

H^p 函数的表示定理及其 在声学中的应用

任 树 初

(中国科学院声学研究所)

1984年11月20日收到

摘要 本文从单位圆盘上的 H^p 函数的表示定理出发,借助于分式线性变换导出了适用于上半平面的 H^p 函数的正确的表示定理和正确的数值计算公式,以球形压电接收器为例从给定频率范围内的传递函数的已知值利用 H^p 函数的表示解析延拓得到了给定频域以外的值,所得到的结果与传递函数的理论值符合很好。

此外,从公式分析和数值模拟都表明, H^p 函数的表示定理隐含了因果性条件。

REPRESENTATION THEOREM OF H^p FUNCTIONS AND IT'S APPLICATION TO ACOUSTICS

REN SHU-CHU

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Received November 20, 1984

Abstract In this paper, the correct representation theorem and numerical calculating formulae of H^p functions suitable in the upper half-plane are derived from the representation theorem of H^p functions in the unit disk by means of linear fractional transform.

Taking the spherical piezoelectric receiver as an example the values of its transfer function outside the given frequency range are obtained from the known values of the transfer function in the given frequency range by using the analytical continuation of H^p functions, the results are in good agreement with the theoretical values of the transfer function.

In addition, it is shown from the formulae analysis and numerical calculation that the representation theorem of H^p functions implies the causality condition.

一、引 言

在物理学的许多分支,如核物理、光学、电磁学、声学以及系统工程等领域中,我们常常见到所谓的色散关系,也称希尔伯特变换。

什么样的物理系统才存在这种关系呢?从函数论知,对于线性时不变的因果性系统,它的传递函数满足希尔伯特变换:

$$H_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_I(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1)$$

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_R(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (2)$$

式中 H_R 和 H_I 分别是传递函数的实部和虚部。

由 (1), (2) 式可见, $H_R(\omega)$ 和 $H_I(\omega)$ 的关系相对于频率而言是全局的关系, 即若知道了 $H_R(\omega)$ 或 $H_I(\omega)$ 在整个频率范围内的特性, 则可以从 (1) 和 (2) 式分别算出 $H_I(\omega)$ 或 $H_R(\omega)$ 来。

在实际工作中常常会遇到这种情况, 例如在测量系统的传递函数 $H(\omega) = H_R(\omega) + iH_I(\omega)$ 时, 由于方法和/或设备条件和环境条件的限制, 我们只能得到某个有限频率范围 ω_0 到 ω_1 内的传递函数。又例如在复杂形状物体的散射场的计算中, 常常采用程度不等的各种数值近似方法。从方法本身来说, 它们没有频率范围的限制。但当物体的尺度比波长大很多时, 此时由于单元或网格的划分愈来愈细, 因而所需的计算机存贮容量愈来愈大, 以致超过计算机的存贮容量。因此这些方法实际上在高频是有限制的。又例如几何绕射理论适用于高频而不适用于低频。于是产生了这样的问题, 能否利用已知频率范围的信息得到未知频率范围的信息呢?

据文献 [1] 给出的 H^p 空间的表示定理便可达到这样的目的。文献 [2] 首次应用此定理于简单代数复函数的数值解析延拓。但在基本公式和数值计算公式方面都存在一些错误, 虽然如此, 但由于其思路和方法都是正确的, 因此文献 [2] 仍不失为将纯数学的近代研究成果应用于物理问题的一篇开拓性文章。

在本文中我们根据 H^p 空间的表示定理并利用文献 [2] 的思路和方法, 逐一改正了文献 [2] 中的错误。将所得到的结果用于声学中较复杂的复函数, 即球形压电接收器的传递函数的解析延拓问题。首先我们利用线性分式变换从适用于单位圆盘的 H^p 函数的表示定理导出了适用于上半平面的 H^p 函数的正确的表示定理和正确的数值计算公式。利用这些公式延拓得到的球形压电接收器的传递函数与理论值非常符合。此外, 从分析和数值模拟都表明, H^p 函数的表示定理隐含了因果性条件。

