

有限振幅脉冲波在管道中的传播

陈建锋 赵松龄

(同济大学声学研究所)

1988年8月5日收到

摘要 本文分析有限振幅声波在刚性管道中的传播. 首先讨论忽略管壁阻尼影响时 Burgers 方程的解, 以反对称 N 波解为基础, 获得了非对称的 N 波解, 能更好地适配实际产生的 N 波. 然后把管壁阻尼的影响作为小量进行修正, 获得了广义 Burgers 方程的近似解. 文中对实验测试作了扼要介绍, 表明理论预测与实验结果良好相符.

Propagation of finite amplitude sound pulses in tubes

CHEN Jianfeng ZHAO Songling

(Institute of Acoustics, Tongji University)

Received August 5, 1988

Abstract In this paper, the nonlinear propagation properties of finite amplitude sound pulses in tubes with rigid wall is studied. At first, we discuss the solutions of Burgers equation in which dissipation due to wall effect is neglected. Based on the antisymmetric N shaped waveform solution, we obtain an asymmetric one which can fit the actual N wave better. Secondly, we assume that the wall effect is much smaller than the nonlinear effect of acoustic wave, and hence, the approximate solution of the generalized Burgers equation is obtained by perturbation method. Finally, the experimental investigation is described and discussed briefly. It is shown that the experimental data are in good agreement with the theoretical calculations proposed in the paper.

一、引言

有限振幅声波在管道中传播问题, 对于非线性声学的基础研究具有重要的意义. 在扰动源为简谐振动的简单情况, Fubini G. E.^[1] 求出了有限振幅声波的近场解. Fay R. D.^[2] 引入推迟时间 $\tau = t - x/c_0$, 考虑声波扰动的二阶小量, 把非线性声波传播归结为一个求解 Burgers 方程的问题, 并求出了适用于形成激波面后的远场解. Blackstock D. T.^[3] 把 Fubini 解与 Fay 连接起来得到统一的表达式. 对于多频率有限振幅声波, 需要考虑各频率成份间的非线性相互作用, Fenlon F. H.^[4], 杜功焕^[5], 朱哲民^[6] 等对这类问题作了深入研究.

对于有限振幅脉冲波, 由于具有瞬态非线性特性, 直接在时域作波形分析往往比在频域作频谱分析更为方便. 忽略管壁阻尼的影响时, 相应得到一维 Burgers 方程^[7], 它已有大量现成

的解析解^[8,9],其中包括常见的 N 波解. 考虑管壁阻尼影响时,相应得到广义 Burgers 方程^[10],由于该方程相当复杂,很难解析求解. Nakamura A. 等^[11], Keller J. J. 等^[12]曾采用数值计算方法作了研究, Blackstock D. T.^[13]曾深入分析二次谐波的产生与衰减规律.

本文在前人工作的基础上,分析讨论有限振幅脉冲波在刚性管道中的传播. 首先讨论忽略管壁阻尼影响时 Burgers 方程的解,以现成的反对称 N 波解为基础,获得了非对称 N 波的近似解,它能更好地适配实际产生的 N 波. 然后把管壁阻尼的影响作为小量进行修正,以所得 Burgers 方程解为基础,获得了广义 Burgers 方程的近似解. 文中对实验测试作了扼要介绍,表明理论预测与实验结果良好相符.

二、Burgers 方程的 N 波解

在刚性管道中,如果忽略管壁阻尼的影响,声波将以平面波形式沿管道传播. 取 x 轴沿声波传播方向,并以 x 及推迟时间 $\tau = t - x/c_0$ 作为基本自变量. 与 $\partial/\partial\tau$ 项相比较,可设 $\partial/\partial x$ 为高一阶小量. 考虑管内气体的粘滞性及热传导,可以导出质点振速 u 满足下述 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\gamma + 1}{2c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (1)$$

式中 c_0 为小振幅绝热声速, ρ_0 为平衡气体密度, $\gamma = C_p/C_v$ 为定压与定容比热之比, $b = \zeta + (4/3)\eta + K(1/C_v - 1/C_p)$, 其中 ζ 与 η 分别为体积与切变粘滞系数, K 为导热系数.

