

水声作用下矩形弹性-粘弹性复合板的 振动和散射声近场 (I) ——矩形复合板的振动分析

何祚镛 (HE ZUO-YONG)

哈尔滨船舶工程学院 (Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

1983年8月30日收到 (Received August 30, 1983)

摘要 本文根据弹性理论最小势能原理和变分技术, 确定不同弹性材料层胶合的复合板弯曲运动时的中和面位置, 并引入复合板的等效弹性常数和等效质量, 从而导出复合薄板弯曲振动方程和边界条件的简洁形式; 根据粘弹性理论还得出: 粘弹性层和弹性层复合板的振动方程; 采用模态分析和傅里叶变换法给出矩形复合薄板自由振动和强迫振动的一般分析解; 以钢板作为基板, 进行数值计算得出不同厚度、不同材料覆盖层的复合板的等效刚度、泊松比和面密度, 以及简支条件下简正模式的阻尼常数、阻力系数和固有频率。

VIBRATION AND NEAR SCATTERING FIELD OF IMMERSED RECTANGULAR ELASTIC-VISCOELASTIC COMPOSITE PLATE IN AN UNDERWATER SOUND FIELD (I) —— ANALYSIS OF RECTANGULAR COMPOSITE PLATE SYSTEM

Abstract Basing on theory of elasticity, according to least elastic energy and variational method, the position of neutral plane of the elastic composite plate system is determined. And then, the governing equations for the flexural vibration of composite elastic-viscoelastic laminar plates are derived.

It is shown, that the governing equations and boundary conditions of this composite plate system are similar to those of thin plate, if the equivalent rigidity, Poisson's ratio and surface mass density are instead of the parameters in equations and boundary conditions.

The general solution for bending motion of this plates system is given by the method of normal mode analysis and Fourier analysis. As an example, a simply-supported, rectangular composite plate system is concerned. The equivalent rigidity, Poisson's ratio and surface mass density for bilaminar plate systems with steel as base plate coating with rubber, plastic or ceramic layer are numerically calculated. The damping constant, resistant coefficient and natural frequency for different vibration mode of this system with edges simply-supported are calculated also.

引 言

水声设备在海洋工程中作为目标检测、水下通讯、海上导航、水声制导、船舶动态定位、底

层勘探等方面的应用日益增加。因此水下结构的有关声学设计问题愈来愈引起人们的重视。因为水下结构受声波的作用、机器振动的作用以及流水的各种作用,引起振动和声辐射。这就对水声设备及其水下系统(换能器或基阵)的工作状况可能产生很大影响。

关于结构振动的研究报告近来甚多,可参考文献[1]所附文献,不过更多工作是考虑真空中的振动响应。也有一些研究是关于无限大弹性平板中波的传播或反射和透射。以及单层均匀无限长条薄板的散射^[2-6]。最近有些报告研究了有限的单层均匀薄板在水中的辐射,以及无限大均匀薄板、周期性负荷条件下的辐射问题^[7-8]。由于夹心式结构板(中心面对称式的 sandwich structure)和复合层消震结构的应用推广,不少研究者进而对这类结构的弯曲振动开展了研究^[9-11],但这些文章忽略了覆盖层的刚性,并且没有考虑介质对板系统振动的影响。

本文是研究水下弹性-粘弹性复合层障板在声波作用下,振动和声散射问题中的矩形复合板的振动分析,又是作者另一篇文章研究的继续^[12]。这里推广了复合弹性板在 Kirchhoff 假设情况下弯曲振动理论。当考虑到覆盖层的刚度时,复合板中应力分布是和覆盖层与基板的厚度及弹性常数有显著关系。因此复合板的中和面位置的确定是关键问题,本文应用变分方法和最小弹性应变能原理得到解决。文中提出复合板的等效刚度、等效泊松比和等效质量,可使复合板的弯曲振动方程和边界条件简化成均匀薄板的弯曲振动方程和边界条件相似的形式。本文在粘弹性理论上导出 Kelvin-Voigt 型粘弹性材料层和弹性层复合板弯曲振动方程,以及其等效参量与材料的动态弹性模量之间关系。文章对有限尺寸复合弹性-粘弹性薄板用模态分析法和傅里叶变换技术得到一般解析解,它适用于板面任意分布力的情况。根据所得理论关系给出典型数值计算的例子,并分析了材料常数对复合板系统等效参量和振动的影响。

一、复合弹性薄板的弯曲振动方程和边界条件

1. 复合弹性薄板的振动方程

为了简便,这里只取两弹性层胶合的复合板系统,层的厚度分别为 h_1 和 h_2 ; 复合板的长和宽为 L_1 和 L_2 , 板面和 $x-y$ 平面重合,见图 1(a)。

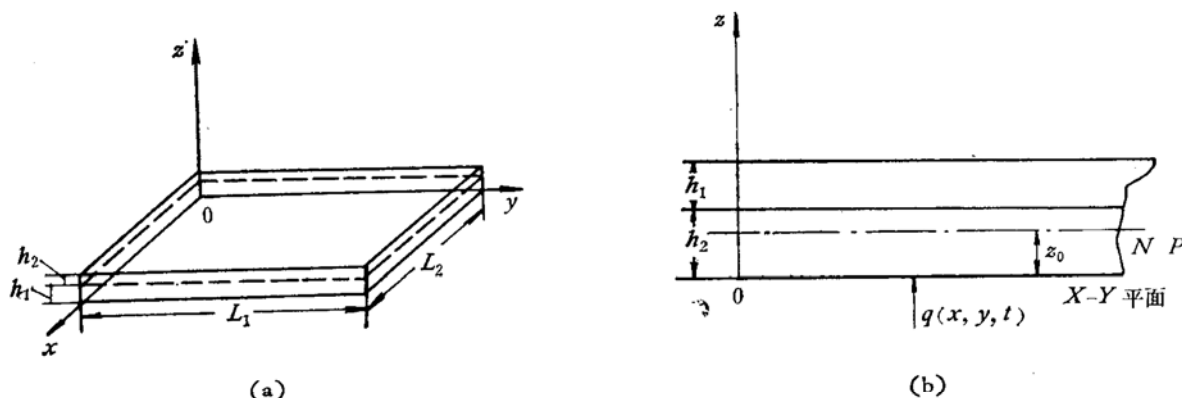


图1 弹性复合板的几何关系

Geometry of a bilaminar plate system under the influence of load.