二、 H^p 空间和 H^p 函数的表示

为了方便, 我们首先引进 H^p 空间的定义和单位圆盘上的 H^p 函数的表示定理^[3]。

H^p 空间. 对于单位圆盘上的解析函数 $f(z)$, 定义积分

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty \quad (3)$$

$$M_\infty(r, f) = \max |f(re^{i\theta})| \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4)$$

当 $r \rightarrow 1$ 时, 若 $M_p(r, f)$ 有界, 则在单位圆盘 $|z| < 1$ 上的解析函数 $f(z)$ 属于 H^p 类 ($0 < p < \infty$)。特别, H^2 是系数的平方和为有界 ($\sum |a_n|^2 < \infty$) 形式为 $\sum a_n z^n$ 的幂级数类, 所有属于 H^p 类的函数构成的空间称为 H^p 空间^[3]。

设 C 是单位圆, D 是单位圆盘, 若 $E \subset C$ 有正测度 $m(E) > 0$, 设定义在单位圆盘 D 上

的解析函数 $f \in H^p$, 则由文献 [1] 有:

定理 1. 设 $E \subset C$ 且 $m(E) > 0$, 假定 $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p$ 且 g 是 f 在 E 上的限制. 对于每一 $\lambda > 0$ 在 D 上由下面两式确定了解析函数 h_λ 和 g_λ :

$$h_\lambda(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \log(1+\lambda) \int_E \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right\}, \quad z \in D \quad (5)$$

$$g_\lambda(z) = \lambda h_\lambda(z) \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{h_\lambda^*(W)g(W)dW}{W-z}, \quad z \in D \quad (6)$$

则当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 在 D 的紧子集上一致地有 $g_\lambda \rightarrow f$. 此外, 对于 $1 < p < \infty$, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 我们也有 $\|g_\lambda - f\|_p \rightarrow 0$.

下面我们将通过分式线性变换将上述定理变换到适用于上半平面的情况. 易证, 变换

$$\eta' = i \frac{1-z}{1+z} \quad (7)$$

将 z 平面上单位圆的内部映照到 η' 平面的上半平面, 将 z 平面上的单位圆映照到 η' 平面上的实轴.

记

$$I = \int_E \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \quad (8)$$

在 (7) 式中令 $z = e^{i\theta}$, 记相应的 η' 为 η 得:

$$\eta = i \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad d\theta = 2d\eta / (1 + \eta^2) \quad (9)$$

又从 (7) 式解出 z 得:

$$z = \frac{1 + i\eta'}{1 - i\eta'}, \quad e^{i\theta} = \frac{1 + i\eta}{1 - i\eta} \quad (10)$$

将 (9) 式, (10) 代入 (8) 式得:

$$I = \int_E \frac{\frac{(1+i\eta)}{(1-i\eta)} + \frac{(1+i\eta')}{(1-i\eta')}}{\frac{(1+i\eta)}{(1-i\eta)} - \frac{(1+i\eta')}{(1-i\eta')}} \cdot \frac{2d\eta}{1+\eta^2} = \int_E \frac{1+\eta\eta'}{i(\eta-\eta')} \cdot \frac{2d\eta}{1+\eta^2} \quad (11)$$

式中积分范围 E 现在是实轴上的正测度的集合.

于是只需将上述定理中的单位圆 C 换为实轴 R , 单位圆盘 D 换为上半平面, E 理解为实轴上的正测度的集合, 这样我们便得到适用于上半平面的 H^p 函数的表示定理:

定理 2. 设 $E \subset R$ 且 $m(E) > 0$, 假定 $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p$ 且 g 是 f 在 E 上的限制. 对于每一 $\lambda > 0$ 在上半平面由下面两式确定了解析函数 h_λ 和 g_λ :

$$h_\lambda(\eta') = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \log(1+\lambda) \int_E \frac{1+\eta\eta'}{\eta-\eta'} \cdot \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}, \quad \operatorname{Im}(\eta') \geq 0 \quad (12)$$

$$g_\lambda(\eta') = \lambda h_\lambda(\eta') \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{h_\lambda^*(\eta)g(\eta)}{\eta-\eta'} d\eta, \quad \operatorname{Im}(\eta') \geq 0 \quad (13)$$

当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 在上半平面的紧子集上一致地有 $g_\lambda \rightarrow f$. 此外, 对于 $1 < p < \infty$, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 我们也有 $\|g_\lambda - f\|_p \rightarrow 0$.

