

适用有白色或有色观测噪声 数据的 Prony 方法

陈耀明 黄曾畅

(中国科学院声学研究所)

1982年3月11日收到

摘 要

本文考察了 Prony 方法在白色和有色噪声情况下的推广。在白色观测噪声背景下,为了得到自回归系数的无偏估计,根据实际观测过程服从自回归系数和动平均系数相同的自回归动平均模型,作者推导两类修正的尤-瓦 (Yule-Walker) 正则方程;当观测噪声是有色的情况下,利用二次回归的新概念,将有色噪声白化。最后,计算机的模拟计算验证了本文讨论的结果。

一、前 言

Prony 方法,或称极点提取法,是一种数据分析和参数估计的有效方法^[1-3]。Prony 方法和自回归谱分析方法一样^[4,5],以自回归信号模型为出发点,以自回归系数的估计为基本环节。自回归谱分析方法用自回归系数来计算信号的功率谱,而 Prony 方法则用自回归系数计算信号的复谐振频率和留数。这样, Prony 方法揭示了自回归信号模型与复指数线性组合信号模型之间的内在联系,物理图象更为清晰。在某种意义上,我们可以说, Prony 方法不仅能和自回归谱分析方法一样,能给出信号的结构信息(自回归系数);而且它还能给出信号的特征信息(复谐振频率和留数)。正因为如此,从心电图分析到提取雷达目标特征的不同领域中, Prony 方法得到日益广泛的应用。

本文主要讨论在白色或有色观测噪声背景中,如何应用 Prony 方法提取信号极点。多年来,人们^[2,6]在计算信号自回归系数时,都沿用线性预测的方法,即采用白噪声激励的全极点模型。然而,当观测噪声存在时,观测序列由信号和白噪声序列组成,计算自回归系数如果仍用尤-瓦 (Yule-Walker) 正则方程,那么必将给出自回归系数的有偏估计。为此,本文采用自回归系数和动平均系数相同的自回归动平均模型,即零极点模型,推导两类修正的尤-瓦方程,从而得到自回归系数的无偏估计。

当观测噪声为有色噪声时,本文提出二次回归的概念,即对观测序列先作一次回归变换,然后对所观测序列用修正的尤-瓦方程解出信号的自回归系数。我们认为,二次回归法是有色噪声白化的一种简单而有效的方法。

本文的讨论有助于扩大自回归谱分析和 Prony 方法的应用范围。

二、关于 Prony 方法

1795 年 Prony 在研究用有限项指数和内插函数值时, 提出了解决这个问题的有效方法. 七十年代中期, 在现代谱分析方法和技术蓬勃发展的高潮中 Mittra 和 Van Blaricum^[3] 又重新提出 Prony 方法. 下面我们先简要地介绍一下 Prony 方法.

Prony 最初的目的是要解下列形式的非线性方程组:

$$x_k = \sum_{n=1}^N r_n \exp(s_n k \Delta t) \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (1)$$

式中 $\{x_k\}$ 是已知数, 而 $\{r_n\}$ 和 $\{s_n\}$ 是未知数. 由(1)式可知, x_k 是以下复指数线性组合信号

$$x(t) = \sum_{n=1}^N r_n \exp(s_n t) \quad (2)$$

的等间隔采样值 $x(k\Delta t)$.

若 $x(t)$ 是实数, 则 r_n, s_n 必以共轭形式成对出现. 于是, (2)式可写成

$$x(t) = \sum_{n=1}^P |r_n| \exp(-p_n t) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad P \leq N \quad (3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} s_n &= -p_n + j\omega_n \\ r_n &= |r_n| \exp(j\varphi_n) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

我们称 p_n 为衰减常数, ω_n 为谐振频率, $|r_n|$ 为留数的模, φ_n 为幅角.

为了能从 $2N$ 个已知值 $\{x_k\}$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, 求得 $2N$ 个未知数 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Prony 把这样的非线性问题巧妙地化成以下三个步骤:

(1) Prony 证明, (1)式或(2)式规定的信号过程, 必然服从 N 阶自回归过程, 即有

$$x_n = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_{n-k} \quad n = N, N+1, \dots, 2N-1. \quad (5)$$

于是, (5)式可用来确定信号的自回归系数 $\{\alpha_k\}$;

(2) 若引入变量 $\mu_n = \exp(s_n \Delta t)$, 那么 μ_n 就是下列代数方程的根

$$\mu_n^N - \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu_n^{N-k} = 0 \quad (6)$$

记 $\mu_n = |\mu_n| \exp(jQ_n)$, 则信号极点 s_n 为

$$s_n = \frac{1}{\Delta t} [\ln |\mu_n| + jQ_n] \quad (7)$$

(3) 把 s_n 代入(1)式, 可以解得留数 r_n .