该复合板的总厚度 h 比复合板弯曲波的波长小得多。则在微幅振动情况,层中应力张量为

$$\tau_{ij}^{(n)} = \lambda_n \varepsilon_{kk}^{(n)} \delta_{ij} + 2\mu_n \varepsilon_{ij}^{(n)} \quad (1)$$

其中,应变张量和位移向量 u 的关系如下:

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

式中 δ_{ij} ——Kronecker δ 符号; $n = 1, 2$ 对应于基板 B 和覆盖板 C .

略去转动并设有关薄板的 Kirchhoff 假设仍然成立,因而位移向量可以复合板的中和面的横向位移表之

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(n)} = u^{(n)}(x, y, z, t) &= -(z - z_0) \frac{\partial \bar{W}(x, y, t)}{\partial x} \\ u_2^{(n)} = v^{(n)}(x, y, z, t) &= -(z - z_0) \frac{\partial \bar{W}(x, y, t)}{\partial y} \\ u_3^{(n)} &= \bar{W}(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在 (1) 式中令 $\tau_{zz} = 0$, 解出 ε_{zz} 代入 τ_{xx}, τ_{yy} 式中, 得到直角坐标系中应力-应变方程:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(n)} &= \frac{4\mu_n(\lambda_n + \mu_n)}{(\lambda_n + 2\mu_n)} \cdot \varepsilon_{xx}^{(n)} + \frac{2\mu_n\lambda_n}{(\lambda_n + 2\mu_n)} \cdot \varepsilon_{yy}^{(n)} \\ \tau_{yy}^{(n)} &= \frac{4\mu_n(\lambda_n + \mu_n)}{(\lambda_n + 2\mu_n)} \cdot \varepsilon_{yy}^{(n)} + \frac{2\mu_n\lambda_n}{(\lambda_n + 2\mu_n)} \cdot \varepsilon_{xx}^{(n)} \\ \tau_{xy}^{(n)} &= 2\mu_n \varepsilon_{xy}^{(n)}; \tau_{yz}^{(n)} = 2\mu_n \varepsilon_{yz}^{(n)}; \tau_{zx}^{(n)} = 2\mu_n \varepsilon_{zx}^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

以及应变-位移关系:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(n)} &= \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} = -(z - z_0) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy}^{(n)} &= \frac{\partial v^{(n)}}{\partial y} = -(z - z_0) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{xy}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial y} \right) = -(z - z_0) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y}, \\ \varepsilon_{yz}^{(n)} &= \varepsilon_{zx}^{(n)} = 0, \quad \left(\begin{array}{ll} 0 \leq z \leq h_1, & n = 1 \\ h_1 \leq z \leq h_1 + h_2, & n = 2 \end{array} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中, $z = z_0$ 是复合板的中和面 $N-P$ 的坐标, 见图 1(b); $\bar{W}(x, y, t)$ 是中和面上 (x, y) 点沿 z 轴方向、相对平衡位置的位移. 因为组成复合板的 B 、 C 板的弹性模量不相等, 复合板截面中应力分布不均匀, 所以中和面的位置不在复合板的几何中间面上. 例如, 基板粘上附加层时, 当 h_2/h_1 不是很大, 则中和面位置虽仍然在弹性模量较大的弹性层中, 但其位置由原来的中间面位置向附加层方面偏移.

弹性体中, 由于形变产生的应变能等于

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \iiint_V \tau_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

将 (4) 和 (5) 两式以及 (3) 式代入上式, 使得复合薄板作弯曲形变时, 应变能和中和面位移的关系:

$$\begin{aligned} U &= 2\mu_1 \iint_S \int_0^{h_1} \left[\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \right] (z - z_0)^2 dz dx dy \end{aligned}$$

$$+ 2\mu_2 \iint_S \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left[\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \right] \cdot (z - z_0)^2 dz dx dy$$

对 z 积分后,再以杨氏模量 E_n 和泊松比 ν_n 代替 λ_n, μ_n , 经整理后得到

$$U = \frac{D_{c.p.}}{2} \iint_S \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right)^2 dx dy + D'_{c.p.} \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \quad (6)$$

式中量的定义以及它们与材料的参数关系如下:

$$\left. \begin{aligned} D_{c.p.} &= D_1 \cdot \beta; D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)}; \beta = \beta' + a\gamma' \\ \beta' &= [(2 - \alpha)^3 + \alpha^3]/2, \gamma' = \{[2(h_2/h_1 + 1) - \alpha]^3 - (2 - \alpha)^3\}/2 \\ \alpha &= z_0/(h_1/2), a = \frac{E_2(1 - \nu_1^2)}{E_1(1 - \nu_2^2)}; \\ D'_{c.p.} &= (1 - \nu_1)\gamma \cdot D_{c.p.} = D_{c.p.}(1 - \nu_{c.p.}); \gamma = \frac{\beta' + b\gamma'}{\beta' + a\gamma'} \\ b &= \frac{E_2(1 + \nu_1)}{E_1(1 + \nu_2)}; \nu_{c.p.} = 1 - (1 - \nu_1)\gamma = e\nu_1, e = \frac{1 - (1 - \nu_1)\gamma}{\nu_1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

以上参量具有明显的物理含义: $D_{c.p.}$ ——复合板的等效刚度,它相对基板的刚度 D_1 的比例常数为 β ; $\nu_{c.p.}$ ——复合板的等效泊松比,它相对基板的 ν_1 的比值为 e 。加覆盖层后复合板的等效弹性常数的修正系数 β 和 e 决定于系数 a 和 b , 这二常数只与 B 板和 C 板的材料弹性常数有关;同时 β, e 还和 β', γ' 有关,后者决定于 B 板和 C 板的厚度比 h_2/h_1 以及 $\alpha(z_0)$, $\alpha(z_0)$ 是复合板的中和面位置,相对于未加 C 板时基板的中和面位置的偏离系数。显然 z_0 本身也决定于弹性常数和厚度比。总之, $C-B$ 复合板的等效弹性常数决定于材料的弹性常数和厚度,而为了完全确定其关系, (7) 式中 $\alpha(z_0)$ 的显函数必须确定,也即必须确定 $B-C$ 复合系统的中和面位置。