文献 [4] 对于 $p=2$ 的特殊情况给出了上述定理. 但相应的公式为

$$h_{\lambda}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi i} \log(1+\lambda) \int_E \int \frac{1+tz}{1-z} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \right\}, \quad \text{Im}(z) \geq 0 \quad (14)$$

$$g_{\lambda}(z) = \lambda h_{\lambda}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{h_{\lambda}(t)g(t)}{t-z} dt, \quad \text{Im}(z) \geq 0 \quad (15)$$

比较(12)式和(14)式显见, 它们的指数因子差两倍, 从通常的希尔伯特变换也可证明, 当我们利用分式线性变换(7)式将适用于单位圆的希尔伯特变换变为适用于实轴上的希尔伯特变换时, 两者的确也存在两倍因子的差别. 此外, 比较(13)式与(15)式可以看到, 两者中的被积函数分别为 $h_{\lambda}^*(\eta)$ 和 $h_{\lambda}(\eta)$. 数值计算表明, (13)式是正确的而(15)式是错误的. 由此我们可以得出结论, (12)和(13)两式才是适用于上半平面的正确公式, 而文献[4]给出的公式(14)和(15)则是错误的.

三、数值计算和讨论

通常, 我们所涉及的物理问题在时域内都是时间的实函数, 从频域来看, 则它们的实部和虚部分别是偶函数和奇函数. 因此与文献[2]类似, 我们取 E 为按坐标原点对称的积分区间 $E = [x_0 \leq |\eta| \leq x_1]$, $\eta' = x + iy$. (12)式中的积分可分解为两个积分:

$$I = \int_E \frac{1+\eta\eta'}{\eta-\eta'} \cdot \frac{1}{1+\eta^2} d\eta = \int_E \frac{d\eta}{\eta-\eta'} - \frac{1}{2} \int_E \frac{2\eta}{1+\eta^2} d\eta \quad (16)$$

(16)式中右端第二个积分由于积分区间的对称性和被积函数是奇函数因而等于零, 而文献[2]给出的结果则是错误的.

(16)式右端第一个积分可写为:

$$\int_E \frac{d\eta}{\eta-\eta'} = \int_E \frac{d\eta}{(\eta-x)-iy} = \int_E \frac{\eta-x}{(\eta-x)^2+y^2} d\eta + i \int_E \frac{y}{(\eta-x)^2+y^2} d\eta$$

积分后, 让 $y \rightarrow 0$, 我们得到:

$$\int_E \frac{d\eta}{\eta-\eta'} = \ln \left| \frac{x_0+x}{x_0-x} \cdot \frac{x_1-x}{x_1+x} \right| + i\pi R(x, x_0, x_1) \quad (17)$$

式中

$$R(x, x_0, x_1) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_0 < |x| < x_1 \\ 1/2, & \text{当 } |x| = x_0, |x| = x_1 \\ 0, & \text{当 } |x| < x_0, |x| > x_1 \end{cases} \quad (18)$$

将(17), (18)代入(12)我们得到:

$$\left. \begin{aligned} h_{\lambda}(x) &= (1+\lambda)^{-1/2} e^{iG(x)}, & x_0 < |x| < x_1 \\ h_{\lambda}(x) &= e^{iG(x)}, & |x| < x_0, |x| > x_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(1+\lambda) \cdot \ln \left| \frac{x_0+x}{x_0-x} \cdot \frac{x_1-x}{x_1+x} \right| \quad (20)$$

在(19)式中及以后我们均忽略了 $|x| = x_0, |x| = x_1$ 的情况. 因为在进行数值积分时, 这些点是奇点只允许无限逼近而不能达到. 与此相应, 以下的积分均应理解为主值积分, 即:

$$\oint_{x_0 \leq |x| \leq x_1} f(x) dx \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{x_0+\delta \leq |x| \leq x_1-\delta} f(x) dx$$

