形断面的压电陶瓷长条的二维耦合振动

假定压电陶瓷条的长度 L ，宽度 W 和厚度 T 分别沿着直角坐标的 x 轴， y 轴和 z 轴，条是沿厚度方向极化的。假定 T 和 W 可以比拟，且 $L \gg T$ ， $L \gg W$ ，只考虑伸缩应变，于是上述问题可简化为二维耦合振动问题。此时可设 x 方向的应变为零。引入表征应力比的耦合参数 $n = -\sigma_x/\sigma_y$ ，此处 σ_x 和 σ_y 分别表示 z 方向和 y 方向的正应力，负号表示两个应力的方向相反。因为我们感兴趣的是压电振子在发射状态下的共振频率，为了与过渡到极端情况下的共振频率相吻合，我们利用下述压电方程，在忽略压电效应后可得到：

$$\begin{aligned}\epsilon_y &= S_{11}^E \sigma_x + S_{11}^E \sigma_y + S_{13}^E \sigma_z \\ \epsilon_x &= S_{13}^E \sigma_x + S_{13}^E \sigma_y + S_{33}^E \sigma_z \\ 0 &= S_{11}^E \sigma_x + S_{12}^E \sigma_y + S_{13}^E \sigma_z\end{aligned}\quad (1)$$

式中 ϵ_y ， ϵ_x 及 σ_x ， σ_y ， σ_z 分别表应变分量和应力分量， S_{ij}^E 表弹性常数。

由 (1) 式的第三式解出 σ_x 代入其余两式，并且令

$$\nu_{12} = -S_{12}^E/S_{11}^E, \quad \nu_{13} = -S_{13}^E/S_{11}^E, \quad \nu_{31} = -S_{13}^E/S_{33}^E, \quad (2)$$

$$n = -\sigma_x/\sigma_y. \quad (3)$$

便得到：

$$\begin{aligned}\epsilon_y &= S_{11}^E [(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n] \sigma_y, \\ \epsilon_x &= S_{33}^E [(1 - \nu_{13}\nu_{31}) + \nu_{31}(1 + \nu_{12})/n] \sigma_x,\end{aligned}\quad (4)$$

由此可得到 y 方向和 z 方向的表观弹性常数分别为：

$$\begin{aligned} E_y &= \{S_{11}^E[(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n]\}^{-1}, \\ E_z &= \{S_{33}^E[(1 - \nu_{13}\nu_{31}) + \nu_{31}(1 + \nu_{12})/n]\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

依照上节所述的基本原理, 压电振子的基本模式共振频率应同时满足下面两个频率方程:

$$k_y W = \pi,$$

$$k_z T = \pi,$$

或

$$\begin{aligned} k_{0y} W &= \pi[(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n]^{-\frac{1}{2}}, \\ k_{0z} T &= \pi[(1 - \nu_{13}\nu_{31}) + \nu_{31}(1 + \nu_{12})/n]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} k_y &= \omega_0/c_y, \quad k_z = \omega_0/c_z, \quad c_y = (E_y/\rho)^{\frac{1}{2}}, \quad c_z = (E_z/\rho)^{\frac{1}{2}}, \\ k_{0y} &= \omega_0 \sqrt{\rho S_{11}^E}, \quad k_{0z} = \omega_0 \sqrt{\rho S_{33}^E}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \end{aligned} \quad (7)$$

f_0 和 ρ 分别是共振频率和材料密度.

(6) 式两式相除得:

$$\frac{W}{T} = \left(\frac{S_{33}^E}{S_{11}^E}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(1 - \nu_{13}\nu_{31}) + \nu_{31}(1 + \nu_{12})/n}{(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

当材料参数给定后, 以 n 作为参变量便可算出 W/T , $k_{0y}W$, $k_{0z}T$, 以 W/T 作为横坐标, $k_{0z}T$ 作为纵坐标绘出曲线, 则给定 ω_0 便可从曲线上求出相应的宽度 W 和厚度 T .

从(6)式可见, 当 $n = -\sigma_x/\sigma_y$ 由零变至无穷大时, 则 $k_{0y}W$ 由 $\pi(1 - \nu_{12}^2)^{-\frac{1}{2}}$ 单调减小至零, 而 $k_{0z}T$ 则由零单调上升直至 $k_{0z}T = \pi(1 - \nu_{13}\nu_{31})^{-1/2}$, 而 $k_{0y}W = \pi(1 - \nu_{12}^2)^{-1/2}$ 和 $k_{0z}T = \pi(1 - \nu_{13}\nu_{31})^{-1/2}$ 正好是退耦合的两种极端情况, 它们分别对应于厚度 T 和宽度 W 趋于零的两种弹性薄板的共振频率, 根据方法的基本原理, 这是应当预期得到的结果.