值得指出的是, Prony 方法最初是作为一个具体的数学问题提出来的, 有人认为这种方法仅仅是信号的一种复指数表示方法. 但是, 正如我们在前言中说的, Prony 方法揭示了复指数线性组合信号和自回归模型之间的内在联系, 由于 Prony 信号的自回归性, 它具有与现代谱分析中占重要地位的自回归谱分析一样的属性, 自回归信号和自回归谱分析的研究成果, 均可移用于 Prony 方法; 另一方面, 用 Prony 方法提取的信号极点和留数信息, 在信号分析、

参数估计和模式识别方面,都有广泛的应用前景.

三、Prony 信号的自回归系数 $\{\alpha_k\}$

Prony 信号模型的自回归性证明是很简单的. 若信号自回归阶数为 N , 定义信号自相关矢量 $\mathbf{r}_x$ 和自回归系数矢量 $\mathbf{a}$

$$\mathbf{r}_x = [r_x(1), r_x(2), \dots, r_x(N)] \quad (8)$$

$$\mathbf{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T \quad (9)$$

并记信号自相关矩阵 R_x 为

$$R_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \dots & r_x(N-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_x(N-1) & r_x(N-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

于是,自回系数 $\{\alpha_k\}$ 的解,由下列维纳方程得到

$$R_x \mathbf{a} = \mathbf{r}_x \quad (11)$$

众所周知,在线性预测分析中,信号模型 x_n 为

$$x_n = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_{n-k} + v_n \quad (12)$$

式中 $\{v_n\}$ 为白噪声序列,它与信号 x_n 是互相独立的. 如果在(12)式两端乘以 x_{n-j} , 并求期望,就可得到(11)式. 这种由白噪声激励的自回归模型,在语言信号的线性预测分析中,亦称全极点模型.

在实际信号分析中,相关矩阵 R_x 和相关矢量 $\mathbf{r}_x$ 是未知的. 我们只能从有限信号样本 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \dots, M$ 求得 R_x 和 $\mathbf{r}_x$ 的估计 $\hat{R}_x$ 和 $\hat{\mathbf{r}}_x$, 并用它们替代(11)式中的 R_x 和 $\mathbf{r}_x$, 以得到自回归矢量 $\mathbf{a}$ 的估计 $\hat{\mathbf{a}}$. 于是,(11)式变成

$$\hat{R}_x \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{r}}_x \quad (13)$$

(13)式就是在线性预测和自回归谱分析中,人们熟知的尤-瓦 (Yule-Walker) 正则方程. 该方程也可用最小二乘法直接得到. 至于 $\hat{R}_x$ 和 $\hat{\mathbf{r}}_x$ 的数学表示,依赖于是否对信号序列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \dots, M$ 作零值延拓以及延拓方式的不同而有所不同. 本文的计算将采用无延拓方式,即取

$$\hat{r}_{k,j} = \sum_{n=N+1}^M x_{n-k} x_{n-j}$$

必须指出,维纳方程(11)式和尤-瓦方程(13)式仅适用于无噪声的 Prony 信号,或白噪声激励的自回归信号.

当信号 $x(t)$ 中混有白噪声时,即观测序列 $\{y_n\}$ 为

$$y_n = x_n + v_n \quad (14)$$

现在,假定观测噪声 v_n 是零均值的白噪声. 我们注意到观测 y_n 并不服从自回归模型,将 $x_n = y_n - v_n$ 代入(5)式,有

$$y_n = \sum_{k=1}^N \alpha_k y_{n-k} + v_n - \sum_{k=1}^N \alpha_k v_{n-k}$$

记

$$w_n = v_n - \sum_{k=1}^N \alpha_k v_{n-k} \quad (15)$$

于是,有

$$y_n = \sum_{k=1}^N \alpha_k y_{n-k} + w_n \quad (16)$$

显然, $\{w_n\}$ 是有限相关的非白噪声序列. 混有白色观测噪声的 $\{y_n\}$, 即使 v_n 为白噪声, 我们也不可能得到 $r_x(0)$ 的无偏估计. 因此, 在信号 x_n 中混有噪声时, 直接用尤-瓦方程(13)式来估计自回归矢量 α 是不正确的. 为此, 我们需要对尤-瓦方程进行某种修正. 人们曾普遍有一种误解, 认为 Prony 方法和自回归谱分析在低信噪比时, 性能将急剧地下降, 我们将在后文看到, 这是与历来错误地在有噪声情况下直接引用尤-瓦方程(13)式这一事实相联系的.

比较(16)式和(12)式, y_n 虽然具有与 x_n 同样的自回归系数, 但 y_n 不是白噪声激励的自回归信号, 而是由非白噪声激励的回归信号. 由(15)式可知, $\{y_n\}$ 是一种自回归系数与动平均系数相同的特殊形式自回归动平均信号模型. 方程(11)式不是这种信号模型的维纳解, 而尤-瓦方程(13)式也不是这种信号模型的最小二乘解.