类似地, 我们得到:

$$\int_E \frac{h_\lambda^*(\eta)g(\eta)}{\eta - \eta'} d\eta = \begin{cases} \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{h_\lambda^*(\eta)g(\eta)}{\eta - x} d\eta + i\pi h_\lambda^*(x)g(x), & x_0 < |x| < x_1 \\ \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{h_\lambda^*(\eta)g(\eta)}{\eta - x} d\eta, & |x| < x_0, |x| > x_1 \end{cases} \quad (21)$$

将 (19)–(21) 式代入 (13) 式, 于是对 $x_0 < |x| < x_1$, 当 $\lambda \gg 1$ 时有:

$$g_\lambda(x) = e^{iG(x)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{e^{-iG(\eta)}g(\eta)}{\eta - x} d\eta + \frac{1}{2} g(x) \quad (22)$$

当 $x_0 \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow \infty$ 时, $e^{iG(x)} \rightarrow 1$, 将上式实部和虚部分开便立即得到希尔伯特变换 (1) 式和 (2) 式.

对于 $|x| < x_0$ 和 $|x| > x_1$, 当 $\lambda \gg 1$ 时有:

$$g_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{2}} e^{iG(x)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{e^{-iG(\eta)}g(\eta)}{\eta - x} d\eta \quad (23)$$

式中右端因子 $\lambda^{1/2}$ 本应为 λ , 但这样我们得不到正确的一致收敛的结果. 数值计算表明当改为 $\lambda^{1/2}$ 时便得到正确的一致收敛结果.

将上式的实部与虚部分开得到:

$$g_\lambda^R(x) = \lambda^{1/2} \cos G(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{-g^R(\eta) \sin G(\eta) + g^I(\eta) \cos G(\eta)}{\eta - x} d\eta \\ + \lambda^{1/2} \sin G(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{g^R(\eta) \cos G(\eta) + g^I(\eta) \sin G(\eta)}{\eta - x} d\eta \quad (24)$$

$$g_\lambda^I(x) = \lambda^{1/2} \sin G(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{-g^R(\eta) \sin G(\eta) + g^I(\eta) \cos G(\eta)}{\eta - x} d\eta \\ - \lambda^{1/2} \cos G(x) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 < |\eta| < x_1} \frac{g^R(\eta) \cos G(\eta) + g^I(\eta) \sin G(\eta)}{\eta - x} d\eta \quad (25)$$

式中

$$g_\lambda(x) = g_\lambda^R(x) + i g_\lambda^I(x), \quad g(\eta) = g^R(\eta) + i g^I(\eta), \\ G(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(1 + \lambda) \ln \left| \frac{x_0 + x}{x_0 - x} \cdot \frac{x_1 - x}{x_1 + x} \right| \quad (26)$$

(24), (25) 和 (26) 式便是在实轴上对函数 $g(\eta)$ 进行解析延拓的数值计算公式, 由于被积函数比较复杂, 我们只能通过数值积分来求得所需的结果. 为了计算方便, 我们做某些变换. 为此令

$$t = -\ln \left(\frac{x_1 - \eta}{x_1 + \eta} \right) \quad (27)$$

代入 (24), (25) 和 (26) 式, 经过不太复杂的运算后得到最后的数值计算公式:

$$g_\lambda^R(x) = K \cdot [\sin G(x) \cdot (I_1 + I_2) + \cos G(x) \cdot (I_3 - I_4)] \quad (28)$$

$$g_\lambda^I(x) = K \cdot [-\cos G(x) \cdot (I_1 + I_2) + \sin G(x) \cdot (I_3 - I_4)] \quad (29)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{x g^R(\eta(t)) \cdot \cos G(\eta(t))}{N} dt \\ I_2 &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{x g^I(\eta(t)) \cdot \sin G(\eta(t))}{N} dt \\ I_3 &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\eta(t) g^I(\eta(t)) \cos G(\eta(t))}{N} dt \\ I_4 &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\eta(t) g^R(\eta(t)) \sin G(\eta(t))}{N} dt \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} K &= \lambda^{1/2} \cdot \frac{-x_1}{\pi(x^2 + x_1^2)}, \quad N = 1 + (e^{-t} + e^t) \cdot \frac{x^2 - x_1^2}{2(x^2 + x_1^2)} \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi} \ln(1 + \lambda), \quad \eta(t) = x_1 \cdot \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}} \\ t &= -\ln\left(\frac{x_1 - \eta}{x_1 + \eta}\right), \quad t_0 = -\ln\left(\frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0}\right) \\ G(x) &= \gamma \cdot \ln \left| \frac{x_0 + x}{x_0 - x} \cdot \frac{x_1 - x}{x_1 + x} \right| \\ G(\eta(t)) &= \gamma \cdot \ln \left| \frac{x_0 + \eta(t)}{x_0 - \eta(t)} \cdot \frac{x_1 - \eta(t)}{x_1 + \eta(t)} \right| \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