情况 2 矩形压电薄板的二维耦合振动

假定矩形压电薄板的长度 L , 宽度 W 和厚度 T 分别沿着 x 轴, y 轴和 z 轴, 压电薄板是沿厚度方向极化的. 假定 $L \gg T$, $W \gg T$, 此时有 $\sigma_z = 0$. 类似推导可得到 x 方向和 y 方向的表观弹性常数分别为:

$$E_x = [S_{11}^E(1 + \nu_{12}/n)]^{-1}, \quad (9)$$

$$E_y = [S_{11}^E(1 + \nu_{12}n)]^{-1}, \quad (10)$$

式中 $n = -\sigma_x/\sigma_y$, ν_{12} 的定义同前.

基模共振频率应同时满足下面两个频率方程:

$$k_{0x}L = \pi(1 + \nu_{12}/n)^{-1/2}, \quad (11)$$

$$k_{0y}W = \pi(1 + \nu_{12}n)^{-1/2}, \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega_0}{c_x}, \quad k_y = \frac{\omega_0}{c_y}, \quad c_x = \left(\frac{E_x}{\rho}\right)^{1/2}, \quad c_y = \left(\frac{E_y}{\rho}\right)^{1/2}, \\ k_{0x} &= k_{0y} = \omega_0 \sqrt{\rho S_{11}^E} \end{aligned} \quad (13)$$

(11) 式与 (12) 式相除得:

$$\frac{W}{L} = \frac{(1 + \nu_{12}/n)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \nu_{12}n)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

情况 3 有限长压电陶瓷圆柱的三维耦合振动

设圆柱的高度和直径分别为 $2l$ 和 $2a$, 圆柱沿高度极化, 于是有:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= s_{13}^E \sigma_r + s_{13}^E \sigma_\theta + s_{33}^E \sigma_z \\ \varepsilon_r &= s_{11}^E \sigma_r + s_{12}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z \\ \varepsilon_\theta &= s_{12}^E \sigma_r + s_{11}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z\end{aligned}\quad (15)$$

式中 $\varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ 和 $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ 分别是轴向、径向、切向的应变分量和应力分量。

应当指出, 本文的方法实质上是属于一种准静态修正, 在准静态情况下对于圆柱的轴对称问题有:

$$\begin{aligned}\text{令} \quad \sigma_r &= \sigma_\theta, \\ \sigma_z/\sigma_r &= \sigma_z/\sigma_\theta = -n,\end{aligned}\quad (16)$$

同前面类似, 我们可得到高度方向和径向表观弹性常数分别为:

$$E_z = [s_{33}^E(1 + 2\nu_{31}/n)]^{-1} \quad (17)$$

和

$$E_r = \{s_{11}^E[(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n]\}^{-1} \quad (18)$$

当过渡到各向同性体时有:

$$s_{33}^E = s_{11}^E = 1/E, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{31} = \nu$$

代入 (17) 和 (18) 式分别得到:

$$E_z = \frac{E}{1 + 2\nu/n} \quad (19)$$

$$E_r = \frac{E}{1 - \nu^2 + n\nu(1 + \nu)} \quad (20)$$

这就是文献 [1] 给出的结果。

下面考虑频率方程, 首先我们考虑高度振动。依照方法的基本原理, 基频应满足方程:

$$k_{0z}l = \frac{\pi}{2} (1 + 2\nu_{31}/n)^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

式中

$$k_{0z} = \omega_0 \sqrt{\rho s_{33}^E} \quad (22)$$

此外基频同时还应满足径向振动的频率方程:

$$k_r a J_0(k_r a) = (1 - \nu_{12}) J_1(k_r a) \quad (23)$$

上式的第一个根给出基频, 记此根为 R_1 , 则基频应满足方程:

$$k_r a = R_1$$

或

$$k_{0r} a = R_1 \{(1 - \nu_{12}^2) + n\nu_{13}(1 + \nu_{12})\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

式中

$$k_r = \omega_0 / \sqrt{E_r / \rho}, \quad k_{0r} = \omega_0 \sqrt{\rho s_{11}^E}. \quad (25)$$