四、修正的尤-瓦方程

根据非白激励噪声 $\{w_n\}$ 的(15)式可知

$$\begin{aligned} E(y_{n+l}w_n) &= 0, \quad l \geq 1 \text{ 或 } l \leq -(N+1) \\ E(y_{n+l}w_n) &\neq 0, \quad -N \leq l \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

这样, 为利用观测 y_n 的(16)式计算自回归系数 $\{\alpha_k\}$, 在该式两端乘以 y_{n+l} , $l = 1, 2, \dots, N$, 并取期望值, 我们有

$$E(y_n y_{n+l}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k E(y_{n-k} y_{n+l}) + E(w_n y_{n+l})$$

根据(17)式, 上式化成

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k E(y_{n-k} y_{n+l}) = E(y_n y_{n+l}) \quad l, k = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

若记

$$r_y(k+l) = E(y_{n-k} y_{n+l}) \quad (19)$$

并令

$$R_y^{(+)} = \begin{bmatrix} r_y(2) & r_y(3) & \cdots & r_y(N+1) \\ r_y(3) & r_y(4) & \cdots & r_y(N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(N+1) & r_y(N+2) & \cdots & r_y(2N) \end{bmatrix} \quad (20)$$

和

$$\mathbf{r}_y^{(+)} = [r_y(1), r_y(2), \dots, r_y(N)]^T \quad (21)$$

我们就可把(18)式写成矩阵形式

$$R_y^{(+)} \mathbf{a} = \mathbf{r}_y^{(+)} \quad (22)$$

比较(22)式和(11)式, 尽管形式相同, 但是内容完全不同. (22) 式中的 $R_y^{(+)}$ 是观测自相关矩阵, 该式计算得到的 $\mathbf{a}$ 是严格的维纳解.

此外, 若用 y_{n-N-l} , $l = 1, 2, \dots, N$. 同时乘(16)式的两端, 由于 $E(w_n y_{n-N-l}) = 0$, 可以得到另一种形式的线性方程组

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k E(y_{n-k} y_{n-N-l}) = E(y_n y_{n-N-l}) \quad (23)$$

同样, 我们可以把(23)式写成矩阵形式

$$R_y^{(-)} \mathbf{a} = \mathbf{r}_y^{(-)} \quad (24)$$

其中观测自相关矩阵 $R_y^{(-)}$

$$R_y^{(-)} = \begin{bmatrix} r_y(N) & r_y(N-1) & \dots & r_y(1) \\ r_y(N+1) & r_y(N) & \dots & r_y(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(2N-1) & r_y(2N-2) & \dots & r_y(N) \end{bmatrix} \quad (25)$$

和观测自相关矢量 $\mathbf{r}_y^{(-)}$

$$\mathbf{r}_y^{(-)} = [r_y(N+1), r_y(N+2), \dots, r_y(2N)]^T \quad (26)$$

现在, 用相应的估计 $\hat{R}_y$ 和 $\hat{\mathbf{r}}_y$ 来代替(22)和(24)式中的 R_y 和 $\mathbf{r}_y$, 得到

$$\hat{R}_y^{(+)} \hat{\mathbf{a}}^{(+)} = \hat{\mathbf{r}}_y^{(+)} \quad (27)$$

$$\hat{R}_y^{(-)} \hat{\mathbf{a}}^{(-)} = \hat{\mathbf{r}}_y^{(-)} \quad (28)$$

我们称(27)和(28)式为修正的尤-瓦方程, 这两个方程也可以用广义最小二乘法得到, 在附录中, 我们讨论了估计 $\hat{\mathbf{a}}^{(+)}$ 和 $\hat{\mathbf{a}}^{(-)}$ 是有效的和无偏的.

从 $R_y^{(+)}$ 和 $R_y^{(-)}$ 的表示式(20)和(25)式中, 可以看到, 两类观测自相关矩阵都没有 $r_y(0)$ 项, 在(14)式中, 观测误差 $\{v_n\}$ 是白噪声序列, 因此观测自相关 $r_y(k)$ 为

$$r_y(k) = \begin{cases} r_x(0) + \sigma_v^2 & k = 0 \\ r_x(k) & k \neq 0 \end{cases} \quad (29)$$

显然, 两类修正的尤-瓦方程实质上是消除了白噪声的作用. 应该指出, 关于自回归动平均信号模型, 即零极点信号模型, 已有许多文献^[7-9]进行过深入的讨论, 并得到一般形式的修正尤-瓦方程^[7]. 本文在于着重指出: 当 Prony 信号 x_n 混有白噪声 v_n 时, 对观测 $y_n = x_n + v_n$, 必须采用同系数的自回归动平均模型, 并依据这一特定情况, 求得上述两类具体形式的修正的尤-瓦方程.

五、二次回归法

上节我们证明, 在白色噪声背景中, 自回归信号要用系数相同的自回归动平均模型, 以求得无偏的自回归系数估计. 现在, 我们讨论在有色噪声干扰时, 信号自回归系数可用二次回归法求得.

