

水中有限长弹性圆柱的目标强度研究

蒋廷华 (JIANG TING-HUA)

中国科学院声学研究所 (Institute of Acoustics, Academia Sinica)

华孝先 (HUA XIAO-XIAN) 吴维琴 (WU WEI-QIN)

上海市计算技术研究所 (Shanghai Institute of Computational Technique)

1983年6月6日收到 (Received June 6, 1983)

摘要: 本文将有限长钢圆柱当作弹性体处理, 用有限元素法计算了频率为 27kHz 的声波从不同方向入射时的目标强度值, 从中得到目标强度随方位变化的曲线。同时对该圆柱的目标强度进行实验测量, 并将测量结果与上述计算结果和已知的刚性结果进行比较。结果表明弹性结果与实测结果更为接近。

ON TARGET STRENGTH OF AN ELASTIC CYLINDER WITH FINITE LENGTH IN WATER

Abstract In this paper, the target strength of a water-immersed finite steel cylinder is calculated for different incident direction using finite element method under the assumption that the cylinder is an elastic body and the 27 kHz incident sound wave is a plane wave. A corresponding experimental investigation was conducted and compared with the theoretical prediction. Results show that the theoretical prediction based on elastic body model is better than that based on the rigid body model.

一、引言

声波从流体介质中的物体上的散射问题至今已经用各种数学方法来求解, 其中对于具有简单形状的完全硬或完全软的物体而言问题比较简单, 而与之相应的弹性体的散射问题则要复杂得多。少量形状简单的物体(如球体, 无限长圆柱和椭球)在可分离变量的坐标系中的一个坐标变量在它们的全部表面上为一常数, 就可用分离变量法将散射问题的严格解用标准函数来表示^[1-4], 另一种求解一般形状物体声散射问题的方法为积分方程法, 但如果弹性散射体的运动微分方程具有复杂形式时, 在确定散射体表面法向速度分布时会产生困难^[5]。有限元素法是利用变分原理求解数学物理问题的一种近似数值计算方法, 首先将它应用到声学领域内是计算压电换能器的声辐射^[6], 其后是计算平面声波垂直入射或在几个特定方向上斜入射到弹性圆盘上所产生的散射声场^[7,8]。本文用有限元素法计算有限长弹性圆柱在不同入射波方向上的目标强度值变化曲线。

二、计算公式

有限元素法是通过在划分的空间单元上设置节点并建立单元内场变量变化的形函数从而将求解场的问题化为求解节点上场值问题的近似数值计算方法,将此法应用于求解弹性体声散射的物理模型如图 1 所示:将空间分成有限体积 R_1 和无限体积 R_2 两个区域,为计算方面起见 R_1 和 R_2 的分界面取作球面。前者包含弹性体和部分流体介质,后者全部充满流体介质。首先在区域 R_1 分别对弹性体和流体进行有限元划分,然后建立弹性体和流体在入射声波作用下以节点值为变量的有限元基本方程式,并从求解这些方程式获得声场的有限元近似解。

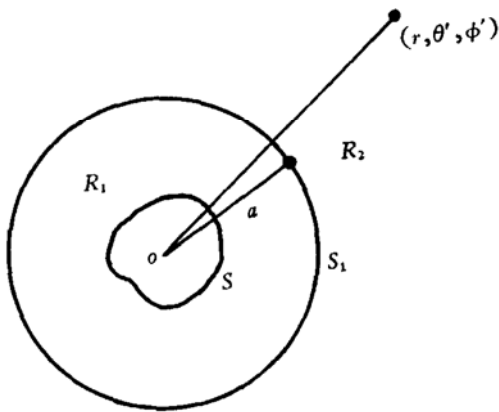


图 1 由闭合曲面 S_1 将空间分成 R_1 和 R_2 两个区域

Euclidean 3-Space divided into two regions by closed surface S_1

下以节点值为变量的有限元基本方程式,并从求解这些方程式获得声场的有限元近似解。

1. 有限元基本方程式

参考文献[7]给出了区域 R_1 的运动方程的有限元近似

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{pp} & \rho T^T \\ 0 & M_{uu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp} & 0 \\ -T & K_{uu} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 $\{p\}$ 与 $\{u\}$ 分别为流体中声压和弹性体位移的节点值按节点编号次序排成的列向量, ρ 为流体密度, ω 为声波角频率。方程组的各个系数矩阵均为所有划分单元的相应矩阵的叠加,而单个单元的矩阵分别由下列公式给出: 流体单元的“质量”矩阵