由 (21) 和 (24) 式相除得:

$$\frac{l}{a} = \left(\frac{s_{11}^E}{s_{33}^E}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi}{2R_1} \cdot \frac{[(1 - \nu_{12}^2) + n\nu_{13}(1 + \nu_{12})]^{\frac{1}{2}}}{[1 + 2\nu_{31}/n]^{\frac{1}{2}}}. \quad (26)$$

情况 4 有限长空心压电陶瓷圆柱的三维耦合振动

设空心圆柱的高度为 $2l$, 内半径和外半径分别为 b 和 a , 完全类似于实心圆柱的分析, 在轴向极化情况下我们得到完全相同的表观弹性常数:

$$E_z = [s_{33}^E(1 + 2\nu_{31}/n)]^{-1}, \quad (17)$$

$$E_r = \{s_{11}^E[(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n]\}^{-1}. \quad (18)$$

对于高度方向的振动, 我们得到与实心压电圆柱完全相同的频率方程:

$$k_{0z}l = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2\nu_{31}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

式中

$$k_{0z} = \omega_0 \sqrt{\rho s_{33}^E}. \quad (28)$$

依照方法的基本原理, 基频同时还应满足下述径向振动的频率方程^[2]:

$$\frac{k_r a N_0(k_r a) - (1 - \nu_{12}) N_1(k_r a)}{k_r a J_0(k_r a) - (1 - \nu_{12}) J_1(k_r a)} = \frac{k_r b N_0(k_r b) - (1 - \nu_{12}) N_1(k_r b)}{k_r b J_0(k_r b) - (1 - \nu_{12}) J_1(k_r b)} \quad (29)$$

式中 J_n 和 N_n 分别表示第 n 阶贝塞尔函数和诺依曼函数。

对于给定的材料参数和比值 a/b , 由 (29) 式可得到一系列的根。由第一个根得到基频所满足的径向频率方程:

$$k_r a = A_1 \quad (30)$$

式中 $k_r = \omega_0/\nu$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, A_1 是 (29) 式的第一个根

$$\nu = [\rho s_{11}^E \{(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n\}]^{-\frac{1}{2}} \quad (31)$$

由 (27) 和 (30) 式得:

$$\frac{2l}{a} = \frac{\pi}{A_1} \left(\frac{s_{11}^E}{s_{33}^E}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{[(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n]^{\frac{1}{2}}}{(1 + 2\nu_{31}/n)^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (32)$$

情况 5 有限长各向同性空心圆柱的三维耦合振动

本情况是情况 4 的特例, 由情况 4, 当

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{31} = \nu, \quad s_{11}^E = s_{33}^E = 1/E$$

时, 相应的表观弹性常数和频率方程分别变为:

$$E_z = [1 + 2\nu/n]^{-1} \cdot E \quad (33)$$

$$E_r = [(1 - \nu^2) + \nu(1 + \nu)n]^{-1} \cdot E \quad (34)$$

$$k_{0z}l = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2\nu}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$k_r a = A_1 \quad (36)$$

式中

$$k_{0z} = \omega_0 \sqrt{\rho/E}, \quad k_r = \omega_0/\nu, \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \\ \nu = \left\{ \frac{E}{\rho[(1 - \nu^2) + \nu(1 + \nu)n]} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

四、数值计算和结果的比较

为了与已发表的用其它近似方法所得到的理论结果进行比较, 我们采用这些文献中所用的材料参数来进行计算, 现在按上节所述的各种情况依次叙述如下:

情况 1 矩形断面的压电陶瓷长条的二维耦合振动

材料: PCM-5 压电陶瓷, 其材料参数见文献 [3].

计算公式:

$$\frac{W}{T} = \left(\frac{s_{33}^E}{s_{11}^E} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{(1 - \nu_{13}\nu_{31}) + \nu_{31}(1 + \nu_{12})/n}{(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n} \right]^{1/2} \quad (37)$$

$$f_0 T = \frac{1}{2} (\rho s_{33}^E)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[(1 - \nu_{13}\nu_{31}) + \frac{\nu_{31}(1 + \nu_{12})}{n} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (38)$$

将材料参数代入(37)和(38)式,给定一系列 n 的值便可算出相应的 $f_0 T$ 和 W/T 的一系列值,绘成曲线如图1所示.图中的实线和虚线分别是本文的计算结果和文献[3]用有限元法计算的结果.由图可见,当 W/T 大于1时两种方法算出的结果符合得很好,当 W/T 小于1时,相对误差变大,其原因见后面的讨论.