当观测噪声是有色的情况下, 观测 y_n 的表示式为

$$y_n = x_n + u_n \quad (30)$$

若自回归信号 x_n 是一个 N 阶自回归过程, 自回归系数为 $\{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, 则有

$$x_n = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_{n-k} \quad (31)$$

其次, 我们假定有色观测噪声 u_n 是由白噪声 v_n 激励的有限阶自回归过程, 设阶数为 M , 系数为 $\{\beta_l\}$. 这样, u_n 可写成

$$u_n = \sum_{l=1}^M \beta_l u_{n-l} + v_n \quad (32)$$

现在, 我们对观测 y_n 作如下的回归变换

$$\tilde{y}_n = y_n - \sum_{l=1}^M \beta_l y_{n-l} \quad (33)$$

式中 $\{\tilde{y}_n\}$ 是新观测序列. 将(30)式和(31)式代入(33)式, 有

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &= x_n + u_n - \sum_{l=1}^M \beta_l (x_{n-l} + u_{n-l}) \\ &= x_n - \sum_{l=1}^M \beta_l x_{n-l} + u_n - \sum_{l=1}^M \beta_l u_{n-l} \\ &= x_n - \sum_{l=1}^M \beta_l x_{n-l} + v_n \end{aligned}$$

记

$$\tilde{x}_n = x_n - \sum_{l=1}^M \beta_l x_{n-l} \quad (34)$$

则有

$$\tilde{y}_n = \tilde{x}_n + v_n \quad (35)$$

上式表明, 经过一次回归变换后的新观测 $\tilde{y}_n$, 就是自回归信号 $\tilde{x}_n$ 与白噪声 v_n 之和. $\tilde{y}_n$ 的表示式(35)式和(14)式是一致的. 于是, 上节讨论的修正的尤-瓦方程能用来计算 $\tilde{x}_n$ 的自回归系数估计. 值得注意的是, $\tilde{x}_n$ 是 x_n 的线性组合, 两者具有完全相同的自回归系数 $\{\alpha_k\}$. 证明如下:

将自回归信号 x_n 表示式(31)式, 代入(34)式, 我们有

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n &= \sum_{k=1}^N \alpha_k x_{n-k} - \sum_{l=1}^M \beta_l \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k x_{n-l-k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(x_{n-k} - \sum_{l=1}^M \beta_l x_{n-l-k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \tilde{x}_{n-k} \end{aligned} \quad (36)$$

由此可见, 对新观测 $\tilde{y}_n$ 作自回归处理, 完全等价于对 y_n 的自回归处理. 我们把(33)式进行的变换称为二次回归法. 在实际问题中, 先计算有色背景噪声的 $\{\beta_l\}$, 利用它的估计 $\{\hat{\beta}_l\}$ 替

代 $\{\beta_i\}$, 然后进行(33)式的回归变换. 这种二次回归的新概念, 是有色噪声的一种白化方法. 在本文最后部分, 我们将看到该方法是抗有色观测噪声的一种简单而有效的方法.

六、模拟计算例和讨论

为估算 Prony 方法抗观测噪声干扰的能力, 我们在 DJS-108 乙计算机上, 编制 Prony 方法的计算程序. 假定信号序列 $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, M$ 由两个单频分量组成, 其幅度相等, 初相为零, 频率分别为 $\omega_1 = 0.69336$ 和 $\omega_2 = 1.95122$. 观测 y_n 为

$$y_n = x_n + G n_n \quad (37)$$

其中 $\{n_n\}$ 可取白噪声序列 $\{v_n\}$, 或取有色噪声序列 $\{u_n\}$, G 是得到不同信噪比的因子.

首先, 我们令 $G = 0$, 即无观测噪声的情况. 当阶数 $N = 4$, 样本总数 $M = 128$ 时, 信号 x_n 的自回归系数 $\{\alpha_k\}$ 和极点 s_i 的计算值列于表 1.

表 1 无观测噪声时 $N = 4$ 的自回归系数和极点值
The values of autoregressive coefficient and poles at $N = 4$ Without Noise

k	$\{\alpha_k\}$	s_i	
		$\hat{\rho}_i$	$\hat{\omega}_i$
1	0.79558	0.0	0.69336
2	-0.85769	0.0	-0.69336
3	0.79558	0.0	1.95122
4	-1.0	0.0	-1.95122

第二, 当正弦分量受到白色观测噪声干扰时, 我们已证明, 修正的尤-瓦方程给出信号 x_n 自回归系数的无偏估计. 为了说明不同信噪比条件下, 极点频率受噪声干扰的影响, 我们定义极点频率估计相对精确度 ε

$$\varepsilon = 10 \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(\hat{\omega}_i' - \hat{\omega}_i)^2}{\hat{\omega}_i^2} \right) \quad (38)$$

同样, 定义自回归系数估计的相对精确度 η

$$\eta = 10 \log \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(\hat{\alpha}_k' - \hat{\alpha}_k)^2}{\hat{\alpha}_k^2} \right) \quad (39)$$