当给定从 x_0 到 x_1 范围内的函数 f 的限制 g , 则从公式 (28) — (31) 进行数值解析延拓便可得到低于 x_0 或/和高于 x_1 范围内的 g , 且当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 我们得到 $g \rightarrow f$. 在实际计算时, λ 的值取足够大就可以了.

下面我们以球形压电接收器为例, 对其传递函数的实部和虚部进行延拓. 根据文献 [5], 薄球壳压电陶瓷、球形接收器在平面声波入射下的开路输出电压, 即传递函数的解析表达式可表为:

$$H(\omega) = \frac{(-i2hag_{31})/[\omega(1 - \sigma^D) s_{11}^D a^2]}{Z_0 + Z_{00}} \cdot \left[\frac{i}{(ka)^2 h_0^{(1)'}(ka)} \right] \cdot e^{-i \frac{a}{c} \omega} \quad (32)$$

式中 h 和 a 分别是球壳的壁厚和半径, g_{31} , s_{11}^D 和 σ^D 是压电球壳的材料常数, k 是圆波数,

$$Z_0 = \frac{i2h}{a^2 s_{11}^D (1 - \sigma^D) \omega} - i\rho_1 h \omega$$

$$Z_{00} = i\rho c \frac{h_0^{(1)}(ka)}{h_0^{(1)'}(ka)}$$

ρc 是周围介质的比声阻抗, ρ_1 是球壳的密度, ω 是圆频率, $h_0^{(1)}$ 是零阶第一类球 Hankel 函数, 撇号“'”表按宗量求导, $e^{-i\omega a/c}$ 是考虑了因果性而引入的相移因子.

对于壁厚和半径分别为 0.0015m 和 0.015m 的 PZT-5 球形压电接收器在水中工作的情况, 由 (32) 式算出的传递函数的实部, 虚部, 振幅谱和相位谱分别如图 1, 图 2 和图 3 的实线所示.

下面我们利用 (28) — (31) 式对球形压电接收器的传递函数进行解析延拓. 假定 0 — 61.5kHz 范围内的传递函数是已知的. 将 (32) 式的实部虚部分开后代入 (28) — (31) 式, 利用数值积分延拓得到的高于 61.5kHz 的传递函数的实部, 虚部, 振幅谱和相位谱分别如图 1, 图 2 和图 3 中的星号 * 所示, 它们与直接从 (32) 式算出的结果是很符合的.

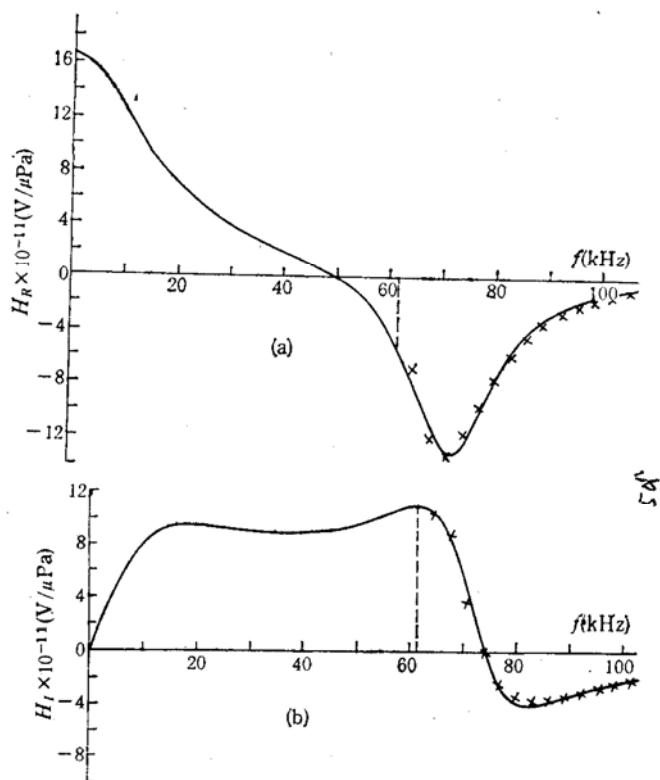


图 1 球形压电接收器的传递函数的实部 (a) 和虚部 (b)