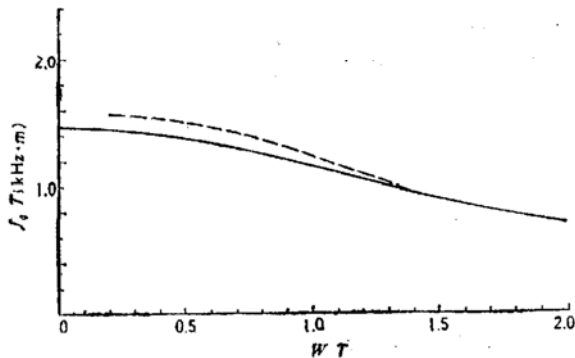


图1 矩形断面压电长条的频率常数同宽度与厚度之比的关系曲线

实线——本文的结果, 虚线——文献[3]的结果

Frequency constant of the rectangular cross-sectional piezoelectric bar as a function of the ratio of width to thickness

Solid line—results by this paper

Dashed line—results by [3]

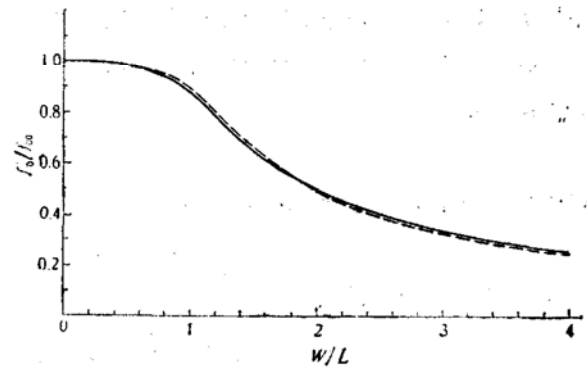


图2 矩形压电薄板的归一化频率同宽度与长度之比的关系曲线

实线——本文的结果, 虚线——文献[4]的结果

Normalized frequency of the rectangular piezoelectric plate as a function of the ratio of width to length

Solid line—results by this paper

Dashed line—results by [4]

情况2 矩形压电薄板的二维耦合振动

材料: 钛酸钡压电陶瓷, 材料参数见文献[4].

计算公式:

$$\frac{W}{L} = \frac{(1 + \nu_{12}/n)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \nu_{12}n)^{\frac{1}{2}}} \quad (39)$$

$$\frac{f_0}{f_{00}} = \left(1 + \frac{\nu_{12}}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (40)$$

式中

$$f_{00} = \frac{1}{2L} \left(\frac{1}{\rho s_{11}^E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

计算结果如图2所示, 图中实线和虚线分别是本文的计算结果和文献[4]用有限差计算的结果, 二者极为符合.

情况3 有限长压电陶瓷圆柱的三维耦合振动

材料: 钛酸钡压电陶瓷, 其材料参数见文献[5]. 计算公式:

$$k_r a J_0(k_r a) = (1 - \nu_{12}) J_1(k_r a) \quad (41)$$

$$\frac{a}{l} = \frac{2R_1}{\pi} \left(\frac{s_{33}^E}{s_{11}^E} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1 + 2\nu_{31}/n}{(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$f_0 \cdot 2l = \frac{1}{2} (\rho s_{33}^E)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{2\nu_{31}}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (43)$$

R_1 是 (41) 式的第一个根, ν_{12} 给定后, R_1 便确定了, 表 1 给出了 ν_{12} 变化所引起的 R_1 的变化。

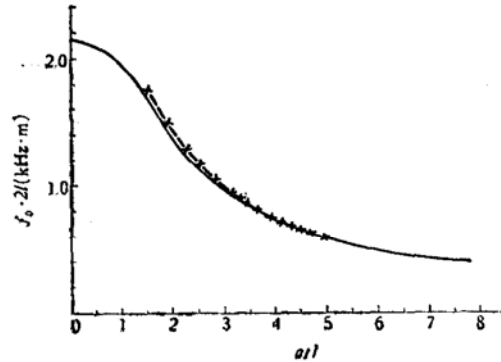


图 3 实心压电圆柱的频率常数同直径与高度之比的关系曲线

实线——本文的结果 虚线——文献[5]的理论结果 ×——文献[5]的实验结果

Frequency constant of the solid piezoelectric cylinder as a function of the ratio of diameter to height

Solid line—results by this paper Dashed line—theoretical results by [5] ×—experimental results by [5]

表 1 方程 (23) 的第一个根随泊松比的变化

Variations of first root of the equation (23) with Poisson's ratio

ν_{12}	R_1	ν_{12}	R_1
0.25	2.0172	0.32	2.0612
0.26	2.0236	0.33	2.0674
0.27	2.0300	0.34	2.0735
0.28	2.0363	0.35	2.0795
0.29	2.0426	0.36	2.0855
0.30	2.0489	0.37	2.0915
0.31	2.0551		