表 2 尤-瓦方程 50 次实现计算的自回归系数估计平均值 $\{\bar{\alpha}_k\}$ 及其方差

The mean of the estimates of autoregressive coefficients calculated by
50 realizations using Y-W Eq. (13) and its variance

k	$\{\alpha_k\}$	20dB		10dB		0 dB	
		$\{\bar{\alpha}_k'\}$	$V_{ar}(\alpha_k')$	$\{\bar{\alpha}_k'\}$	$V_{ar}(\alpha_k')$	$\{\bar{\alpha}_k'\}$	$V_{ar}(\alpha_k')$
1	0.79558	0.78273	1.05×10^{-3}	0.68687	8.43×10^{-4}	0.30480	6.05×10^{-3}
2	-0.85769	-0.84065	8.13×10^{-4}	-0.74608	9.33×10^{-4}	-0.35192	6.52×10^{-3}
3	0.79558	0.78279	1.29×10^{-3}	0.68764	8.07×10^{-4}	0.31682	4.59×10^{-3}
4	-1.0	-0.94661	7.81×10^{-2}	-0.83917	6.57×10^{-2}	-0.45190	4.05×10^{-3}

以上两式中 $\hat{\omega}_i$ 和 $\hat{\alpha}_k$ 分别代表噪声干扰时的极点频率和自回归系数估计值。

若保持信号 x_n 形式不变, $N = 4$, $M = 128$. 用计算机模拟产生一组白噪声序列 $\{v_n\}$, 其均值为零, 方差 $\sigma_v^2 = 1$. 为了比较尤-瓦方程和修正的尤-瓦方程的差别, 用 (13) 式和 (28) 式分别计算自回归系数估计 $\{\hat{\alpha}_k\}$. 表 2 和表 3 给出 50 次实现的平均结果. 表 4 是根据表 2 和表 3 数据计算的极点频率平均值. 三种不同信噪比的两种相对精确度 ε 和 η 列于表 5.

表 3 修正的尤-瓦方程 50 次实现计算的自回归系数估计平均值 $\{\hat{\alpha}_k\}$ 及其方差

The mean of the estimates of autoregressive coefficients calculated by 50 realizations using modified Y-W Eq. (28) and its variance

k	$\{\hat{\alpha}_k\}$	20dB		10dB		0 dB	
		$\{\hat{\alpha}_k\}$	$V_{ar}(\hat{\alpha}_k)$	$\{\hat{\alpha}_k\}$	$V_{ar}(\hat{\alpha}_k)$	$\{\hat{\alpha}_k\}$	$V_{ar}(\hat{\alpha}_k)$
1	0.79558	0.79907	6.32×10^{-4}	0.79566	7.13×10^{-5}	0.79528	5.08×10^{-3}
2	-0.85769	-0.85743	4.78×10^{-6}	-0.85689	9.39×10^{-5}	-0.85776	5.28×10^{-3}
3	0.79558	0.79523	7.56×10^{-6}	0.79395	1.24×10^{-4}	0.78588	6.46×10^{-3}
4	-1.0	-0.99901	8.02×10^{-6}	-0.98475	2.06×10^{-3}	-0.93050	6.09×10^{-2}

表 4 表 2 和表 3 数据计算的极点频率平均值

The mean of pole frequencies from data of Tab.2 and Tab. 3

SNR(dB)	信号极点频率		尤-瓦方程(13)式		修正的尤-瓦方程(28)式	
	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1'$	$\hat{\omega}_2'$	$\hat{\omega}_1'$	$\hat{\omega}_2'$
20	0.69336	1.95122	0.69468	1.95421	0.69334	1.95144
10	0.69336	1.95122	0.70490	1.97844	0.69295	1.95011
0	0.69336	1.95122	0.73918	2.09831	0.68745	1.93115

表 2 结果说明, 根据 (13) 式尤-瓦方程得到的信号自回归系数平均估计 $\{\hat{\alpha}_k\}$, 受白噪声干扰而偏离真值, 因此估计 $\{\hat{\alpha}_k\}$ 是一种有偏估计. 我们曾证明

$$\sum_{k=1}^N |\hat{\alpha}_k|^2 = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k + \sigma_v^2)^2}$$

其中 λ_k 为信号自相关矩阵的本征值, 由于所有的 $\lambda_k > 0$, 因此, 在白噪声观测误差影响下, 自回归系数的绝对值随信噪比降低而减小.

比较表 2 和表 3 的数据, (28) 式修正的尤-瓦方程给出的自回归系数估计是一种无偏估计. 后者计算的极点频率平均值 $\hat{\omega}_i'$ 也更接近真值. 表 5 说明修正的尤-瓦方程的相对精确度远优于尤-瓦方程. 在信噪比为 10dB 时, ε 和 η 均改善都在 25dB 以上. 上述结果充分说明, 对有白色观测噪声的 Prony 信号, 采用修正的尤-瓦方程估计自回归系数可大大抑制噪声的影响.