在实际问题中,声压 p 比质点振速更容易测量,由关系式

$$p = \rho_0 c_0 u + \text{高阶小量} \quad (2)$$

(1)式可以改用声压 p 来表达.

脉冲声源在管道中产生有限振幅波,传播至一定位置后,一般将以 N 波为主. 为了分析方便起见,我们针对 N 波的特点引入下列特征量:(1) p_R ,在初始位置 x_0 处的峰值声压;(2) T_R ,在初始位置 x_0 处的脉冲持续时间;(3) x_R ,为传播特征距离. 分别选取 p_R, T_R, x_R 为 p, τ, x 的单位量而把它们化为无量纲量,容易证明, Burgers 方程式(1)可改写为

$$\frac{\partial p}{\partial x} - A p \frac{\partial p}{\partial \tau} = B \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \quad (3)$$

式中

$$\begin{cases} A = \frac{\gamma + 1}{2\rho_0 c_0^3} \frac{p_R x_R}{T_R} \\ B = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{x_R}{T_R^2} \end{cases} \quad (4)$$

引入自相似变量 $z = \tau/2\sqrt{Bx}$, 可得相应的自相似解 $p_n(x, z)$ 为

$$p_n = -\frac{1}{A} \sqrt{\frac{B}{x}} \frac{\alpha^{1/2} x^{-\frac{n}{2}} \exp(-z^2) H_n(z)}{1 + \alpha x^{\frac{1}{2}} \exp(-z^2) H_{n-1}(z)} \quad (5)$$

其中 α 为任意常数, n 为正整数, H_n 为 Hermite 多项式, n 值等于节点数. 当 $n = 1$ 时,即

得 N 型脉冲波, 其表达式可简化为

$$p_1(x, \tau) = -\left(\frac{\tau}{Ax}\right) / \left\{1 + \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \exp(\tau^2/4Bx)\right\} \quad (6a)$$

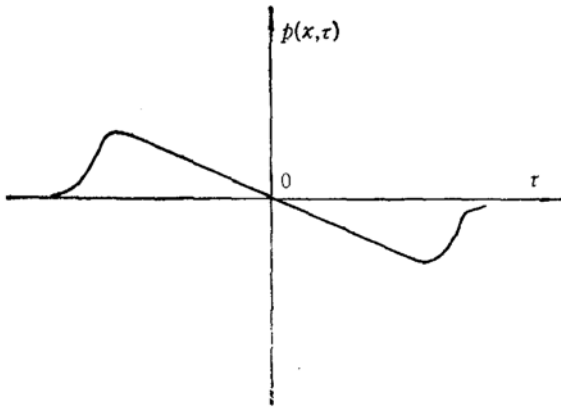


图 1 N 波

给定 $x \geq x_0$, p_1 随 τ 变化的典型曲线如图 1 所示, 可以看出, 这种 N 波为反对称的, 即当 τ 掉换成 $-\tau$ 时, p_1 调换成 $-p_1$.

N 波的强度可由下述定积分 I 反映.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^0 p_1(x, \tau) d\tau \\ &= 2 \frac{B}{A} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha}{x}}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

在通常情况, $A \gg B$, 即非线性作用远大于体耗的作用, 在我们所讨论的声波传播距离范围内, 可设 $Al/2B \gg 1$. 自式(7)求出 $\sqrt{x/\alpha}$, 代

入式 (6a), 并记 $y = \sqrt{2Alx}$, 近似可得

$$p_1 \doteq \begin{cases} -\frac{\tau}{Ax} & (|\tau| \leq y) \\ 0 & (|\tau| > y) \end{cases} \quad (6b)$$

对于实际的 N 波, 声压峰值一般高于谷值, 与反对称 N 波解有明显差别. 为此, 我们需寻求非对称的 N 波解. 设声压 $p(x, \tau)$ 可写成下面的形式

$$p(x, \tau) = p_1(x, \tau) + p_2(x, \tau) \quad (8)$$

式中 p_1 为反对称 N 波解, 由式(6)决定, p_2 为修正项 (并设修正项 p_2 之值为 p_1 的高阶小量.). 代入式(3)得

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} - Ap_2 \frac{\partial}{\partial \tau} (p_1 + p_2) - Ap_1 \frac{\partial p_2}{\partial \tau} = B \frac{\partial^2 p_2}{\partial \tau^2} \quad (9)$$