$$[M_{pp}] = \frac{1}{c^2} \int_V [N_p]^T [N_p] dV \quad (2)$$

式中 c 为流体中的声速, $[N_p]$ 为描写流体单元内声压随位置变化的形函数矩阵,上标 T 表示矩阵的转置,积分在单元体积上进行。

流体单元的“刚度”矩阵为

$$[K_{pp}] = \int_V [B_p]^T [B_p] dV \quad (3)$$

其中 $[B_p]$ 为形函数对坐标变量的导数组成的矩阵,其形式与选用的坐标系有关。

弹性体单元的质量矩阵为

$$[M_{uu}] = \int_V [\bar{N}]^T \rho' [\bar{N}] dV \quad (4)$$

其中 $[\bar{N}]$ 为描写弹性体单元内位移向量随位置变化的形函数矩阵, ρ' 为弹性体密度。

弹性体单元的刚度矩阵为

$$[K_{uu}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (5)$$

其中 $[B]$ 矩阵将弹性体单元内的应变与节点位移相联系, $[D]$ 矩阵将单元内应力与应变相联系。

弹性体与流体交界面单元的耦合矩阵为

$$[T] = \int_S [\bar{N}]^T [\Lambda_n] [N_p] dS \quad (6)$$

它将交界面一侧的弹性体单元的节点加速度与另一侧流体单元的节点力相联系。\$[\Lambda_n]\$ 为交界面法线方向余弦矩阵。\$\{F_p\}\$ 为作用在具有 \$S_1\$ 表面的那些流体单元节点上的力向量，它由 \$S_1\$ 表面的法向速度分布所决定。因为是体积单元，所以节点力不仅仅出现在 \$S_1\$ 表面的节点上，它由下式给出

$$\{F_p\} = - \int_{S_1} j\omega\rho v^n [N_p]^T dS \quad (7)$$

积分在单元的 \$S_1\$ 表面部分上进行。但如果单独将表面 \$S_1\$ 上的声压用表面 \$S_1\$ 上的节点值和相应的形函数来表示，那么外力对 \$S_1\$ 表面的作用将被移置到 \$S_1\$ 表面的那些节点上，因为这种处理有利于简化计算，我们将在后面采用。

2. 有限长弹性圆柱散射声压的有限元解法

用有限元素法求解像圆柱这类具有轴对称性物体的散射时可利用这种对称性。当平面声波在方位角 \$\phi = 0\$ 的平面内以不同方向入射到圆柱体上而使其受激振动时，各点的位移向量中的径向和轴向分量是 \$\phi\$ 的偶函数，环向分量是 \$\phi\$ 的奇函数。同样，其周围流体中的声压是 \$\phi\$ 的偶函数。因此这些量对 \$\phi\$ 展开的傅氏级数只存在余弦或正弦项，并且展开式的各号系数 \$u_m^r(r, z)\$, \$u_m^z(r, z)\$, \$u_m^\phi(r, z)\$ 和 \$p_m(r, z)\$ 不再是 \$\phi\$ 的函数，即具有轴对称性。若以这些系数作为求解的场变量，同时选取绕 \$z\$ 轴的迴转体作为单元，那么单元内的场变量仅仅是两个坐标变量 \$r\$ 和 \$z\$ 的函数，因此可以用这两个坐标变量来构成形函数并形成 (1) 方程组的系数矩阵和右端项，这样就将三维空间问题简化为二维问题处理，从而得到以这些展开系数为变量的有限元基本方程式(即第 \$m\$ 号圆函数子空间中的有限元基本方程式)如下：

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{pp} & \rho T^T \\ 0 & M_{uu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp} & 0 \\ -T & K_{uu} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p_m \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (F_p^{S_1})_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

上式中力函数 \$(F_p^{S_1})_m\$ 取决于表面 \$S_1\$ 上的法向速度分布，而法向速度又与声压相联系，因此 \$(F_p^{S_1})_m\$ 中尚包含 \$p_m\$，必须找出其关系方能求解，由于它们在 \$S_1\$ 上都是变量。因此难以找到简单关系。但声压和法向速度按球函数展开式的系数在 \$S_1\$ 上是常量，并且文献[10]已经给出了当存在入射声波情况下在 \$S_1\$ 上这两个量间的简单关系式，因此可以先写出球函数子空间中节点力与法向速度的关系，并利用文献[10]的结果将节点力与声压联系起来，然后通过线性空间的坐标变换找出声压和节点力分别在圆函数基底和球函数基底上的坐标之间的关系，最后得到在球面 \$S_1\$ 的节点上以各号球函数子空间中的声压为变量的线性方程组。

由于散射声压和总声压为方位角 \$\phi\$ 的偶函数，在球坐标系中将总声压按球函数展开时，随 \$\phi\$ 变化的项只存在 \$\cos m\phi\$ (\$m = 0, 1, 2, \dots, M\$)

$$p(R, \theta, \phi) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{m=0}^L p_{L,m}(R) Y_L^m(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{L=m}^{\infty} p_{L,m}(R) Y_L^m(\theta, \phi) \quad (9)$$

其中球函数可表示为随 \$\theta\$ 变化的因子与 \$\cos m\phi\$ 之积

$$Y_L^m(\theta, \phi) = \Theta_L^m(\theta) \cdot \cos m\phi \quad (10)$$

$$\Theta_L^m(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2L+1)(L-m)!}{4\pi(L+m)!}} P_L^m(\cos\theta) \quad (11)$$