类似推导单薄板平衡方程的办法,复合板的平衡方程可由条件

$$\delta(U + U') = 0 \quad (8)$$

导出。这里 U 的变分可由 (6) 式给出。至于 $\delta U'$, 它等于作用于复合板上的所有外力,使板作弯曲形变的负值功,振动问题则应把惯性力考虑进去。

对 (6) 式,考虑虚位移 $\delta \bar{W}$, 对 U 作变分运算,类比薄板^[13]得其结果分为两部分: (1) 对复合板表面的面积分; (2) 对复合板沿边缘轮廓线的线积分。

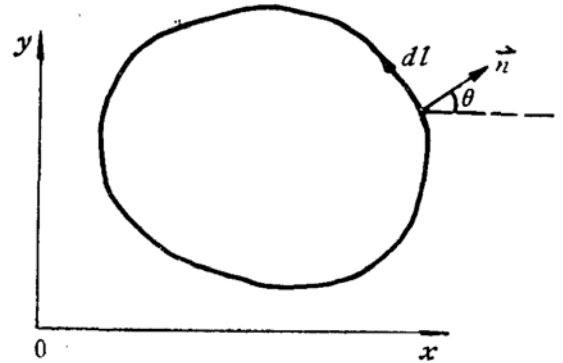


图2 复合板的边缘轮廓线和法线向量
Contour along edge of composite plate system
and its normal

$$\begin{aligned}
\delta U = & D_{c.p.}(z_0) \iint_S \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \bar{W} \cdot \delta \bar{W} \cdot dS \\
& - D_{c.p.}(z_0) \left[\oint \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \cdot \delta \bar{W} \cdot dl - \oint \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial n} (\delta \bar{W}) dl \right] \\
& + D'_{c.p.}(z_0) \left\{ \oint \left[\sin(2\theta) \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right) - \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial n} (\delta \bar{W}) \cdot dl \right. \\
& \left. - \oint \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right] \cdot \delta \bar{W} \cdot dl \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

这里复合板边缘轮廓线的微分 dl 取逆时针方向为正; 法线 $\mathbf{n}$ 指向封闭轮廓线之外的区域; θ 是 $\mathbf{n}$ 与 x 轴的交角, 见图 2.

变分 $\delta U'$ 表成以下形式:

$$\delta U' = - \iint_S \left[q(x, y, t) - \sigma_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} \right] \cdot \delta \bar{W} \cdot dS \quad (10)$$

这里 $q(x, y, t)$ 是作用于复合板单位面积上的总的外作用合力; $\sigma_{c.p.}$ 是复合板质量的面密度.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} \sigma_{c.p.} &= \delta \cdot \sigma_1, \sigma_1 = h_1 \cdot \rho_1 \\ \delta &= 1 + (\rho_2 h_2) / (\rho_1 h_1) \end{aligned} \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

其中

将 (9) 和 (10) 两式代入 (8) 式中, 令面积分和线积分分别为零

$$\begin{aligned}
& \iiint_S \left\{ D_{c.p.}(z_0) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \bar{W} - q(x, y, t) + \sigma_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} \right\} \cdot \delta \bar{W} \cdot dxdy = 0, \quad (12) \\
& \oint \left\{ D_{c.p.}(z_0) \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) + D'_{c.p.}(z_0) \cdot \left[\sin(2\theta) \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} - \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right] \frac{\partial (\delta \bar{W})}{\partial n} \right\} dl + \oint \left\{ D_{c.p.}(z_0) \left[- \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - D'_{c.p.}(z_0) \cdot \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) + \cos(2\theta) \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right] \right\} \cdot \delta \bar{W} \cdot dl = 0, \quad (13)
\end{aligned}$$

方程式 (13) 对复合板边界上任意点均应成立, 所以它是边界条件所必须满足的方程, 我们留待下面讨论.

以上所得方程 (12)、(13) 中包括待定值 z_0 , 所以中和面位置的预报是首要的问题. 合理的想法是, z_0 值的选择使形变能趋于最小, 即

$$\frac{\partial U}{\partial z_0} = 0 \quad (14)$$

因为假设 $z = z_0$ 平面是中和面, 在 Kirchhoff 假设条件、小弯曲形变过程中, 它没有拉伸形变, 它上面各点的位移只在 z 轴方向, 即点 (x, y, z_0) 的位移只有 z 方向分量 $\bar{W}(x, y, t)$.

满足方程 (14) 等效于满足面积分 (12) 式对 z_0 的偏导数为零, 即要求

$$\frac{\partial D_{c.p.}}{\partial z_0} = 0 \quad (15)$$

于是由 (7) 和 (15) 式, 应有

$$\frac{d\beta'}{d\alpha} + a \frac{d\gamma'}{d\alpha} = 0$$

最后得到

$$z_0 = \alpha \frac{h_1}{2}, \quad \alpha = \frac{1 + a \frac{h_2}{h_1} \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} + 2 \right)}{1 + a(h_2/h_1)}, \quad (16)$$

例如,若 $E_1 h_1 \gg E_2 h_2$, 则由(7)式 $a(h_2/h_1) \ll 1$, 于是 $z_0 \cong h_1/2$, 即硬板贴软薄材料后, 复合板的中和面位置几乎仍在硬板中间面上; 反之若 $E_1 h_1 \ll E_2 h_2$, 则得 $z_0 \approx h_1 + h_2/2$, 中和面仍在硬板的中间面上, 总之软-硬两层复合板的中和面近似地在硬板的几何中面处。然而一般说来, 板上贴了其它材料板之后, 其中和面的位置将发生偏移。

如前所述, 给定复合板组成材料的杨氏模量、泊松比和厚度比等参数值后, 便可根据(7)、(11)和(16)式确定复合板的常数 a 、 b ; 从而定出 α 、 $\beta'(\alpha)$ 及 $\gamma'(\alpha)$, 最后求得刚度系数 β 和泊松比系数 e 以及密度系数 δ 。显然, 不同厚度比 h_2/h_1 情况, 其等效参量的系数也不等。