在体耗很小的情况下, 可设 p_2 为 τ 的缓变函数, 忽略 p_2 对于 τ 的偏导数, 可得近似解

$$p_2 = \frac{\tau_0}{A} \exp \left(A \int_{\tau}^{\infty} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} dx \right) \quad (10a)$$

式中 τ_0 为任意常数, 把 p_1 的近似式 (6b) 代入上式, 可得

$$p_2 \doteq \begin{cases} \tau_0/Ax & (|\tau| \leq y) \\ 0 & (|\tau| > y) \end{cases} \quad (10b)$$

由此可得非对称 N 波的近似解为 $(p_1 + p_2)$, 可以看出, 脉冲波的持续时间近似为 $T = 2\sqrt{2Alx}$, 正负声压峰值近似为

$$p_{\pm} = (\pm \sqrt{2Alx} + \tau_0)/Ax \quad (11)$$

三、广义 Burgers 方程的 N 波解

考虑管壁阻尼对声传播的影响时,连续性方程应改写成^[10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = \rho_0 \beta \int_0^\infty \frac{\partial u(x, t - \xi)}{\partial x} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \quad (12)$$

式中

$$\beta = \frac{L}{S} \left(\frac{\eta}{\pi \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{P_r}} \right) \quad (13)$$

其中 S 为管道截面积, L 为截面周长, P_r 为 Prandtl 数. 对于有限振幅声波, 式(12)右方积分项可作为小量处理. 采用推迟时间 τ , 把质点振速 u 掉换成声压 p , 忽略高阶小量, 经过简单运算, 可把广义 Burgers 方程写成下面的形式

$$\frac{\partial p}{\partial x} - A p \frac{\partial p}{\partial \tau} = B \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - C \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial p}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} \quad (14)$$

式中

$$C = \frac{\beta}{2c_0} \frac{x_R}{\sqrt{T_R}} \quad (15)$$

设

$$p = p_1 + p_2 + p_3 \quad (16)$$

式中 $(p_1 + p_2)$ 即为前面所述 Burgers 方程的 N 波解, p_3 为考虑壁面阻尼影响后的修正项. 将上式及式(6a), 式(10)代入式(14), 忽略高阶小量, 并设 I 近似为常数, 把 x 变换成 y , 经化简后可得

$$\frac{y}{2} \frac{\partial p_3}{\partial y} + (\tau - \tau_0) \frac{\partial p_3}{\partial \tau} + p_3 = -\frac{C}{A} f(\tau, y) \quad (17)$$

式中

$$f(\tau, y) = \begin{cases} 0 & (\tau < -y) \\ \sqrt{\tau + y} & (|\tau| \leq y) \\ \sqrt{\tau + y} - \sqrt{\tau - y} & (\tau > y) \end{cases} \quad (18)$$

暂取 $\tau_0 = 0$, 记 $\theta = |\tau|/y$, 并设

$$p_3 = -\frac{C}{A} y^{\frac{1}{2}} \phi(y, \theta) \quad (19)$$

自式(17)可得

$$y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{5}{2} \phi = f_1(\theta) \quad (20a)$$

式中

$$f_1(\theta) = \begin{cases} 0 & (\theta < -1) \\ 2\sqrt{1-\theta} & (-1 \leq \theta \leq 0) \\ 2\sqrt{1+\theta} & (0 \leq \theta \leq 1) \\ 2\sqrt{1+\theta} - 2\sqrt{\theta-1} & (\theta > 1) \end{cases} \quad (21)$$

设式(20a)的通解取下面的形式

$$\psi = \psi_0(y, \theta) + \psi_1(\theta) \quad (22a)$$

式中 ψ_1 为一特解, 而 ψ_0 满足齐次方程

$$y \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} + \frac{5}{2} \psi_0 = 0 \quad (20b)$$

我们取特解 ψ_1 为下面的形式

$$\psi_1(\theta) = \theta^{-\frac{5}{2}} F(\theta) \quad (22b)$$

式中

$$F(\theta) = \int^{\theta} \theta^{\frac{3}{2}} f_1(\theta) d\theta \quad (23)$$