将材料参数代入计算公式便得到图 3 所示的曲线, 图中实线和虚线分别是本文的计算结果和文献 [5] 用里兹变分法所计算的结果, 图中 × 形点是文献 [5] 的实验结果。显然, 这些结果都符合得很好。

情况 4 有限长空心压电陶瓷圆柱的三维耦合振动

材料: 钛酸钡压电陶瓷, 其材料常数见文献 [6]。计算公式:

$$\frac{k_r a N_0(k_r a) - (1 - \nu_{12}) N_1(k_r a)}{k_r a J_0(k_r a) - (1 - \nu_{12}) J_1(k_r a)} = \frac{k_r b N_0(k_r b) - (1 - \nu_{12}) N_1(k_r b)}{k_r b J_0(k_r b) - (1 - \nu_{12}) J_1(k_r b)} \quad (44)$$

$$\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2A_1} \left(\frac{s_{11}^E}{s_{33}^E} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n}{(1 + 2\nu_{31}/n)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

$$k_{0r}a = A_1 \cdot [(1 - \nu_{12}^2) + \nu_{13}(1 + \nu_{12})n]^{-\frac{1}{2}} \quad (46)$$

式中 $2l$ 和 a 分别是圆柱的高度和外半径, A_1 是方程 (44) 的第一个根, $k_{0r} = \omega_0 \sqrt{\rho s_{11}^E}$.

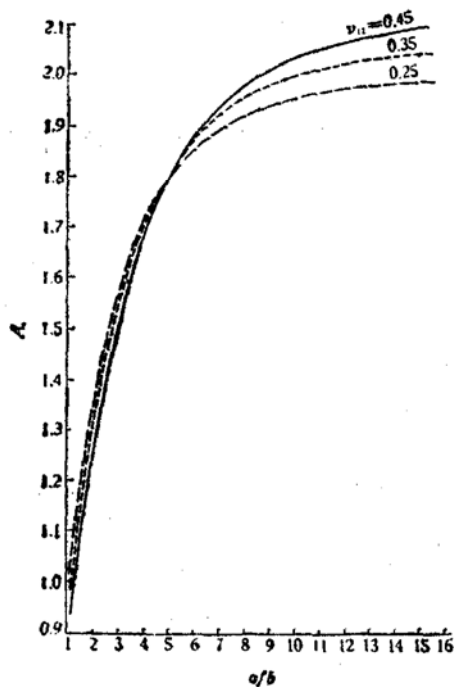


图 4 方程 (44) 的第一个根同外半径与内半径之比的关系曲线

First root of the equation (44) as a function of the ratio of outer radius to inner radius

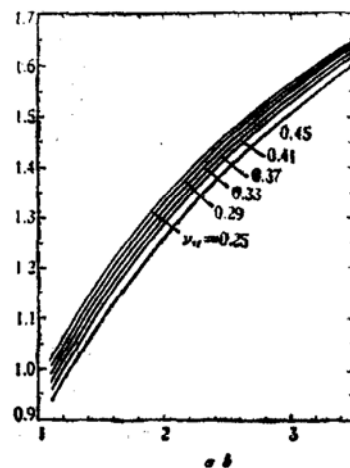


图 5 方程 (44) 的第一个根同外半径与内半径之比的关系曲线

First root of the equation (44) as a function of the ratio of outer radius to inner radius

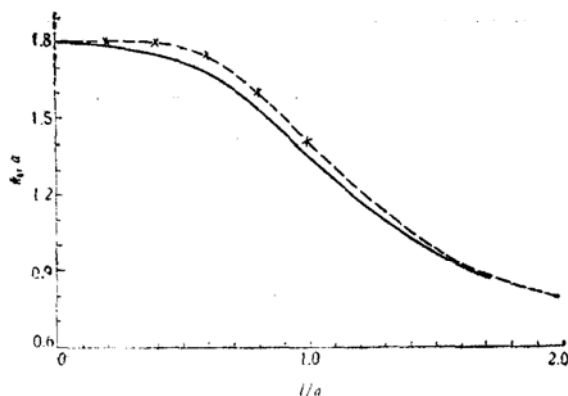


图 6 空心压电圆柱的频率常数同高度与直径之比的关系曲线 $a/b = 5$, $A_1 = 1.8$

实线——本文的结果 虚线——文献[6]的理论结果 ×——文献[6]的实验结果

Frequency constant of the hollow piezoelectric cylinder as a function of the ratio of height to diameter $a/b = 5$, $A_1 = 1.8$