返回(12)式。因为 $\bar{W}$ 的变化 $\delta \bar{W}$ 是任意的, 所以满足积分式为零的充要条件是被积函数中 $\delta \bar{W}$ 的系数为零, 由此得到复合弹性薄板中和面横向位移的运动方程

$$D_{c.p.} \nabla^2 \nabla^2 \bar{W}(x, y, t) + \sigma_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}(x, y, t)}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (17)$$

由此可见, 当引入等效参量后, 复合弹性板的振动方程和薄板的振动方程形式相同。

无疑, 所述方法可用于任意多层系统的弯曲振动。

进而采用 Mindlin 对于薄板弯张理论^[14], 将(13)式代以

$$u^{(n)}(x, y, z, t) = (z - z_0) \cdot \phi_x(x, y, t), \quad v^{(n)}(x, y, z, t) = (z - z_0) \cdot \phi_y(x, y, t), \\ w^{(n)} = \bar{W}(x, y, t)$$

则转动和切变对弯曲振动的影响将进而得到修正。

2. 复合弹性板的边界条件

由方程(7), $D'_{c.p.} = D_{c.p.}(1 - \nu_{c.p.})$ 代入(13)式, 得

$$\oint D_{c.p.} \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + (1 - \nu_{c.p.}) \sin(2\theta) \right. \\ \left. \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right] \cdot \delta \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right) \cdot dl + \oint \left\{ D_{c.p.} \left[- \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\ \left. - D_{c.p.}(1 - \nu_{c.p.}) \frac{\partial}{\partial l} \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \cos(2\theta) \right] \right\} \\ \cdot \delta \bar{W} \cdot dl = 0 \quad (18)$$

可见, 引入等效参量后, 复合薄板边界条件的关系式和单薄板的关系式完全相似, 只是以等效参量 $D_{c.p.}$ 和 $\nu_{c.p.}$ 代替薄板的 D 和 ν , 而等效参量和材料的参数之间关系已在前节给出。

如同薄板情况, (18)式可以表达成力矩和切应力关系。

由弹性理论, 不难导出对复合板沿 dl 单位长度的力矩:

$$M_n = -D_{c.p.} \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \cdot \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) \cdot \sin^2 \theta + (1 - \nu_{c.p.}) \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \sin(2\theta) \right], \quad (19)$$

例如, $dn \rightarrow dx$, $\theta = 0$, 于是

$$M_n = M_x = -D_{c.p.} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

它是板中 $\sigma_{xx}^{(1)}$ 和 $\sigma_{xx}^{(2)}$ 引起的 Δy 单位长度弯曲力矩。同理,单位长度的扭转力矩为:

$$M_{nl} = D_{c.p.}(1 - \nu_{c.p.}) \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \cdot \cos(2\theta) \right] \quad (21)$$

让 $dn \rightarrow dx$, $dl = dy$, $\theta = 0$, 于是

$$M_{nl} = M_{xy} = D_{c.p.}(1 - \nu_{c.p.}) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \quad (22)$$

复合板截面上沿 dl 方向单位长度截面的切应力为:

$$N_{nz} = -D_{c.p.} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \quad (23)$$

取 $dn \rightarrow dx$, $\theta = 0$, 则有

$$\left. \begin{aligned} N_{xz} &= -D_{c.p.} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) \\ &= -D_{c.p.} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - \nu_{c.p.}) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

或

$$N_{xz} = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

将 (19)、(21) 和 (23) 代入 (18) 式中, 边界条件改写成

$$- \oint M_n \delta \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right) dl + \oint \left(N_{nz} - \frac{\partial M_{nl}}{\partial l} \right) \cdot \delta \bar{W} \cdot dl = 0 \quad (25)$$

对于矩形复合弹性板, 沿边界的齐次边界条件立即写出:

(1) 边缘固定于 $x = a$, 则 $\theta = 0$, $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial y}$, 为使 (25) 式满足, 取条件 $(\delta \bar{W})_{x=a} = 0$ 和 $\delta(\partial \bar{W} / \partial x)_{x=a} = 0$, 于是边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} &\bar{W}(a, y, t) = 0 \text{ 和 } \left. \frac{\partial \bar{W}(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \\ (2) \text{ 边缘简支于 } x = a, \text{ 得到边界条件:} \\ &\bar{W}(a, y, t) = 0 \\ &\text{及 } M_x(a, y, t) = 0 \text{ 或 } \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \\ (3) \text{ 边缘自由, 可以给出} \\ &M_x(a, y, t) = 0 \\ &\text{及 } \left(N_{xz} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{x=a} = 0, \text{ 或 } \left[\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial x^3} + (2 - \nu_{c.p.}) \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

二、复合粘弹性板弯曲振动方程

根据粘弹性理论, 在各向同性的粘弹性固体中小形变情况, 应力-应变关系的张量形式为:

$$t_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda' \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_{ij} - \lambda'' t_{kk} \delta_{ij} - 2\mu'' t_{ij} \quad (27)$$

这里 λ' , μ' , λ'' 和 μ'' 是粘弹性常数。

当应力弛豫机构的弛豫时间 τ 比动态应变的周期 T 大得多 $\tau \gg T$ 或 $\omega\tau \gg 1$ 时, (27) 式中后两项的作用可以略去, 因而 (27) 式简化为 Kelvin-Voigt 模型粘弹性固体,

$$t_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda' \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (28)$$

关于粘弹性复合板, 作小形变弯曲振动时, 认为 Kirchhoff 假设以及 (3)–(5) 式诸关系依然成立, 只是加入相应于 (28) 式中的粘滞性应力的修正项. 最后, 双层粘弹性复合板弯曲振动方程近似表达成:

$$D_{c.p.} \nabla^2 \nabla^2 \bar{W}(x, y, t) + D_{c.p.}^* \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \bar{W}(x, y, t)}{\partial t} + \sigma_{c.p.} \frac{\partial^2 \bar{W}(x, y, t)}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (29)$$