齐次解 ψ_0 可取为

$$\psi_0(y, \theta) = \theta^{-\frac{5}{2}} \Phi\left(\frac{\theta}{y}\right) \quad (22c)$$

式中 Φ 为任意解析函数, 可由边界条件决定. 设在初始位置 $x = x_0$ 处, 即在 $y = y_0 = \sqrt{2Alx_0}$ 处, 取 $p_3 = 0$, 由此可知函数 Φ 必须取为 $-F(y_0\theta/y)$. 将上面所得关系式代入式(19), 可得

$$p_3 = -\frac{C}{A} y^{\frac{1}{2}} \theta^{-\frac{5}{2}} \left\{ F(\theta) - F\left(\frac{y_0\theta}{y}\right) \right\} \quad (24a)$$

函数 $F(\theta)$ 由下式决定

$$F(\theta) = \begin{cases} 0 & (\theta < -1) \\ F_1(\theta) & (-1 \leq \theta \leq 0) \\ F_2(\theta) & (0 \leq \theta \leq 1) \\ F_2(\theta) - F_3(\theta) & (\theta > 1) \end{cases} \quad (25)$$

式中

$$F_1(\theta) = \frac{1}{6} \left(4\theta^2 - \theta - \frac{3}{2} \right) \sqrt{\theta - \theta^2} + \frac{1}{8} \sin^{-1}(2\theta - 1) \quad (26a)$$

$$F_2(\theta) = \frac{1}{6} \left(4\theta^2 + \theta - \frac{3}{2} \right) \sqrt{\theta + \theta^2} + \frac{1}{8} \ln \left(\theta + \frac{1}{2} + \sqrt{\theta + \theta^2} \right) \quad (26b)$$

$$F_3(\theta) = \frac{1}{6} \left(4\theta^2 - \theta - \frac{3}{2} \right) \sqrt{\theta^2 - \theta} - \frac{1}{8} \ln \left(\theta - \frac{1}{2} + \sqrt{\theta^2 - \theta} \right) \quad (26c)$$

在我们所考虑的声传播范围内, x_0/x 接近于 1, 因此 y 的变化范围不大, 可设 $(1 - y_0/y)$ 为一小量. 把 $F(y_0\theta/y)$ 展开成 $(1 - y_0/y)\theta$ 的幂级数, 忽略高阶小量, 式(24a) 近似可得

$$p_3 = -\frac{C}{A} y^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{y_0}{y}\right) f_1(\theta) \quad (24b)$$

现在我们讨论 τ_0 的影响. 设式(19)中 p_3 的一阶修正为 p_4 , 可得

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} \frac{\partial p_4}{\partial y} + \tau \frac{\partial p_4}{\partial \tau} + p_4 &= \tau_0 \frac{\partial p_3}{\partial \tau} \\ &= -\frac{C\tau_0}{A} y^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \theta^{-\frac{5}{2}} F(\theta) - \theta^{-\frac{5}{2}} F\left(\frac{y_0\theta}{y}\right) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

把上式右方化成 y 与 θ 的表达式, 由与前面的分析相类似的运算, 可求出满足边界条件的通解, 简化后可导出 p_4 的近似解为

$$p_4 = -\frac{C\tau_0}{A} y^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{y_0}{y}\right) \left\{ G(\theta) - \left(1 + \frac{y_0}{y}\right) \left(\frac{y_0}{y}\right)^{\frac{5}{2}} G\left(\frac{y_0\theta}{y}\right) \right\} \quad (28)$$

式中

$$G(\theta) = \frac{\tau}{|\tau|} \frac{d}{d\theta} \left\{ \theta^{-\frac{5}{2}} F(\theta) \right\} \quad (29)$$

由上可知广义 Bergers 方程的 N 波解可表达为

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \quad (30)$$

四、实验结果

测量有限振幅脉冲波在刚性管道中传播的实验装置如图 2 所示. 点声源由同济大学研制的 D-86 型电火花发声产生, 在管道底部装置一旋转抛物面, 火花发声电极处在抛物面焦点附近, 使管道中传播的脉冲波接近平面波. 在管道侧壁开若干测试孔, 用 BK 4370 电容传声器检测声压信号, 经 BK 2610 放大器放大后馈送至 SBC-II 型瞬态波形存储器, 并用 BK 2306 记录仪把波形描绘在记录纸上.