第三、二次回归法的处理结果, 分两种情况来讨论.

(1) 已知有色观测噪声的阶数 M 及其系数 $\{\beta_i\}$;

(2) 有色背景中有若干单频分量.

第一种情况 若已知 4 阶有色观测噪声的自回归系数 $\{\beta_i\}$:

$$\{\beta_i\} = 0.88, 0.76, -0.47, -0.33$$

表 5 三种信噪比的相对精确度 ε 和 η
The relative accuracy ε and η with three SNRs

SNR (dB)	尤-瓦方程(13)式		修正的尤-瓦方程(28)式	
	$\varepsilon(\text{dB})$	$\eta(\text{dB})$	$\varepsilon(\text{dB})$	$\eta(\text{dB})$
20	-55.25	-30.26	-81.69	-52.90
10	-36.27	-17.00	-64.73	-42.26
0	-22.99	-4.59	-40.50	-29.05

根据(32)式, 得到白噪声 v_n 激励的有限相关噪声 u_n 。图 1 表示白噪声 v_n 和相关噪声 u_n 的一次实现的相关函数。若取信噪比为 0 dB, (33) 和(30)式 16 次实现的平均结果列于表 6, 表 7 是两种相对精确度 ε 和 η 值。

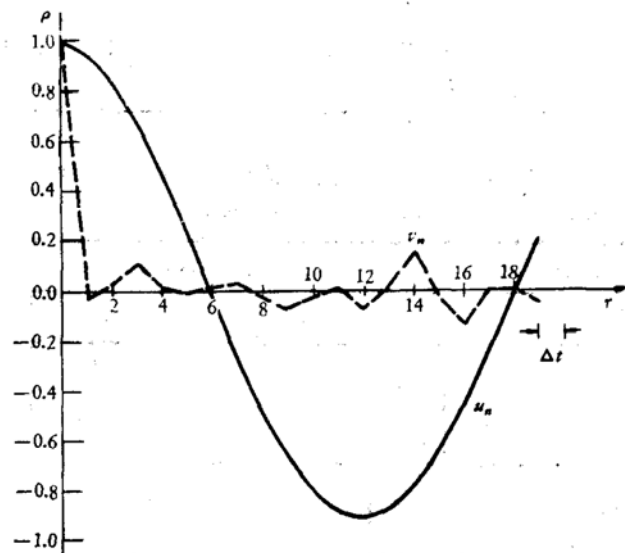


图 1 白噪声 v_n 和有限相关噪声 u_n 一次实现的相关函数
The autocorrelation function of one realization of the white noise v_n and the finite correlative noise u_n

表 6 信噪比 0dB 时, 16 次实现的 y_n 和 $\tilde{y}_n$ 计算的平均估计 $\{\hat{\alpha}_k\}$ 和 $\hat{\omega}_i$

The mean of the estimates of autoregressive coefficients $\{\hat{\alpha}_k\}$ and pole frequencies $\hat{\omega}_i$ calculated by 16 realizations of y_n and $\tilde{y}_n$ with SNR 0 dB

k	$\hat{\omega}_i$	y_n	$\tilde{y}_n$	$\{\hat{\alpha}_k\}$	y_n	$\tilde{y}_n$
		$\hat{\omega}_i'$	$\hat{\omega}_i'$		$\{\hat{\alpha}_k'\}$	$\{\hat{\alpha}_k'\}$
1	0.69336	0.81232	0.69347	0.79558	0.32911	0.79545
2				-0.85769	-0.75080	-0.85780
3	1.95122	1.96406	1.95111	0.79558	0.55734	0.79552
4				-1.0	-0.57132	-0.99951

第二种情况 在上述有色噪声中还有单频分量。设谱线频率 $\omega_{11} = 1.21243$, 取其强度与背景噪声之比为 10dB。通过模拟计算先求出合成背景噪声的自回归系数估计 $\{\hat{\beta}_i\}$, 然后比

表 7 信噪比 0dB 时, 表 6 数据计算的相对精确度 ε 和 η
The relative accuracy ε and η from data of Tab. 6 with SNR 0 dB

SNR(dB)	y_n		$\tilde{y}_n$	
	$\varepsilon(\text{dB})$	$\eta(\text{dB})$	$\varepsilon(\text{dB})$	$\eta(\text{dB})$
0	-18.32	-8.01	-78.49	-71.41

较 (33) 式和 (30) 式的不同结果. 根据不同阶极点平均法的判别准则, 我们不仅能给出 Prony 信号极点的阶数, 而且还给出信号极点的平均频率. 图 2 分别给出观测 y_n 和新观测 $\tilde{y}_n$ 的平均极点频率, 以及 $N = 4-12$ 各阶极点频率分布的直方图. 在图 2 的 (a) 中, 检测到的背景谱线平均频率 $\bar{\omega}_{11} = 1.28930$, 它与信号分量同时存在; 经过二次回归处理后, 在 (b) 中, 只剩下信号分量了. 同样, 图 3 是背景谱线频率 $\omega_{21} = 1.01243$ 和 $\omega_{22} = 2.02486$ 的对比结果.