对于稳态谐和运动 $q(x, y, t) \sim e^{-i\omega t}$ 则位移稳态解为: $\bar{W}(x, y, t) \sim W(x, y) \cdot e^{-i\omega t}$ 则有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D}_{c.p.} \nabla^2 \nabla^2 \bar{W}(x, y, t) - \omega^2 \sigma_{c.p.} \bar{W}(x, y, t) &= q(x, y, t) \\ \tilde{D}_{c.p.} &= D_{c.p.} - i\omega D_{c.p.}^* \text{ 是复数} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

这里

所以, 在此情况 (7) 式所有量应代之以复数的动态常数, 令

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda - i\omega\lambda', \quad \tilde{\mu} = \mu - i\omega\mu' = \mu(1 - i\eta_\mu) \\ \tilde{E} &= E - i\omega E' = E(1 - i\eta_E), \quad \tilde{\nu} = \nu(1 + i\eta_\nu) \\ \text{则 } \tilde{D}_{c.p.} &= \frac{\tilde{E}_1 h_1^3}{12(1 - \tilde{\nu}_1^2)} \cdot \tilde{\beta} \\ \tilde{\beta} &= \beta' + \tilde{a}\gamma', \quad \tilde{a} = \frac{\tilde{E}_2(1 - \tilde{\nu}_2^2)}{\tilde{E}_1(1 - \tilde{\nu}_2^2)} = a_1 - ia_2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

于是 a_1, a_2 可用复合粘弹性板材料的动态弹性常数表之, 因而 $D_{c.p.}$ 和 $D_{c.p.}^*$ 也可由材料的动态弹性常数表之.

在工程上常以金属作基板, 用环氧之类胶粘贴一片粘弹性材料板作为复合粘弹性板. 这种情况下, 金属板自身的损耗因子可以略去.

应用弹性模量之间关系可得粘弹性材料的动态泊松比

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\nu} &= \frac{\tilde{E}}{2\tilde{\mu}} - 1 = \frac{E(1 - i\eta_E)}{2\mu(1 - i\eta_\mu)} - 1 = \nu(1 + i\eta_\nu) \\ \text{这里, } \nu &= \frac{E - 2\mu + (E\eta_E - 2\mu\eta_\mu)\eta_\mu}{2\mu(1 + \eta_\mu^2)}, \quad \eta_\nu = \frac{E(\eta_\mu - \eta_E)}{2\mu\nu(1 + \eta_\mu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

以此代入 (31) 式的 $\tilde{a}$ 中, 求得

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a} &= a_1 - ia_2 \\ \text{这里 } a_1 &= a' \frac{1 + 2\eta_{E_2}\eta_{\nu_2} \frac{\nu_2^2}{1 - \nu_2'^2}}{1 + \left(2\eta_{\nu_2} \frac{\nu_2^2}{1 - \nu_2'^2}\right)^2}, \quad a_2 = a' \frac{\eta_{E_2} - 2\eta_{\nu_2} \frac{\nu_2^2}{1 - \nu_2'^2}}{1 + \left(2\eta_{\nu_2} \frac{\nu_2^2}{1 - \nu_2'^2}\right)^2} \\ \text{其中 } a' &= \frac{E_2(1 - \nu_1^2)}{E_1(1 - \nu_2'^2)}, \quad \nu_2'^2 = \nu_2^2(1 - \eta_{\nu_2}^2) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

因此, 给出基板和覆盖层的动态弹性常数 E_1, ν_1 和 $E_2, \nu_2, \eta_{E_2}, \eta_{\mu_2}$, 则由 (31)、(32) 和 (33) 诸式可得粘弹性复合板的等效动态常数和系数.

Snowdon 认为橡胶板的杨氏模量和切变模量的损耗因子相等^[10] $\eta_{E_2} = \eta_{\mu_2}$, 则由 (32) 式

可见泊松比为一实数,于是复合粘弹性板的常数表成

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a} &\cong \frac{E_2(1-\nu_1^2)}{E_1(1-\nu_2^2)} \cdot [1 - i(\eta_{E_2} - \eta_{E_1})] \\ a_1 &= \frac{E_2(1-\nu_1^2)}{E_1(1-\nu_2^2)}, \quad a_2 = a_1(\eta_{E_2} - \eta_{E_1}) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

事实上,我们知道橡胶材料的粘弹性常数随充填粉末的种类和含量以及环境温度和压力有很大关系。所以,一般来说,即使对于橡胶, Snowden 的假设(设泊松比是常实数)也有局限性。因此,复合粘弹性板的等效刚度和阻尼常数应当用下式计算:

$$\left. \begin{aligned} D_{c.p.} &= \beta_1 \cdot D_1, \quad \beta_1 = \beta' + a_1 \gamma' \\ \omega D_{c.p.}^* &= D_1 a_2 \gamma' \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

其中 a_1 、 a_2 的值用 (32)、(33) 式计算,而 β' 、 γ' 的值用 (7) 式计算,其中 a 可用 a_1 代之。

三、矩形复合粘弹性薄板弯曲振动的解

(29) 式可采用简正模式分析和傅里叶变换方法求解。设解为:

$$\bar{w}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) \cdot \phi_{mn}(t) \quad (36)$$

这里 $W_{mn}(x, y)$ 是满足方程

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) - \mu^4 W(x, y) = 0 \quad (37)$$

即

$$\nabla^2 \nabla^2 W_{mn} - \mu_{mn}^4 W_{mn} = 0 \quad (37')$$

并满足一定边界条件的本征函数,其中 μ_{mn} 是对应的本征值。

将 (36) 式代入 (29) 式中,考虑到 (37') 关系并利用本征函数的正交性

$$\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} W_{mn}(x, y) \cdot W_{pq}(x, y) dx dy = \begin{cases} N^2, & (p=m, q=n) \\ 0, & (p \neq m \text{ 或 } q \neq n) \end{cases} \quad (38)$$

可得

$$\frac{d^2 \phi_{mn}(t)}{dt^2} + 2\delta_{mn} \frac{d\phi_{mn}(t)}{dt} + \omega_{mn}^2 \phi_{mn}(t) = q_{mn}(t) \quad (39)$$

这里

$$q_{mn}(t) = \frac{1}{N^2 \sigma_{c.p.}} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(\xi, \eta, t) W_{mn}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (40)$$