在实验中, 我们选用较细的管道, 其半径 a 为 $1.92 \times 10^{-2} \text{m}$, 这是为了使管道中产生的脉冲波有较高的声压级, 同时也可使壁面阻尼对声传播的影响相对增强. 离声源最近测点的距离控制在 $10-20a$ 的范围内, 使脉冲波波形为较稳定的 N 波. 考虑到电火花发声产生的脉冲声具有很好的重复性, 为了减少测试孔对声波传播的影响, 我们在测量不同传播距离的 N 波形时, 采用了相应的不同长度管道, 并用同一只电容传声器进行测量.

取离声源最近的测点位置 x_0 作为初始位置, 记 $D = x - x_0$, 为测点至初始位置间的距离, 取 $D = 0, 40, 70, 100, 130 \text{cm}$, 实验所得 N 波形如图 3 所示. 图中横坐标反映推迟时间 τ , 全部过程为 1ms . 纵坐标反映声压, 每小格代表 500Pa . 在初始位置处 ($D = 0$), 声压峰值 p_R 达 $8.92 \times 10^3 \text{Pa}$ (相当于 173dB), 把 N 波波形作简化处理后, 近似可得持续时间 T_R 为 0.482

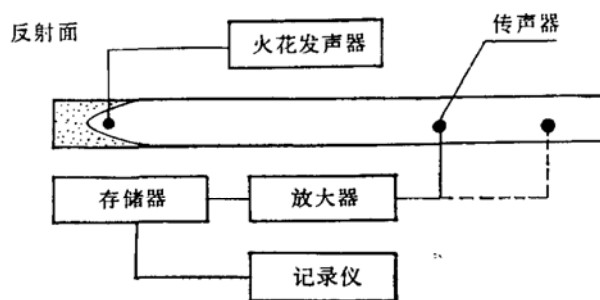


图 2 实验装置方块图

ms. 取传播特征距离 x_R 为 0.1m, 各有关物理常数采用 1 大气压下 15°C 空气的数据, 可求出 $A = 4.44 \times 10^{-2}$, $B = 1.44 \times 10^{-7}$, $C = 2.14 \times 10^{-3}$, $\tau_0 = 0.124$ ms. 这样, 比值 C/A 为小值, 满足文中论述所需的要求。

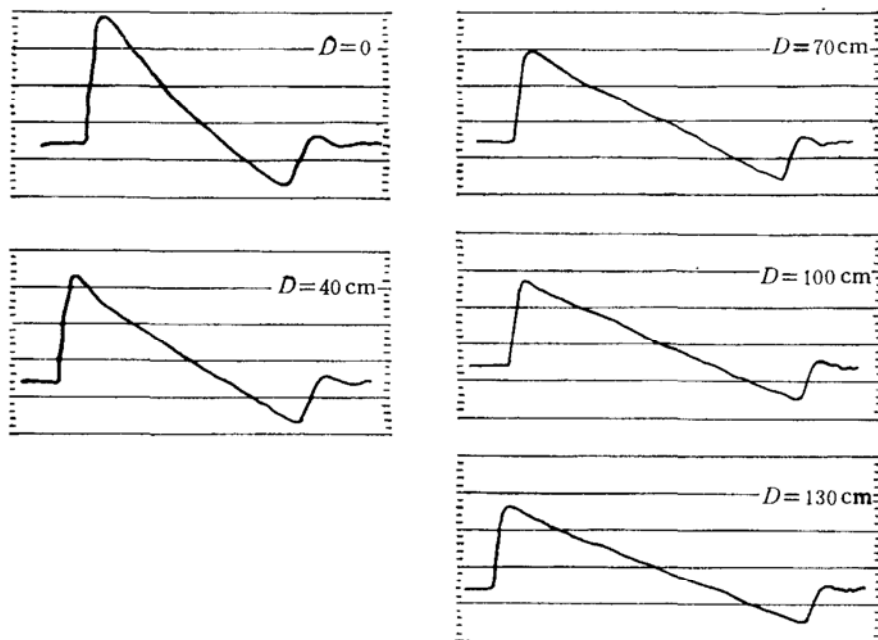


图 3 不同传播距离处的 N 波形

N 波持续时间 T 随传播距离 D 变化的规律如图 4 所示, 图中圆点是实验值, 曲线是本文理论结果, 其中初始位置 x_0 系根据实验结果选配, 取为 $x_0 = 115$ cm. N 波声压峰值 p_+ 及谷值 p_- 随传播距离 D 变化的规律如图 5 所示, 图中圆点是实验值, 虚线是不考虑管壁阻尼影响时