Real and imaginary parts (a) and (b) of transfer function of spherical piezoelectric receiver

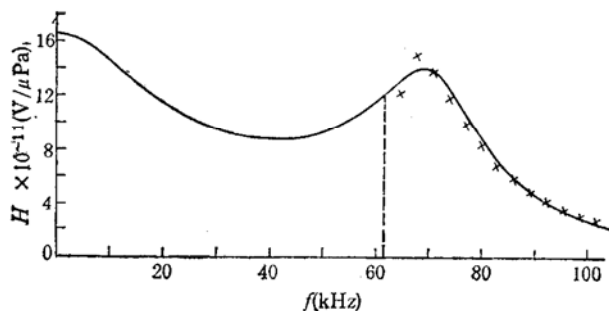


图 2 球形压电接收器的传递函数的振幅谱

Amplitude spectrum of transfer function of spherical piezoelectric receiver

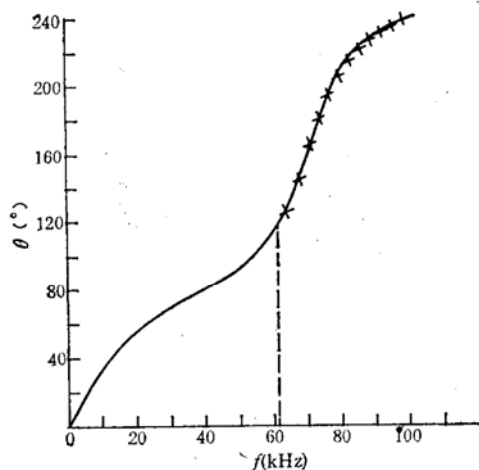


图 3 球形压电接收器的传递函数的相位谱

Phase spectrum of transfer function of spherical piezoelectric receiver

数值计算表明, 当 λ 的值逐渐增大时, 正如定理所述, 计算结果的确是一致收敛的. 表 1 表明了这种收敛过程. 表 2 给出了在 $\lambda = 10^{10}$, $x_0 = 0$, 在不同的 x_1 的值下所算出的 80kHz 处的传递函数的变化, 当 x_1 逐渐增大时, 延拓得到的结果愈来愈接近理论值.

当 $x_0 \neq 0$ 时, 由于 x_0 和 x_1 都是函数 $G(\eta(t))$ 的奇点, 因此积分的分点需要加密. 对于下述简单的代数函数

表 1 球形压电接收器的传递函数在 80kHz 的延拓值随 λ 的变化
Continued values of transfer function of spherical receiver at different λ with 80kHz

λ	实部	虚部	振幅	相位 ($^{\circ}$)
10^6	-6.8	-2.08	7.13	196.9
10^8	-7.39	-2.50	7.8	198.7
10^{10}	-7.59	-3.25	8.25	203.4
理论值	-7.62	-3.90	8.56	207.1

表 2 球形压电接收器的传递函数在 80kHz 的延拓值随 x_1 的变化
Continued values of transfer function of spherical receiver at different x_1 with 80kHz

x_1 (kHz)	实部	虚部	振幅	相位 ($^{\circ}$)
15385	-1.71	1.36	2.19	141.37
30770	-4.18	1.88	4.58	155.78
46155	-6.71	-0.64	6.74	185.46
61540	-7.59	-3.25	8.25	203.4
理论值	-7.62	-3.90	8.56	207.1