其中 $P_L^m(\cos\theta)$ 为缔合勒上特函数。为寻找球面 S_1 上同一点上的 p_m 值与 $p_{L,m}$ 值之间的关系, 可将 $\cos m\phi$ ($m = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{L}$) 看作一组基底向量, 将 $Y_L^m(\theta, \phi)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{L}$; $L = m, m+1, \dots, \mathcal{L}$) 看作另一组基底向量, 那 $p_m(r, z)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{L}$) 可看作向量 $p(r, z, \phi)$ (它在物理学上是标量) 在基底 $\cos m\phi$ ($m = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{L}$) 上的坐标, 而 $p_{L,m}(R)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{L}$; $L = m, m+1, \dots, \mathcal{L}$) 可看作 $p(R, \theta, \phi)$ 在基底 $Y_L^m(\theta, \phi)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{L}$; $L = m, m+1, \dots, \mathcal{L}$) 上的坐标, 利用不同基底上的坐标变换矩阵关系式^[9]不难得到球面 S_1 上同一点的 $p_m(r, z)$ 与 $p_{L,m}(a)$ 之间的关系

$$p_m(r, z) = \sum_{L=m}^{\mathcal{L}} \Theta_L^m(\theta) p_{L,m}(a) \quad (12)$$

其中 a 为球面 S_1 的半径。

当取图 2 所示的面元代替体元时, 作用在球面 S_1 上的节点 i 上的力为面元 e_{i-1} 和 e_i 两部分的贡献所组成, (7) 式的第 i 个分量为

$$(F_p^{S_1})^i = -j\omega\rho \left[\int_{e_{i-1}} N_i v^n ds + \int_{e_i} N_i v^n ds \right]$$

对积分号下的法向速度也用其节点值和与描写声压变化相同的形函数来表示, 就有

$$\begin{aligned} (F_p^{S_1})^i = & -j\omega\rho \left[\int_{e_{i-1}} N_i N_{i-1} dS \cdot v_{i-1}^n \right. \\ & + \left(\int_{e_{i-1}} N_i N_i dS + \int_{e_i} N_i N_i dS \right) v_i^n \\ & \left. + \int_{e_i} N_i N_{i+1} dS \cdot v_{i+1}^n \right] \end{aligned} \quad (13)$$

因为在球函数子空间中 S_1 上的声压和法向速度都是常量, 因此描写它们随位置变化的形函数应为常数, 并且一个面元有两个节点, 故形函数的两个元素均等于 $1/2$, 从而有

$$(F_p^{S_1})_{L,m}^i = -\frac{1}{2} j\omega\rho S_i v_{L,m}^n(a)$$

其中 S_i 为与节点 i 邻接的面元面积之和。对节点力应用 (2.5) 式可得

$$(F_p^{S_1})_m^i = -\frac{1}{2} j\omega\rho \sum_{L=m}^{\mathcal{L}} \Theta_L^m(\theta_i) S_i v_{L,m}^n(a) \quad (14)$$

文献[10]中给出了存在入射声波情况下第 (L, m) 号球函数子空间中球面 S_1 上的声压和法向速度间的关系式

$$v_{L,m}^n(a) = \frac{1}{j\omega\rho a} \left[\frac{1}{\lambda_L(ka)} p_{L,m}(a) - \alpha_L(ka) p_{L,m}^{\text{inc}}(a) \right] \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_L(ka)} &= L + 1 - ka \frac{h_{L-1}^{(1)}(ka)}{h_L^{(1)}(ka)} \\ \alpha_L(ka) &= \frac{1}{ka h_L^{(1)}(ka) j_L(ka)} \end{aligned}$$

$p_{L,m}^{\text{inc}}(a)$ 为入射声波在球面 S_1 上按球函数展开式中 $Y_L^m(\theta, \phi)$ 项的系数, 对于在 $\phi = 0$ 的平面

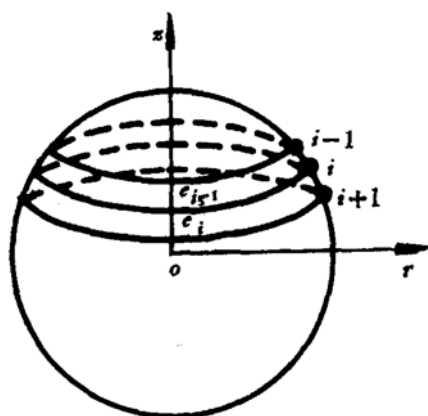


图 2 将球面 S_1 划分为带状单元
Divide the spherical surface S_1 into
zone-type elements

内传播方向与 z 轴成 u_l 角的单位振幅的平面波而言有^[11]

$$p_{L,m}^{\text{inc}}(a) = 4\pi\epsilon_m i^L \Theta_L^m(\cos u_l) j_L(ka) \quad (16)$$

其中

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{当 } m = 0 \\ 2 & \text{当 } m \neq 0 \end{cases}$$

$j_L(ka)$ 为 L 阶球贝塞尔函数, $h_L^{(1)}(ka)$ 为 L 阶第一类球汉克尔函数。将 (15) 式代入 (14) 式, 然后将 S_1 上所有节点上的力按编号次序排成一个列向量, 就有

$$\{F_p^{S_1}\}_m = -\frac{1}{2a} \sum_{L=m}^{\mathcal{L}} \frac{1}{\lambda_L(ka)} [M_{L,m}^{S_1}] \{p_{L,m}(a)\} + \frac{1}{2a} \sum_{L=m}^{\mathcal{L}} \alpha_L(ka) [M_{L,m}^{S_1}] \{p_{L,m}^{\text{inc}}(a)\} \quad (17)$$

式中 $[M_{L,m}^{S_1}]$ 矩阵为下式给出的 L_s 阶对角矩阵

$$[M_{L,m}^{S_1}] = \text{diag}[\Theta_L^m(\theta_1)S_1, \Theta_L^m(\theta_2)S_2, \dots, \Theta_L^m(\theta_{L_s})S_{L_s}] \quad (18)$$