以上二种情况的模拟计算告诉我们, 在有色观测噪声情况下, 用二次回归法处理, 可以得

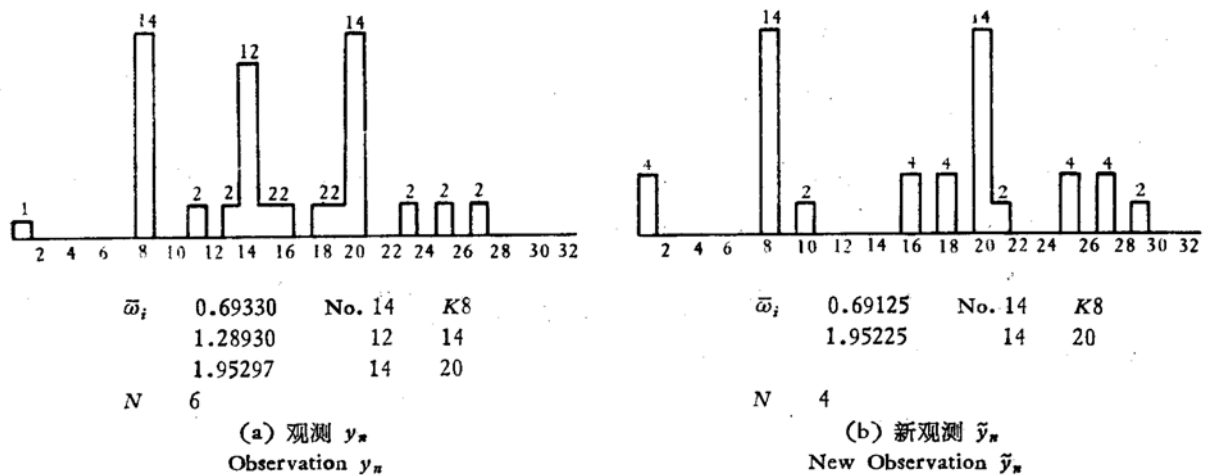


图 2 平均极点频率 $\bar{\omega}_i$ 及其 $N = 4-12$ 各阶极点频率分布直方图

The mean of the pole frequencies $\bar{\omega}_i$ and the histogram of $N = 4-12$ pole frequencies distribution
(The frequency of background spectral line $\omega_{11} = 1.21243$)

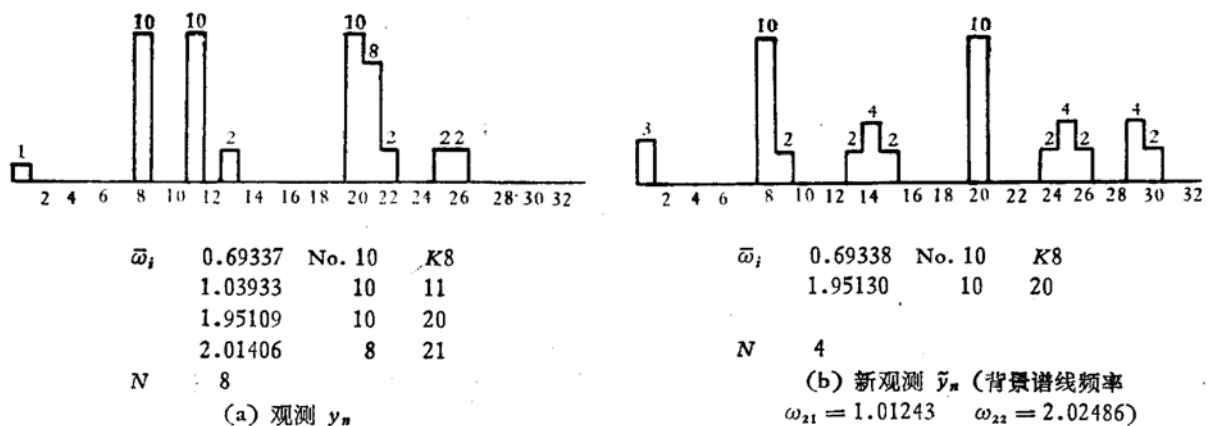


图 3 平均极点频率 $\bar{\omega}_i$ 及其阶数 $N = 4-12$ 各阶极点频率分布直方图

The mean of the pole frequencies $\bar{\omega}_i$ and the histogram of $N = 4-12$ pole frequencies distribution
(The frequencies of background spectral line $\omega_{21} = 1.01243$ and $\omega_{22} = 2.02486$)

到信号自回归系数的无偏估计;表7表明处理后两种相对精确度 ε 和 η 的改善高达60dB,显然,这一增益因子与所取 $\{\beta_l\}$ 的具体数值有关.作者认为,二次回归法抗有色干扰噪声的潜在能力是不可忽视的.在一些实际问题中,应用Prony方法提取信号极点的工作是有意义的.