$$F = \frac{1}{1 + \eta^2} + i \frac{\eta}{1 + \eta^2} \quad (33)$$

当 $x_0 = 0.1$, $x_1 = 1$ 时, 延拓得到的结果如图 4 的星号 * 所示, 图中的实线是直接从 (33) 式计算得到的。

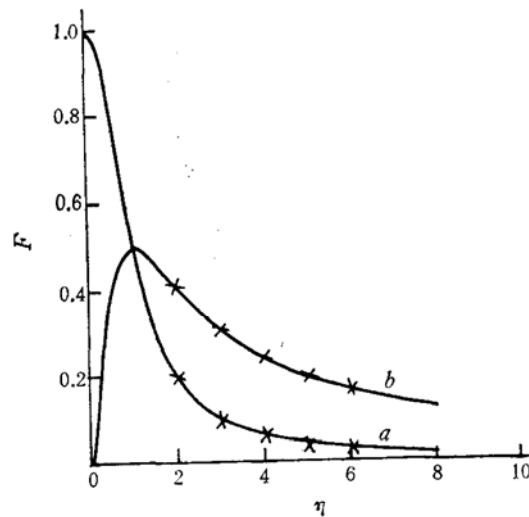


图 4 (33) 式所示的代数函数的实部 (a) 和虚部 (b)

Real and imaginary parts (a) and (b) of algebraic function shown in expression (33)

(32) 和 (33) 式所示的函数都是因果性函数。此外, 由于定理 1 和定理 2 并没有显含 f 函数必须是因果性的假定。为了试验非因果性的实时间函数是否也能利用 (28) — (31) 式进行数值解析延拓, 我们将 (32) 式中的因子 $e^{-ia/c\omega}$ 去掉代入 (28) — (31) 式如前所述进行数值解析延拓, 我们并不能得到正确的结果, 其原因可解释如下: 尽管我们赖以进行数值计算的公式 (28) — (31) 来源于 (21) 式, 而在从 (14) 式导出 (28) — (31) 式的过程中我们只假定了

$g(\eta)$ 的实部和虚部分别是偶函数和奇函数,即是说从时域中看只需假定函数是时间的实函数即可,因此并不包含因果性假定. 另一方面,(23)式并不是孤立的,它必须同(22)式同时成立,而当 $\lambda \rightarrow \infty$, $x_0 \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow \infty$ 时,将(22)式的实部与虚部分开立即得到希尔伯特变换. 根据 Titchmarsh 定理[6]知,若函数的实部和虚部满足希尔伯特变换,则此函数必是因果性函数. 因此可以说,定理 1 和定理 2 隐含了因果性条件.

四、结 论

1. 利用分式线性变换,从定理 1 直接得到了适用于上半平面的 H^p 函数的表示定理,并且从数值计算结果表明,所导出的公式是正确的,而文献[2]和[4]原理和方法是对的,但所给出的公式是错误的.

2. 从球形压电接收器的传递函数的数值解析延拓结果表明,所得到的结果同直接从传递函数的公式计算出的结果符合得很好. 并且当 λ 增大时,延拓的结果是一致收敛的. 此外,在同一个 λ 值下延拓的结果随给定函数值的频率范围的增大而愈接近理论值.

3. 公式(22)和(23)是同时成立的,而当 $\lambda \rightarrow \infty$, $x_0 \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow \infty$ 时,公式(22)过渡到希尔伯特变换,而(22)式的导出是直接源于(12)和(13)式,并未附加任何假定. 因此我们可以说定理 1 和定理 2 隐含了因果性假定. 数值计算结果也证实了这个结论.

参 考 文 献

- [1] Patil, D. J., "Representation of H^p Functions", *Bull. Am. Math. Soc.*, 78(1972), 617.
- [2] Hulthen, H., "Kramers-Kronig Relations Generalized: on Dispersion Relations for Finite Frequency Intervals. a Spectrum Restoring Filter", *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1982), 794.
- [3] Duren, P. L., "Theory of H^p Spaces", (Academic Press, New York, 1970), 1.
- [4] Mukherjee, R. N., "Representation of H^p Functions on the Real Line", *Bollettino U. M. I.*, 10(1974), 666.
- [5] Ren, S. C., "Reconstructions of Phase Spectrum and Transient Responses of Spherical Piezoelectric Transducer", *Chinese J. Acoust.*, 3(1984), No. 1, 64—77.
- [6] Nussenzveig, H. M., "Causality and Dispersions Relations", (Academic Press, London, 1972).