其中 L_s 表示 S_1 上的流体节点数。将 (12) 和 (17) 代入 (8) 式, 并将矩阵 M_{pp} 和 K_{pp} 分成与球面 S_1 上的节点数和 S_1 内的节点数相应的四个分块, 将 T 矩阵分成两个分块, 就可得到球面 S_1 上以 $p_{L,m}(a)$ 为变量的 $(\mathcal{L} - m + 1)$ 个线性方程组

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 \begin{bmatrix} (\bar{M}_{pp})_{ss} & (M_{pp})_{si} & \rho T_1^T \\ (\bar{M}_{pp})_{is} & (M_{pp})_{ii} & \rho T_2^T \\ 0 & 0 & M_{uu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{K}_{pp})_{ss} & (K_{pp})_{si} & 0 \\ (\bar{K}_{pp})_{is} & (K_{pp})_{ii} & 0 \\ -\bar{T}_1 & -T_2 & K_{uu} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2a\lambda_L} \begin{bmatrix} M_{L,m}^{S_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} p_s(u_l) \\ p_i(u_l) \\ u(u_l) \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_L}{2a} p_{L,m}^{\text{inc}}(u_l) \begin{Bmatrix} [M_{L,m}^{S_1}]E \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

由于 m 取值从 0 到 $\mathcal{L}$, 故方程组总数应为 $(\mathcal{L} + 1)(\mathcal{L} + 2)/2$ 。分块矩阵第一列分块上加横表示用对角矩阵 H_L^m 乘原来的分块

$$\begin{aligned} (\bar{M}_{pp})_{ss} &= H_L^m (M_{pp})_{ss}, (\bar{M}_{pp})_{is} = H_L^m (M_{pp})_{is}, (\bar{K}_{pp})_{ss} = H_L^m (K_{pp})_{ss}, \\ (\bar{K}_{pp})_{is} &= H_L^m (K_{pp})_{is}, \bar{T}_1 = H_L^m T_1 \end{aligned} \quad (20)$$

H_L^m 对角矩阵由下式给出

$$H_L^m = \text{diag}[\Theta_L^m(\theta_1), \Theta_L^m(\theta_2), \dots, \Theta_L^m(\theta_{L_s})] \quad (21)$$

E 为 L_s 维单位向量。分别求解不同 L, m 值的 $(\mathcal{L} + 1)(\mathcal{L} + 2)/2$ 个 (19) 式给出的线性方程就可得同样个数的 $p_{L,m}(a)$ 值, 从而可以求得场点 (r, θ', ϕ') 处的散射声压^[11]

$$p_s(r, \theta', \phi') = \sum_{L=0}^{\mathcal{L}} \sum_{m=0}^L [p_{L,m}(a) - p_{L,m}^{\text{inc}}(a)] \frac{h_L^{(1)}(kr)}{h_L^{(1)}(ka)} \Theta_L^m(\theta') \cos m\phi'$$

上式若取 $\theta' = \pi - u_l, \phi' = \pi$, 就得到反向散射声压, 远场处有 $h_L^{(1)}(kr) \approx (-i)^{L+1} e^{ikr}/kr$, 因此声压随 r 作一次方衰减, 按 r 的一次规律推算到距目标 1 米处, 就不难求出在入射方向为 u_l 时的目标强度值。逐一改变 u_l 角, 就可得到圆柱目标强度随着入射声波的方向变化的曲线。

3. 单元矩阵元素的计算公式

选取柱坐标系的 z 轴与圆柱轴重合, 坐标原点取在圆柱中点, 将圆柱和周围流体划分为绕 z 轴的迴转三棱体单元, 如图 3 所示这些单元在 r - z 平面内的截面为三角形, 流体单元内的声压 p_m 的有限元近似式为

$$p(r, z) = [N_p(r, z)]\{p\}$$

上式对所有 m 都成立, 故略去脚标 m . $\{p\}$ 为三角形三顶点(取作节点)声压排成的列向量, 三顶点 i, j, m 按逆时针排列

$$\{p\} = [p_i p_j p_m]^T$$

形函数矩阵由下式给出

$$[N_p(r, z)] = [N_i(r, z) N_j(r, z) N_m(r, z)] \quad (22)$$

N_i, N_j 和 N_m 由下式给出^[12]

$$N_i = \frac{1}{2\Delta_e} (a_i + b_i r + c_i z);$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta_e} (a_j + b_j r + c_j z);$$

$$N_m = \frac{1}{2\Delta_e} (a_m + b_m r + c_m z)$$

其中 Δ_e 为三角形面积, 九个常数按下列公式由三节点的 r, z 坐标给出

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j; \quad b_i = z_j - z_m; \quad c_i = r_m - r_j$$

$$a_j = r_m z_i - r_i z_m; \quad b_j = z_m - z_i; \quad c_j = r_i - r_m$$

$$a_m = r_i z_j - r_j z_i; \quad b_m = z_i - z_j; \quad c_m = r_j - r_i$$

由于弹性体的位移本身是向量, 将其三个分量分别用其节点值和形函数描写, 那么如果对三个分量选用相同的形函数的话, 位移向量将由九个节点值和一个形函数来描写, 因此描写弹性体位移变化的形函数应是行数为 3, 列数等于 9 的矩阵

$$[\bar{N}]^e = [I_3 N_i \quad I_3 N_j \quad I_3 N_m], \quad (23)$$

其中 I_3 为三阶对角幺矩阵, N_i, N_j 与 N_m 与 (22) 式同。

利用 (22) 式和 (23) 式, 就可计算 (2) 到 (6) 式积分号下的各个矩阵从而求得单个单元的诸系数矩阵的表达式如下:

(1) 流体单元的“质量”矩阵。它是由九个元素组成的三阶方阵, 其 s 行 t 列元素为

$$m_{st}^e = \frac{\pi}{2c^2 \Delta_e^2} \iint_e [a_s a_t r + (a_s b_t + b_s a_t) r^2 + (a_s c_t + c_s a_t) r z + (b_s c_t + c_s b_t) r^2 z + b_s b_t r^3 + c_s c_t r z^2] dr dz \quad (s, t = i, j, m) \quad (24)$$

(2) 流体单元的“刚度”矩阵。它同样也是三阶方阵, s 行 t 列元素为

$$k_{st}^e = \frac{b_s b_t + c_s c_t}{4\Delta_e^2} V \quad (s, t = i, j, m) \quad (25)$$

其中 V 为三棱迴转体单元的体积, 由下式给出

$$V = \frac{\pi}{3} [z_m(r_j^2 + r_j r_m - r_i^2 - r_m r_i) + z_j(r_i^2 + r_i r_j - r_m^2 - r_j r_m) + z_i(r_m^2 + r_m r_i - r_j^2 - r_j r_i)] \quad (26)$$

(3) 弹性体单元的质量矩阵。为九个对角块组成的九阶方阵

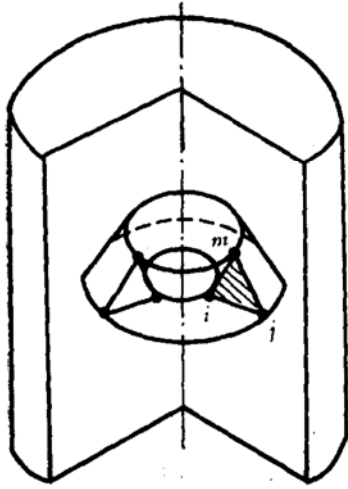


图3 将圆柱体和流体划分为迴转三棱体单元

Divide the Cylinder and fluid into axisymmetric finite elements with curved, triangular Cross sections

$$[M_{uu}]^e = \begin{bmatrix} I_3 m_{ii}^e & I_3 m_{ij}^e & I_3 m_{im}^e \\ I_3 m_{ji}^e & I_3 m_{jj}^e & I_3 m_{jm}^e \\ I_3 m_{mi}^e & I_3 m_{mj}^e & I_3 m_{mm}^e \end{bmatrix}$$

其中

$$m_{st}^e = \frac{\rho' \pi}{2 \Delta_c^2} \iint_c [a_s a_t r + (a_s b_t + b_s a_t) r^2 + (a_s c_t + c_s a_t) r z + (b_s c_t + c_s b_t) r^2 z + b_s b_t r^3 + c_s c_t r z^2] dr dz \quad (s, t = i, j, m) \quad (27)$$

(4) 弹性体单元的刚度矩阵。它由九个分块矩阵所组成, 其中第 s 行 t 列分块由下式给出

$$k_{st}^e = \begin{bmatrix} (k_{st}^e)_{11} & (k_{st}^e)_{12} & 0 \\ (k_{st}^e)_{21} & (k_{st}^e)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (k_{st}^e)_{33} \end{bmatrix} \quad (s, t = i, j, m)$$

为五个非零元素组成的三阶方阵, 因此弹性体单元的刚度矩阵为九阶方阵。五个非零元素分别由下列公式给出:

$$\begin{aligned} (k_{ii}^e)_{11} = & \frac{E}{4 \Delta_c^2 (1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[\left(2b_s b_t + \frac{1 - 2\nu}{2} c_s c_t \right) V + 2\pi(a_s b_t + b_s a_t) \Delta_c \right. \\ & \left. + 2\pi(c_s b_t + b_s c_t) \right] \\ & \cdot \iint_c z dr dz + 2\pi a_s a_t (1 - \nu) \iint_c \frac{1}{r} dr dz + 2\pi(a_s c_t + c_s a_t)(1 - \nu) \\ & \cdot \iint_c \frac{z}{r} dr dz + 2\pi c_s c_t (1 - \nu) \iint_c \frac{z^2}{r} dr dz \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (k_{ii}^e)_{12} = & \frac{E}{4 \Delta_c^2 (1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[\left(2b_s c_t \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} c_s b_t \right) V + 2\pi a_s c_t \nu \Delta_c \right. \\ & \left. + 2\pi c_s c_t \nu \iint_c z dr dz \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (k_{ji}^e)_{21} = & \frac{E}{4 \Delta_c^2 (1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[\left(2c_s b_t + \frac{1 - 2\nu}{2} b_s c_t \right) V + 2\pi c_s a_t \nu \Delta_c \right. \\ & \left. + 2\pi c_s c_t \nu \iint_c z dr dz \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$(k_{ji}^e)_{22} = \frac{E}{4 \Delta_c^2 (1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[c_s (1 - \nu) c_t + \frac{b_s (1 - 2\nu)}{2} b_t \right] V \quad (31)$$

$$\begin{aligned} (k_{ji}^e)_{33} = & \frac{E}{8 \Delta_c^2 (1 + \nu)} \left[c_s c_t V + 2\pi a_s a_t \iint_c \frac{1}{r} dr dz + 2\pi(a_s c_t + c_s a_t) \iint_c \frac{z}{r} dr dz \right. \\ & \left. + 2\pi c_s c_t \iint_c \frac{z^2}{r} dr dz \right] \end{aligned} \quad (32)$$