Solid line—results by this paper Dashed line—theoretical results by [6] ×—experimental results by [6]

图 4 和图 5 分别给出了以 ν_{12} 为参量的 A_1 随 a/b 变化的曲线。

将材料参数代入计算公式算出的结果如图 6 所示。图中的实线和虚线分别是本文的结果和文献 [6] 用里兹变分法所得到的结果, × 形点是文献 [6] 的实验结果。可见它们符合很好。

情况 5 有限长各向同性空心圆柱的三维耦合振动

材料参数: $\nu = 0.30$, 计算公式:

$$L = \frac{2a/b}{(1+a/b)} \cdot \frac{\pi}{A_1} \cdot \left[\frac{(1-\nu^2) + \nu(1+\nu)n}{(1+2\nu/n)} \right]^{1/2} \quad (47)$$

$$Q = \frac{\omega_0 \bar{a}}{c} = \frac{(1+a/b)A_1}{2a/b} \cdot \left[\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu^2) + \nu(1+\nu)n} \right]^{1/2} \quad (48)$$

式中 $\bar{a} = (a+b)/2$ 是平均半径, $L = 2l/\bar{a}$, $h = a-b$, $H = h/\bar{a}$, $c = \sqrt{E/[\rho 2(1+\nu)]}$, $2l$ 是圆柱的高度, a 和 b 分别是圆柱的外半径和内半径, A_1 是方程 (44) 的第一个根。

给定不同的 a/b 的值, 在 $\nu = 0.30$ 时, 从图 4 或图 5 中的曲线查出相应的 A_1 的值, 由 (47) 和 (48) 式可算出 Q 随 L 的变化关系如表 2 所示。

表 2 各向同性空心圆柱的频率常数随高度与平均半径之比的变化关系
Variations of frequency constant of the isotropic hollow cylinder
with ratio of height to mean radius

$H = 1$, $a/b = 3.000$, $A_1 = 1.550$, $\nu = 0.30$

n	0.078	0.40805	1.3085	2.9945	8.3695	16.083	26.047
L	1	2	3	4	6	8	10
Q	1.7182	1.6114	1.3981	1.1559	0.8155	0.6217	0.5008
$Q(\text{FEM})^*$	1.7396	1.6748	1.4689	1.1980	0.8286	0.6271	0.5036
$\Delta Q/Q(\%)$	1.2	3.7	4.8	3.5	1.6	0.9	0.6

* FEM 表示 Finite Element Method.

表 2 中 FEM 者是文献 [7] 用有限元法算出的结果, 与本文的计算结果比较, 相对误差最大不超过 5%。

五、讨 论

1. 在本文的所有的公式推导中, 均假定两个方向的应力之比为 $\sigma_x/\sigma_y = -n$, 而 n 本身为正数, 而且与坐标无关, 这就意味着若一个方向是压缩应力, 则另一个方向是拉伸应力, 这是同我们所处理的这几种压电振子的基本模式的变形是吻合的^[4,5]。

2. 在我们的公式中, 均忽略了压电效应而只计及了弹性各向异性, 并且采用了恒定电场下的弹性常数 s_{ij}^E , 理由如下:

根据本方法的基本原理, 当压电振子过渡到一维或二维的极端情况时, 所计算的频率应当趋于一维或二维问题的已知结果, 例如, 对以 d_{31} 方式工作的细长条的纵振动和薄圆片的径向振动, 其串联共振频率, 即电端短路的机械共振频率取决于弹性常数 s_{ij}^E 。即如果我们只考虑这种特殊情况下的共振频率, 则可以在压电方程中取弹性常数 s_{ij}^E 而忽略压电效应, 于是问题便简化为各向异性体的纯弹性振动问题了。

此外,对于以 d_{33} 方式工作的细长条的纵振度,则短路机械共振频率不再取决于 s_{ij}^E ,而是由下式来确定:

$$k_{33}^2 \tan \frac{\omega l}{2c} = \frac{\omega l}{2c} \quad (49)$$

式中 l 是条的长度, $c = \sqrt{1/\rho s_{33}^D}$, ω 是圆频率.