式中

$$\delta_{mn} = \mu_{mn}^4 \frac{D_{c.p.}^*}{2\sigma_{c.p.}}, \quad \omega_{mn} = \mu_{mn}^2 \sqrt{D_{c.p.}/\sigma_{c.p.}} \quad (41)$$

当没有外力作用时, $q(x, y, t) = 0$, 则 (39) 式自由振动解

$$\phi_{mn}(t) = e^{-\delta_{mn} t} [A_{mn} \cos(\Omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\Omega_{mn} t)], \quad (42)$$

这里阻尼振动的角频率为:

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} [1 - (\delta_{mn}/\omega_{mn})^2] \quad (42')$$

可见, δ_{mn} 是复合板 (m, n) 简正模式振动时的阻尼常数; ω_{mn} 是略去粘弹性作用时, (m, n) 简正模式振动的固有频率. (39) 式中 $q_{mn}(t)$ 可以看作, 当作用于板面单位质量外力 $(1/\sigma_{c.p.})q(x, y, t)$ 时, 作用于 (m, n) 号模式振动的“广义力”. 对于确定边界条件的复合板, 由给定的外力分布和本征函数求出广义力 $q_{mn}(t)$, 于是由 (39) 式非齐次方程可解得 (m, n) 振动模的振动规律 $\phi_{mn}(t)$. 为解 (39) 式, 作傅里叶变换, 令

$$\left. \begin{aligned} q_{mn}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{mn}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ Q_{mn}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} q_{mn}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ \phi_{mn}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{mn}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \Phi_{mn}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{mn}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

于是由 (39) 式解得

$$\Phi_{mn}(\omega) = \frac{Q_{mn}(\omega)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 - i2\delta_{mn}\omega}$$

利用 (43) 式中反变换及 (40) 式关系代入, 最后得到解

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(\xi, \eta, \tau) \cdot \frac{H_{c.p.}^{mn}(\omega)}{N^2} \cdot W_{mn}(\xi, \eta) \\ &\quad \cdot e^{i\omega(\tau-t)} d\xi d\eta d\tau d\omega \end{aligned} \quad (44)$$

这里, 复合板 (m, n) 简正模振动的响应函数

$$H_{c.p.}^{mn}(\omega) = \frac{1}{-i\omega \cdot Z_{c.p.}^{mn}(\omega)} \quad (45)$$

其中 $Z_{c.p.}^{mn}(\omega)$ 是复合板 (m, n) 号简正模振动的面机械阻抗系数

$$Z_{c.p.}^{mn}(\omega) = \mu_{mn}^4 D_{c.p.}^* - i\sigma_{c.p.}\omega \left(1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}\right) \quad (45')$$

其实部(阻力系数) $r_{c.p.}^{mn} = \mu_{mn}^4 D_{c.p.}^*$

将 (44) 式代入 (36) 式中, 最后得到 (29) 式的一般形式解:

$$\begin{aligned} \bar{W}(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \frac{q(\xi, \eta, \tau) W_{mn}(\xi, \eta) W_{mn}(x, y)}{-i\omega Z_{c.p.}^{mn}(\omega) \cdot N^2} \\ &\quad \cdot e^{i\omega(\tau-t)} d\xi d\eta d\tau d\omega \end{aligned} \quad (46)$$

如前所述 (46) 解中 $W_{mn}(x, y)$ 不仅要满足 (37) 方程, 同时要满足第一节导出的边界条件 (25)、(26) 式.

对于图 1 矩形复合板简支情况, 通解为:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \{[c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + c_3 \cosh(\alpha x) + c_4 \sinh(\alpha x)] \\ &\quad \cdot [c'_1 \cos(\beta y) + c'_2 \sin(\beta y) + c'_3 \cosh(\beta y) + c'_4 \sinh(\beta y)]\}, \end{aligned} \quad (47)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} W(x, y)|_{x=0, l_1} &= 0, \quad W(x, y)|_{y=0, l_2} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{x=0, l_1} &= 0, \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_{c.p.} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{y=0, l_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

将 (47) 式代入 (48) 式中, 可解得

$$c_1 = c_3 = c_4 = c'_1 = c'_3 = c'_4 = 0$$

及

$$\alpha = \alpha_m = \frac{m\pi}{l_1}, \quad \beta = \beta_n = \frac{n\pi}{l_2}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

而不论 $\nu_{c.p.}$ 为何值. 因此, 简支条件下, 矩形复合的本征函数和单板情况一样,

$$\left. \begin{aligned} W_{mn}(x, y) &= \sin\left(\frac{m\pi}{l_1}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l_2}y\right) \\ \mu_{mn}^2 &= \left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \cdot N_{mn}^2, \quad N_{mn}^2 = m^2 + n^2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \\ \text{归一化常数 } N &= \frac{1}{2} \sqrt{l_1 l_2} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

值得注意, 根据第二节由材料粘弹性导出等效刚度复数值 ($D_{c.p.}$ 和 $D_{c.p.}^*$), 从而可由 (41) 式和 (45') 式求出阻尼振动的阻尼常数 δ_{mn} 以及机械阻抗系数的有功分量 $r_{c.p.} = \mu_{mn}^4 D_{c.p.}^*$. 它们表明高阶简正模的阻力更大. 当材料的粘性系数过大时, 高阶简正模振动甚至不可能存在. 如欲采用动态法测量阻尼系数 (用来测定材料的常数) 是不能成功的, 但是如果把它贴在钢板上去测量, 则有可能用复合板参量的计算方法推算材料的参数. 当然, 这样做必须对复合板胶合层的损耗因子给以修正, 修正时不妨利用两层钢板粘合的阻尼常数的实验值. 可以设想, 当材料本身阻尼很大, 中和面设计到靠近胶合层处, 则这种修正误差是不大的.

四、双层板简支振动的数值计算

1. 双层弹性复合板的中和面位置和等效参量的系数计算

钢板为基板, 粘贴橡胶、有机玻璃或 PZT-5A 压电陶瓷片. 改变覆盖层和基板厚度比 h_2/h_1 , 计算复合板的 $D_{c.p.}$ 、 $\nu_{c.p.}$ 和 $\sigma_{c.p.}$ 相对 D_1 、 ν_1 和 σ_1 的比例系数 β 、 e 和 δ 以及中和面的偏离系数 α 的数值, 结果见表 2. 相应的材料参数值见表 1.