其中 E 为弹性体的杨氏模量, ν 为泊松比。

(5) 弹性体和流体交界面单元的偶合矩阵。如图 4 所示节点 i 和 j 取在交界面上, m 和 k 分别取在弹性体和流体中, 弹性体单元 (i, j, m) 节点编号取逆时针方向排列, 流体单元 (i, j, k) 则取顺时针方向排列。此时偶合矩阵由九个分块矩阵组成, 其中第 s 行 t 列分块由下式给出

$$T_{st}^e = [(T_{st})_1 \quad (T_{st})_2 \quad 0]^T$$

因此耦合矩阵为九行三列矩阵。其中

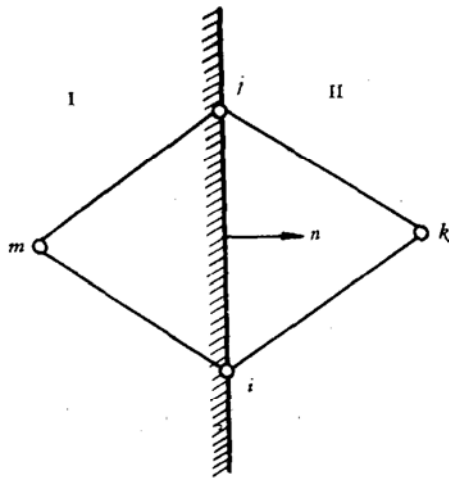


图 4 弹性体与流体的交界面

A Solid-fluid interface

I. 弹性体(Solid), II. 流体 (fluid)

$$(T_{st})_1 = -\frac{\pi r_0}{2\Delta_c^u \cdot \Delta_c^p} \left\{ (a_i^u + b_i^u r_0) \cdot (a_i^p + b_i^p r_0)(z_j - z_i) + \frac{1}{2} [(a_i^u + b_i^u r_0)c_i^p + (a_i^p + b_i^p r_0)c_i^u] \cdot (z_j^2 - z_i^2) + \frac{1}{3} c_i^u c_i^p (z_j^3 - z_i^3) \right\} \quad (33)$$

$$(T_{st})_2 = \frac{\pi}{2\Delta_c^u \Delta_c^p} \left\{ \frac{1}{2} (a_i^u - r^* c_i^u)(a_i^p - r^* b_i^p) \cdot (r_j^2 - r_i^2) + \frac{1}{3} [(a_i^u - r^* c_i^u)b_i^p + (a_i^p - r^* b_i^p)c_i^u] (r_j^3 - r_i^3) + \frac{1}{4} b_i^u b_i^p (r_j^4 - r_i^4) \right\} \quad (34)$$

其中 r_0 为圆柱半径, 常数 $r^* = \text{sign}(r_j - r_i) \cdot L/2$ (L 为圆柱长), 所有常数带有上标 u 和 p 分别表示由弹性体单元和流体单元计算得出的常数。

三、计算方法

1. 结构的离散化和网格的自动划分

由于弹性体在 r - z 平面内为规则矩形, 采用自动划分网格的办法对其实行离散化, 使单元编号、节点编号和节点坐标自动形成。将弹性体在 r 轴方向等距离布设 r_1 个点, 并经过这些点作 z 轴的平行线, 在 z 方向等距离布设 z_1 个点, 并经过这些点作 r 轴的平行线, 这两组平行线的交点为弹性体的全部节点, 并将相邻平行线构成的矩形剖分为两个三角形从而构成全部弹性体单元, 规定节点编号次序从上到下从左到右。有限流体在 r - z 平面内为半圆的一部分, 由于交界面上节点必须重合, 因此划分流体单元时以交界面节点为标准, 以坐标原点为圆心, 以原点到这些标准点的距离为半径作一系列圆弧, 这些圆弧与过标准点并与 r 轴平行的一系列直线的交点构成流体节点, 节点编号由上而下由外圆弧至内圆弧依次进行, 将相邻两圆弧和平行线围成的曲边四边形剖分为两个三角形单元从而构成流体的全部单元。经上述剖分后, 利用简单的几何关系容易得到流体和弹性体各节点的坐标值, 同时节点与单元的编号也不难得到, 由此构成所需的初始数据。