附录 关于自回归系数估计 $\hat{\alpha}^{(+)}$ 和 $\hat{\alpha}^{(-)}$ 的有效性和无偏性

根据(19)式,我们对观测 $\{y_n\}$, $n=1, 2, \dots, M$, 采用无延拓方式, 定义观测自相关估计 $\hat{r}_y$

$$\hat{r}_y(k+l) = \frac{1}{M-2N} \sum_{n=N+1}^{M-N} y_{n-k} y_{n+l} \quad l, k=1, 2, \dots, N \quad (\text{A.1})$$

或者

$$\hat{r}_y(N+l-k) = \frac{1}{M-2N} \sum_{n=2N+1}^M y_{n-k} y_{n-N-l} \quad l, k=1, 2, \dots, N \quad (\text{A.2})$$

按照(A.2)的定义,修正的尤-瓦方程(28)式可写成

$$\sum_{k=1}^N \hat{r}_y(N+l-k) \hat{\alpha}_k^{(-)} = \hat{r}_y(N+l) \quad (\text{A.3})$$

此外,我们在(16)式两端同乘 y_{n-N-l} , $l=1, 2, \dots, N$ 对 n 从 $2N+1$ 到 M 求和,并除以 $1/(M-2N)$, 然后根据(A.2)式化简,得到

$$\sum_{k=1}^N \hat{r}_y(N+l-k) \alpha_k + \frac{1}{M-2N} \sum_{n=2N+1}^M w_n y_{n-N-l} = \hat{r}_y(N+l) \quad (\text{A.4})$$

若将(A.4)和(A.3)式相减,有

$$\sum_{k=1}^N \hat{r}_y(N+l-k) (\alpha_k - \hat{\alpha}_k^{(-)}) + \frac{1}{M-2N} \sum_{n=2N+1}^M w_n y_{n-N-l} = 0 \quad (\text{A.5})$$

现在,由于 $l \geq 1$, 当 $M \rightarrow \infty$ 时, (17)式告诉我们 y_{n-N-l} 和 w_n 是不相关的. 因而,有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M-2N} \sum_{n=2N+1}^M w_n y_{n-N-l} = E(w_n y_{n-N-l}) = 0$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \hat{r}_y(N+l-k) = r_y(N+l-k)$$

于是, (A.5)式趋于

$$\sum_{k=1}^N r_y(N+l-k) (\alpha_k - \hat{\alpha}_k^{(-)}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

就有

$$\hat{\alpha}_{k,\infty}^{(-)} = \alpha_k \quad (\text{A.7})$$

同理,我们也可证明

$$\hat{\alpha}_{k,\infty}^{(+)} = \alpha_k \quad (\text{A.8})$$

应该指出,只有(A.1)或(A.2)式定义的自相关估计,才能得到渐近无偏的估计 $\hat{\alpha}$.

参 考 文 献

- [1] Mitra R., Van Blaricum, M. L., "A Novel Technique for Extracting the SEM Poles and residues of

- a System Directly from Its Transient Response", 1974 *Annual URSI Meeting, Univ. of Colorado*.
- [2] Van Bhricum, M. L., "A Review of PRONY's Method Techniques for Parameter Estimation", *Proc. of EADC Spectrum Estimation Workshop*, (1978), 125.
- [3] 柯有安, "雷达目标识别", 国外电子技术, (1978), No. 4; No.5
- [4] Ulrych, T. J., Bishop, T. N., "Maximum Entropy Spectral Analysis and autoregressive Decomposition", *Rev. Geophys. and Space Phys.*, 13(1975), 183.
- [5] Haykin, S., "Nonlinear Methods of Spectral Analysis", (Springer-Verlag, 1979).
- [6] Marple, L., "High Resolution Autoregressive Spectrum Using Noise Power Cancellation", 1978. *ICA SSP Record*, 345.
- [7] Gersch, W., "Estimation of Autoregressive Parameters of a Mixed Autoregressive Moving-Average Time Series", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-15(1970), 583.
- [8] Tong, H., "Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike's Information Criterion", *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-21(1975), 476.
- [9] Kay, S. M., "Noise Compensation for Autoregressive Spectral Estimates", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-28(1980), 292.

PRONY METHOD FOR PROCESSING OF DATA WITH WHITE OR COLORED NOISE

CHEN YAO-MING HUANG ZENG-YANG
(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Received March 11, 1982

ABSTRACT

In this paper Prony method is extended to the processing of data with white and/or colored noise. When the observed noise is white, the observation procedure is obeyed the autoregressive moving-average model in which the autoregressive coefficients are equalled to the moving-average coefficients, and two kinds of modified Yule-Walker normal equations, which yielded the unbiased estimates of autoregressive coefficients, are derived. For the colored observed noise, new concept of second regression is developed, through which the colored noise can be whitened. Finally, the theoretical results are checked by the simulative calculations on a computer.