表 1 材料的弹性常数
Constants of Material

材 料	$\lambda(\text{N/m}^2)$	$\mu(\text{N/m}^2)$	$E(\text{N/m}^2)$	ν	$\rho(\text{kg/m}^3)$
钢 (Steel)	$12.92 \cdot 10^{10}$	$8.28 \cdot 10^{10}$	$20.7 \cdot 10^{10}$	0.3	7800
橡胶 (Rubber)			$3.0 \cdot 10^7$	0.5	1300
有机玻璃 (Lucite)		$0.14 \cdot 10^{10}$	$0.4 \cdot 10^{10}$	0.4	1200
PZT-5A 压电 陶瓷 (Ceramic)			$1/s_{11}^D = 6.94 \cdot 10^{10}$ $1/s_{11}^E = 6.09 \cdot 10^{10}$	$\nu^D = 0.5$ $\nu^E = 0.35$	7750

对于橡胶板-钢板, 当 h_2/h_1 由 1 增加到 4 时, 中和面偏离只有 0.4%; 而 $D_{c.p.}$ 以 D_1 代之, 误差仅 6%; 对于有机玻璃-钢板, $h_2/h_1 = 2$ 时, 中和面偏离 12%, 而复合板的刚度相应地等于钢板的两倍多.

表 2 复合板的中和面、等效刚度、等效泊松比和等效面密度的系数计算值

Coefficients of neutral surface, rigidity, poisson's ratio and mass surface density for bilaminar plate system

材 料		h_2/h_1						
		1/3	1/2	1	1.5	2	3	4
橡胶板/钢板 Rubber Steel	α			1.0004	1.0007	1.0011	1.0026	1.0035
	β			1.002	1.006	1.011	1.030	1.064
	γ			0.999	0.998	0.997	0.992	0.983
	e			1.002	1.004	1.007	1.019	1.040
	δ			1.17	1.25	1.33	1.50	1.67
有机玻璃板/钢板 Lucite Steel	α			1.041	1.071	1.121	1.236	1.386
	β			1.267	1.641	2.252	4.402	8.135
	γ			0.970	0.945	0.923	0.895	0.883
	e			1.069	1.127	1.179	1.245	1.274
	δ			1.154	1.231	1.308	1.462	1.615
PZT-5A 压电陶瓷片/钢板 Ceremic (PZT-5A) Steel*	α	1.159	1.254	1.578	1.947	2.346		4.097
	β	1.652	2.192	4.877	9.478	16.367		73.487
	γ	0.900	0.870	0.832	0.826	0.827		0.830
	e	1.232	1.304	1.393	1.407	1.405		1.397
	δ	1.33	1.49	1.99	2.48	2.97		4.94

$$\alpha = Z_0/(h_1/2), \beta = \frac{D_{c.p.}}{D_1}, \left(D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu_1^2)}\right), \gamma = \frac{1-\nu_{c.p.}}{1-\nu_1}, e = \frac{\nu_{c.p.}}{\nu_1}, \delta = \frac{\sigma_{c.p.}}{\sigma_1} (*\rho_1=7860\text{kg/m}^3)$$

2. 矩形粘弹性复合板简支条件简正模式的阻力系数、阻尼常数和固有频率

双层矩形复合板, 钢板粘性略去不计, 橡胶板取 $\eta_{E_2} = 0.2$, $\eta_{\mu_2} = 0.3$, 其它常数如表 1. 板的尺寸如下: $h_1 = 2 \times 10^{-3}\text{m}$, $l_1 = 0.96\text{m}$, $l_1/l_2 = 1.2$. 计算所得橡胶-钢板复合板的等效刚度、等效密度随厚度比 h_2/h_1 的变化值如表 3. 由表可见, 等效刚度随 h_2/h_1 的增大变化不大; 但是与阻尼常数有关的 $D_{c.p.}^*/(2\sigma_{c.p.})$ 随厚度却作非线性增涨. 还可见, 随着 h_2/h_1 的增大, 同一号简正模式的固有频率随之下落, 其原因是 $E_2 \ll E_1$, 则 h_2 增大时, $D_{c.p.}$ 值的增加

表 3 粘弹性复合板的等效参数计算值

Calculated values of equivalent Parameter of viscoelastic composite plate system, rubber/steel

参 数	h_2/h_1			
	1	2	3	4
α	1.000330	1.000989	1.001978	1.003297
β_1	1.002144	1.010224	1.028194	1.060007
$D_{c.p.}$	151.9735	153.1987	155.9239	160.7483
$D_{c.p.}^*(10^{-5})$	0.02582	0.12313	0.33951	0.72252
$\sigma_{c.p.}$	18.2	20.8	23.4	26.0
$\frac{D_{c.p.}^*}{2\sigma_{c.p.}}(10^{-8})$	0.70947	2.95985	7.25454	13.89467
$\sqrt{D_{c.p.}/\sigma_{c.p.}}$	2.88967	2.71391	2.58136	2.48649

速度不如 $\sigma_{c.p.}$ 的增加速度, 所以固有频率随 h_2 增大而减小, 当 h_2/h_1 由 1 增大到 4 时, 频率下降约 14%。

对各号简正模按本征值 μ_{mn} 和无量纲数 N_{mn} 的大小顺序排列, 对应的阻力系数、阻尼常数和固有频率等计算值列入表 4 中。实际上, 考虑到板之间胶合层的粘性阻尼作用, 复合板的等效阻尼常数会比计算值更高。另外, 当阻力系数值不大的情况, 在介质振动时, 还要考虑到介质的阻尼作用, 虽然空气的声特性阻抗值不大 ($\rho c \cong 430 \text{ kg/m}^2/\text{s}$)。由表可见, 板的简正振动固有频率随序号增大而迅速增大; 由于 $(\delta_{mn}/\omega_{mn})^2 \ll 1$, 所以阻尼振动频率和对应的简正振动固有频率之差远小于测量误差和其它仪表可能引起的误差。为了便于比较粘贴橡胶板后固有频率的变化, 表中同时给出原来钢板的简正振动的固有频率的计算值 f_{mnl} 。可见, 在所举例中, 附加橡胶板后, 固有频率下降约 20%。