2. 总体矩阵的形成和线性方程组的求解方法

由于求解一个入射方向的目标强度就需求解 $(\mathcal{L} + 1)(\mathcal{L} + 2)/2$ 个 (19) 给出的线性方程组, 因此提高求解效率十分必要。这可从两个方面入手, 其一是节省形成系数矩阵的时间, 其二是提供一个高效率算法。前者我们提供一个只形成一次与结构有关的矩阵 Q , 然后对取定的 L, m 值将 Q 作微小修正就可得到方程组的系数矩阵和右端项, 后者采用分块矩阵计算技术导出只包含未知量 $p_s(u_l)$ 的 L_s 阶复系数线性方程组。引进 L_s 阶对角矩阵

$$S = \text{diag}[S_1, S_2, \dots, S_{L_s}] \quad (35)$$

则(19)式中的对角矩阵 $M_{L,m}^S$ 可写为

$$M_{L,m}^S = H_L^m \cdot S = S \cdot H_L^m$$

同时引进列向量 (L_s 维)

$$F_L^m = [\Theta_L^m(\theta_1), \Theta_L^m(\theta_2), \dots, \Theta_L^m(\theta_{L_s})]^T = H_L^m \cdot E \quad (36)$$

然后令

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= (K_{pp})_{ss} - \omega^2 (M_{pp})_{ss}; & A_{12} &= (K_{pp})_{si} - \omega^2 (M_{pp})_{si} = A_{21}^T \\ A_{22} &= (K_{pp})_{ii} - \omega^2 (M_{pp})_{ii}; & A_{33} &= K_{uu} - \omega^2 M_{uu} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

以及

$$p_s^*(u_l) = H_L^m p_s(u_l) \quad (38)$$

则方程组 (2.12) 就变成

$$\begin{bmatrix} A_{11} + \frac{1}{2a\lambda_L} S & A_{12} & -\omega^2 \rho T_1^T \\ A_{21} & A_{22} & -\omega^2 \rho T_2^T \\ -T_1 & -T_2 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_s^*(u_l) \\ p_i(u_l) \\ u(u_l) \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_L}{2a} p_{L,m}^{\text{inc}}(u_l) \begin{Bmatrix} SF_L^m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

对(39)式利用分块消去法, 不难得到一个关于未知量 $p_s^*(u_l)$ 的 L_s 阶复系数线性方程组

$$\left[Q + \frac{1}{2a\lambda_L} S \right] p_s^*(u_l) = \frac{\alpha_L}{2a} p_{L,m}^{\text{inc}}(u_l) SF_L^m \quad (40)$$

式中 L_s 阶实矩阵 Q 由下式给出

$$\begin{aligned} Q &= A_{11} - \omega^2 \rho T_1^T A_{33}^{-1} T_1 - (A_{12} - \omega^2 \rho T_1^T A_{33}^{-1} T_2)(A_{22} - \omega^2 \rho T_2^T A_{33}^{-1} T_2)^{-1} \\ &\quad \cdot (A_{21} - \omega^2 \rho T_2^T A_{33}^{-1} T_1) \end{aligned} \quad (41)$$

由于它仅与有限元划分有关, 而与 L, m 无关, 因此只需形成一次。在形成 Q 过程中不采用求 A_{33} 逆阵 A_{33}^{-1} 的办法, 因为弹性体节点编号采用分层分片形式, 故 A_{33} 为三对角块矩阵, 而 A_{33}^{-1} 一般不再是三对角块矩阵, 为节约计算机的存储单元, 我们利用耦合矩阵的稀疏性特点, 采用文献 [14] 所使用的方法直接形成 $A_{33}^{-1} \cdot T$ 和 $A_{33}^{-1} \cdot T_2$ 。引进复向量

$$\frac{p_s^*(u_l)}{\frac{\alpha_L}{2a} p_{L,m}^{\text{inc}}(u_l)} = X_L^m + iY_L^m \quad (42)$$

式中 X_L^m 和 Y_L^m 为 L_s 维实向量, 并令

$$\frac{1}{2a\lambda_L} = \alpha + i\beta \quad (43)$$

则方程(40)式就等价于求下面的 $2L_s$ 阶实系数线性方程组

$$\begin{bmatrix} Q + \alpha S & -\beta S \\ \beta S & Q + \alpha S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L^m \\ Y_L^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} SF_L^m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

上式求解的步骤为首先由方程组

$$[S^{-1}Q(S^{-1}Q + 2\alpha I) + (\alpha^2 + \beta^2)I]Y^* = F_L^m \quad (45)$$

解出 L_s 维向量 Y^* , 然后得到(5.10)式的解

$$X_L^m = (S^{-1}Q + \alpha I)Y^*; \quad Y_L^m = -\beta Y^* \quad (46)$$

式中 I 为 L_s 阶对角幺矩阵, 于是利用关系式 (38) 和 (42) 得到球面 S_1 上的第 (L, m) 号球函数子空间中的节点声压向量

$$p_{L,m}(u_l) = \frac{\alpha_L}{2a} p_{L,m}^{\text{inc}}(u_l) (H_L^m)^{-1} (X_L^m + iY_L^m) \quad (47)$$