对于长度大于厚度,宽度小于厚度,沿厚度方向极化的长条的厚度振动.简单计算即可证明,其短路机械共振频率由下式确定:

$$(k'_{33})^2 \tan \frac{\omega T}{2c} = \frac{\omega T}{2c} \quad (50)$$

式中

$$k'_{33} = \frac{k_{33} - B k_{31}}{\sqrt{(1 - B^2)(1 - k_{31}^2)}}, \quad B = \frac{s_{13}^E}{\sqrt{s_{11}^E s_{33}^E}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho(1 - B^2)(1 - k_{33}^2)s_{33}^E}}$$

T 是厚度, ω 是圆频率.

由 (49) 和 (50) 式可见,对于这后面两种情况,当我们计算短路机械共振频率时不能不考虑压电效应.可是在前面的全部推导中均忽略了压电效应,由此得出的短路机械共振频率的公式究竟同 (49) 和 (50) 式在形式上有什么不同? 在数值上有多大的差别?

由情况 3 和情况 4, 当 $l/a \rightarrow \infty$, 即 $n = -\sigma_z/\sigma_r = -\sigma_z/\sigma_\theta \rightarrow \infty$ 的条件下,我们得到细长圆管或细长条的纵振动的频率方程为:

$$f_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^E}} \quad (51)$$

式中 l 是条或圆管的长度.

由情况 1, 当 $W/T \rightarrow 0$, 即 $n = -\sigma_z/\sigma_y \rightarrow \infty$ 时,我们得到长条的厚度振动的频率方程:

$$f_0 = \frac{1}{2T} \sqrt{\frac{1}{\rho(1 - \nu_{13}\nu_{31})s_{33}^E}} \quad (52)$$

式中 T 是长条的厚度.

比较 (49) 和 (51) 式, (50) 与 (52) 式, 可见它们在形式上是大大不相同的, 对于常用的几种压电陶瓷材料, 从 (49) 和 (51) 式所计算的结果列于表 3, 从 (50) 和 (52) 式所计算的结果列于表 4. 从表 3 和表 4 可见, 对于退耦合的极端情况, 考虑压电效应与否所计算的频率常数的差别是不大的, 对于工程估算来说是允许的.

3. 从情况 2 图 2 的曲线可见, 对于矩形薄板的轮廓模式, 由于其极端情况下的频率常数取决于 s_{ij}^E , 因此本文的计算结果与文献 [4] 用有限差法算出的结果符合得极好. 简单推导即可表明, 对于矩形薄板的轮廓模式, 出现在波动方程中的弹性常数总是 s_{ij}^E , 因此在整个 W/L 的变化范围内, 两种方法所算出的结果都应很好符合, 图 2 的曲线的确证实了这点.

由情况 1 图 1 的曲线可见, 当 W/T 较小时, 由本文算出的结果与文献 [3] 用有限元法算出的结果差别变大, 这可从表 4 的结果得到解释, 而当 $W/T \gg 1$ 时, 则由于这种情况接近于压电薄板宽度振动的情况, 此时出现在波动方程中的弹性常数总是 s_{ij}^E , 因此结果应当更接近于文献 [3] 的结果, 图 1 的曲线确实证明了这点.

对于情况 3 图 3 的曲线, 当 $a/l \rightarrow 0$ 时, 本文的结果与文献 [5] 用里兹变分法算出的结果

表3 对各种压电材料从(49)式和(51)式所算出的频率常数的比较

A comparison of frequency constants calculated from Eq. (49) and Eq. (51) for various piezoelectric materials

材 料	BaTiO ₃	PCM-5	PZT-4	PZT-5 ¹
$f_0 l$ (Eq. (49))	2.200	1.370	1.537	1.365
$f_0 l$ (Eq. (51))	2.149	1.307	1.467	1.310
$\Delta(f_0 l)/f_0 l(\%)$	2.3	4.6	4.5	4

表4 对各种压电材料从(50)式和(52)式所算出的频率常数的比较

A comparison of frequency constants calculated from Eq. (50) and Eq. (52) for various piezoelectric materials

材 料	BaTiO ₃	PCM-5	PZT-4	PZT-5
$f_0 T$ (Eq. (50))	2.359	1.508	1.656	1.492
$f_0 T$ (Eq. (52))	2.310	1.449	1.589	1.437
$\Delta(f_0 T)/f_0 T(\%)$	2	3.9	4	3.7

差别不大,这可从表3的结果得到解释。当 $a/l \gg 1$ 时,则圆柱趋于压薄圆片,此时出现在波动方程中的弹性常数为 s_{ij}^E ,则本文结果应当与文献[5]的结果符合得更好,图3的曲线证实了这点。对情况4可类似解释。