表 4 矩形粘弹性复合板简正模的本征值、阻力系数和固有频率值

Values of eigenvalue, resistance constant, damping constant and natural frequency for rectangular viscoelastic composite plate system, rubber-steel

m	n	N_{mn}^2	$\mu_{mn}^2 (\text{1/m}^2)$	$r_{c.p.}^m (\text{kg/m}^2/\text{s})$	$\delta_{mn} (\text{1/s})$	$f_{mn} (\text{Hz})$	$f_{mnl} (\text{Hz})$
1	1	2.44	26.13046	2.318×10^{-3}	0.049×10^{-3}	10.735	12.967
2	1	5.44	58.25808	1.152×10^{-2}	0.246×10^{-3}	23.935	28.91
1	3	13.96	149.50052	7.588×10^{-2}	1.621×10^{-3}	61.42	74.19
2	3	16.96	181.62814	1.120×10^{-1}	2.393×10^{-3}	74.62	90.13
3	3	21.96	235.17417	1.878×10^{-1}	4.012×10^{-3}	96.62	116.70
1	5	37.00	396.24063	5.331×10^{-1}	11.39×10^{-3}	162.79	196.62
2	5	40.00	428.36825	6.230×10^{-1}	13.31×10^{-3}	175.99	212.57
3	5	45.00	481.91428	7.885×10^{-1}	16.85×10^{-3}	197.99	239.14
4	5	52.00	556.87872	1.052875	22.50×10^{-3}	238.79	276.34
5	5	61.00	653.26158	1.44887	30.96×10^{-3}	268.38	324.16
1	7	71.56	766.35079	1.99393	42.61×10^{-3}	314.84	380.28
3	7	79.56	852.02444	2.46468	52.66×10^{-3}	350.04	422.79
5	7	95.56	1023.37174	3.55568	75.976×10^{-3}	420.44	507.82
7	7	119.56	1280.39269	5.56598	118.93×10^{-3}	526.03	635.36
17	17	705.16	7551.70382	193.618	4.1371	3102.5	3747.3
19	19	880.84	9433.0972	302.109	6.4553	3875.5	4680.9
21	21	1076.04	11523.50	450.8421	9.6334	4734.3	5718.2
23	21	1164.04	12465.94	527.6011	11.2735	5121.5	6185.9
23	23	1290.76	13823.015	648.7258	13.8617	5679.0	6859.3
31	31	2344.84	25111.375	2140.901	45.7458	10316.7	12460.8

五、结 论

1. 采用最小势能原理和变分方法确定非对称复合弹性板中和面的位置, 建立中和面横向位移的运动方程和边界条件。理论分析和数值计算表明中和面的位置与层的材料和厚度比有很大关系; 中和面的位置确定对复合板的等效弹性常数的计算具有重要意义。引入等效参量可使复合板的运动方程及边界条件简化成类似薄板的弯曲振动方程。

2. 由粘弹性理论导出粘弹性和弹性复合板的运动方程。对此复合板系统, 给出等效参量

和材料动态弹性模量之间的直接计算关系。举例计算表明, 材料的弹性模量和损耗因子对系统的阻力系数、阻尼常数和简正模式固有频率的影响, 以及厚度比对它们的影响。

3. 本文证明了简正模式分析法, 对于求解复合粘弹性薄板弯曲振动的任意情况均适用。无论外力为何种函数, 也无论沿板面作如何分布, 简正模式的本征函数和相同边界条件薄板的简正模的本征函数相同, 因此很方便地给出一般解。

显然, 复合板系统的振动理论对于船舶上或其它建筑上以及各类吸声器、阻尼器、排气管道、机械设备基座的减震器等的设计是有意义的。

当复合板在密介质中振动时, 板面受到介质的反作用很强。它表现为附加机械阻抗和声辐射效应。不同简正模式的声辐射产生简正模式之间的声耦合效应。所以复合弹性板和粘性板理论在水下结构的理论分析和工程设计上具有重要意义, 例如有关声呐导流罩、各种水声基阵障板、船体外壳或其它水下结构的振动和声辐射以及声散射等问题的研究和声学设计。有关矩形粘弹性复合板的声散射问题将在另一篇文章讨论。

参 考 文 献

- [1] Ross, D., "Mechanics of Underwater Noise", (Pergamon Press Inc., 1976).
- [2] Lyamshev, L. M., "Sound Reflection from Thin Plates and Shells in Liquid", M., Izd. AN SSSR, (1955).
- [3] Krasil'nikov, V. N., *Akust. Zh.*, 6(1960), No. 2, 220—228.
- [4] Borisov, L. P., Tartakovskii, B. D., *Akust. Zh.*, 11(1965), No. 3, 306—312.
- [5] Maidanik, G., *J. Sound and Vibr.* 3(1966), 288.
- [6] Davies, H. G., *Tech. Report No. 71476-1 MIT Acoust. and Vibr. Lab.*, 02139, (1969).
- [7] Mead, D. J., *J. Sound and Vibr.*, 61(1978), 315—326.
- [8] Mac, B. R., *J. Sound and Vibr.*, 73(1980), No. 4, 473—486.
- [9] Jacobson, M. J., *J. Acoust. Soc. Am.*, 40(1965), No. 3, 667—683.
- [10] Snowdon, J. C., *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(1974), No. 4, 1177—1184.
- [11] Ramachandra, Reddy, Genesan, N., Rao, B. V. *J. Sound and Vibr.*, 73(1980), No. 3, 419—427.
- [12] He Zuo-yong "Vibration of Finite Composite Viscoelastic Plate and Coupling of Modes in Sound Field", I.M.A.E.M. 2nd International congress, Trieste, September (1981), 21—26.
- [13] Landau, L. D., Lifshietz, E. M., "Theory of Elasticity", (Pergamon Press. Inc. 1959).
- [14] Mindlin, R. D., *J. Appl. Mech.*, 18(1951), 31.