四、结果与讨论

作为实例我们计算了一个长 10cm、直径 2cm 的钢圆柱对不同方向入射声波的目标强度。入射平面波的频率为 27 kHz，钢的密度取 7.8g/cm^3 ，杨氏模量取 $2 \times 10^6\text{kg/cm}^2$ ，泊松比取 0.25。声波入射方向在 0° — 90° 范围内每次改变 2.5° ，共计 37 个方向。在 r - z 平面内弹性体节点取 48 个，组成 60 个三角形单元，流体节点取 80 个（其中 20 个节点在球面 S_1 上），组成 116 个三角形单元。为保证入射平面波按球函数展开式的收敛性，最高阶球函数的 L 值取 12，这样就有 91 个不同阶的球函数，因此计算一个方向上的目标强度需求解 91 个线性方程组，37 个方向共需求解 3367 个线性方程方能得到一条曲线，这条曲线在图 5 中用点划线表示。图中并给出实验曲线和刚性理论曲线以作比较，后者为圆柱侧面和顶端圆盘两部分目标强度的合成，计算公式为^[15]：

$$TS = 10 \log \left[\frac{aL^2}{2\lambda} (\sin \beta_1 / \beta_1)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{\pi a^2}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{2J_1(\beta_2)}{\beta_2} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right]$$

式中 $\beta_1 = kL \sin \theta$, $\beta_2 = 2ka \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$, a 为圆柱半径, λ 为水中声波波长, θ 为声波入射方向与圆柱侧面法线的夹角, k 为波数, L 为圆柱长。

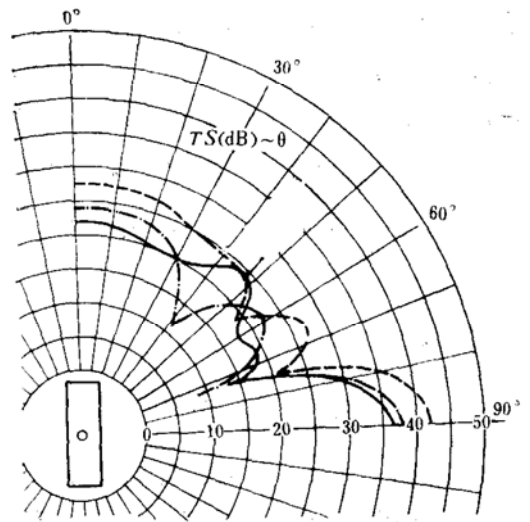


图 5 目标强度的方位曲线

Curves of the target Strength versus incident angle

- 弹性理论曲线 Theoretical prediction based on elastic model
- 刚性理论曲线 Theoretical prediction based on rigid body model
- 实验曲线 (90° 的值为 -35.3dB) experimental data

从实验曲线和理论曲线的比较可以看出，刚性圆柱的目标强度理论值普遍高于实验值，而将圆柱当作弹性体处理用有限元素法计算的结果比较接近于实验值。

用有限元素法计算得到的目标强度曲线在 30° 到 50° 角度范围内由于计算值很小因而与

实验结果比较存在一定的差异,这种差异估计是理论计算与实验测量精度这两种原因造成的,更为精确的计算和实验测量工作有待于进一步深入。

本工作曾得到冯绍松同志的指导与帮助,并在声压按球函数展开的计算中曾与吴承义同志进行过有益的讨论,参加实验测量工作的有孙璇笙、李洪瑛、周根祥、吴志灏等同志,施根林同志曾担任部分初始数据的校对工作、作者一并表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Morse, P. M. and Feshbach, H., *Methods of theoretical Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1953), Part I, 492—523.
- [2] Faran, J. J., "Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres", *J. Acoust. Soc. Am.*, **23**(1951), 405—418.
- [3] Hickling, R., "Analysis of echoes from a solid elastic Sphere in water", *J. Acoust. Soc. Am.*, **34**(1962), 1582—1592.
- [4] Doolittle, R. D., Überall, H. and Uginčius, P., "Sound Scattering by elastic Cylinders", *J. Acoust. Soc. Am.*, **34**(1968), 1—14.
- [5] Burke, G. J., Miller, E. K., Poggio, A. J., Pjerrow, G. M., Maxum, B. J. and Meecham, W., "An integro-differential equation approach to acoustic scattering from fluid-immersed elastic bodies," *J. Computational Phys.*, **10**(1972), 22—39.
- [6] Hunt, J. T., Knittel, M. R. and Barach, D., "Finite element approach to acoustic radiation from elastic Structures", *J. Acoust. Soc. Am.*, **55**(1974), 269—280.
- [7] Hunt, J. T., Knittel, M. R., Nichols, C. S. and Barach, D., "A finite element approach to acoustic Scattering from elastic structures," *J. Acoust. Soc. Am.*, **57**(1975), 287—299.
- [8] Knittel, M. R., Nichols, C. S. and Barach, D., "Scattering of obliquely incident plane wave by an elastic disk", *J. Acoust. Soc. Am.*, **58**(1975), 983—995.
- [9] 法捷耶夫著,刘光武等译,“线代数计算方法”(上海科学出版社,1965年),47—48.
- [10] 见参考文献[7]第289页.
- [11] 见参考文献[1]part II, 1466.
- [12] Zienkiewicz, O. C., *The finite element method in engineering Science*, (McGraw-Hill, London, 1971), 49—50.
- [13] 费洛宁柯-鲍罗第契著,朱广才等译,弹性理论(人民教育出版社,1958),171—172.
- [14] 华孝先,吴嘉勉,“有限元素法在飞机结构计算中的应用”,计算技术通讯, **3**(1979), 57—70.
- [15] 乌立克著,洪申译,“工程水声原理”, 254—255.