4. 对于常用的径向极化压电陶瓷空心圆柱的三维耦合振动,本文并未进行分析。这是因为当圆柱退化为薄圆环的极端情况时,可以证明它的频率方程取决于 ν 阶和 $\nu - 1$ 阶的贝塞尔函数和诺依曼函数,此处 $\nu = \sqrt{s_{33}^E/s_{11}^E}$ 。由于阶次 ν 与材料参数有关,这就给计算带来很多麻烦,从而使本文的方法的优越性不再存在,因此对这种情况的分析我们就不进行了。

六、结 论

从上述结果可以得到下列结论:

1. 本文所述的方法是近似估算各种压电体和非压电体的多维耦合振动基频的一种简便方法。用微型计算器而无需电子计算机就可以很快得到所需要的结果,特别适合于工程设计和估算。

2. 各种情况的计算结果表明,除了情况1在 W/T 小于1之外,同各种数值近似方法所得出的结果相比较,最大相对误差不超过5%。这对工程设计来说是允许的。

3. 分析表明,如果按照通常的习惯来选用压电方程,当压电体的波动方程中所出现的弹性常数是 s_{ij}^E 而不是 s_{ij}^D 或 c_{ij}^D ,则本文的方法得出的结果更符合于实验结果。

4. 本方法所适用的条件是两个方向的应力比为负,而且与坐标无关,应用此方法时必须注意,例如压电矩形六面体的基本模式就不满足这个条件。

5. 显然,本方法也可应用于其它复杂形状的压电体(包括单晶和陶瓷)和非压电弹性体以及由它们所组成的复合结构的多维耦合振动基频的估算。

图4和图5的曲线引自施仲坚同志和陈守六同志的工作,特致谢意。

参 考 文 献

- [1] Mori, E. Itoh, K. and Imamura, A., "Analysis of a Short Column Vibrator by Apparent Elasticity Method and its Application", *Ultrasonics International 1977 Conference Proceedings*, (IPC Science & Technology Press 1977), 262.
- [2] Stephenson, C. V., "Radial Vibration in Short, Hollow Cylinders of Barium Titanate", *J. Acous. Soc. Am.*, **28**(1956), 51.
- [3] Sato, J. Kawabuchi, M. and Fukumoto, A., "Dependence of the Electromechanical Coupling Coefficient on the Width-to-Thickness Ratio of Plank-Shaped Piezoelectric Transducers used for electronically scanned ultrasound diagnostic systems", *J. Acous. Soc. Am.*, **66**(1979), 1609.
- [4] Lloyd, P. and Redwood, M., "Numerical solutions for the vibrations for a thin rectangular piezoelectric plate", *5^e congrès international d'Acoustique 1965*, L18.
- [5] Auld, B. A., "Acoustic Fields and Waves in Solids", 2 (John Wiley & Sons Inc, 1973), 344.
- [6] Лажуткин, В. Н., Михайлов, А. И., "Калёбания Пьезокерамических Цилиндров Конечных Размеров С Порязацией по Высоте", *АКУСТ.Ж.*, **22** (1976), 393.
- [7] Gladwell, G. M. L. and Vijay, D. K., "Natural Frequencies of Free Finite-Length Circular Cylinders", *J. Sound and Vibration*, **42**(1975), 387.

MULTI-DIMENSIONAL COUPLED VIBRATIONS OF PIEZOELECTRIC VIBRATORS (I) PURE PIEZOELECTRIC VIBRATORS

REN SHU-CHU

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Received August 17, 1981

ABSTRACT

In this paper, the fundamental modes of two- and three-dimensional coupled vibrations of various piezoelectric vibrators, including rectangular cross-sectional bar, rectangular plate, solid cylinder and hollow cylinder, are analyzed by using apparent elasticity method. Some quite simple analytic formulae for the resonant frequencies of above-mentioned piezoelectric vibrators are obtained and from those the vibrations of frequency constants with the geometric size of vibrators are calculated.

A satisfactory agreement is obtained between our results and the published experimental results and theoretical results which were calculated by using other various methods, including the finite difference method, the finite element method and Ritz variational method.

Because these formulae are quite simple, the resonant frequencies of vibrators can be quickly calculated by using scientific calculator, without having to use computer, and then this method is more convenient than the other methods above mentioned for engineering design and estimation.

In addition, the errors caused by neglecting piezoelectric effect are discussed in detail for a few kinds of usual piezoelectric material.

Finally, it should be emphasized that this method may be also used to calculate resonant frequencies of composite piezoelectric vibrators.