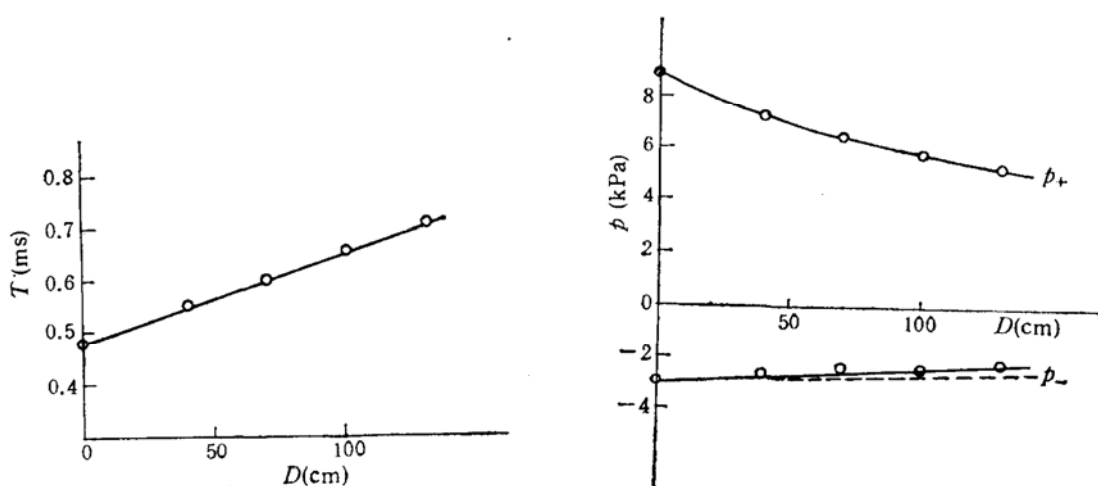


图 4 持续时间 T 与声波传播距离 D 的关系

图 5 峰值声压 $p_{\pm}$ 与声波传播距离 D 的关系

的理论结果, 实线是考虑这种影响时本文的理论结果. 可以看出, 实验值与根据本文理论所作的预测值良好相符。

五、结论与讨论

根据本文理论分析与实验结果,可得下列结论:

1. 管道中传播的有限振幅脉冲波一般为 N 波。持续时间 T 近似按 $\sqrt{x}$ 的规律随传播距离增加。初始位置 x_0 应根据实测结果选配,与声源至初始位置的距离有所不同。
2. 实际的 N 波,正负声压是不对称的,但随着传播距离的增加,这种非对称性将逐渐减弱。
3. N 波声压峰值近似按 $\sqrt{x}$ 的反比规律随传播距离减小。声压谷值也有类似的规律,考虑管壁阻尼影响时,谷值衰减将有所增加。

可以预期,本文所用理论分析方法与实验测试技术,对于研究诸如有限振幅声波在非刚性管道中的传播问题或在管道截面突变处的反射问题等方面,有可能获得进一步的应用。

参 考 文 献

- [1] Fubini, G. E., "Anomalie nella propagation di onde acustiche die grande ampiezza", *Alta Freq.*, 4(1935), 530.
- [2] Fay, R. D., "Plane sound waves of finite amplitude", *J. Acoust. Soc. Am.*, 39(1965), 1.
- [3] Blackstock, D. T., "Connection between the Fay and Fubini solution for plane sound waves of finite amplitude", *J. Acoust. Soc. Am.*, 39(1965), 1019.
- [4] Fenlon, F. H., "An extension of the Bessel-Fubini series for a multiple-frequency CW acoustic source of finite amplitude", *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(1972), 284.
- [5] 杜功焕、龚秀芬、朱哲民, "有限振幅无规声波(噪声)非线性作用理论", *声学学报*, 1982年,第一期, 1.
- [6] 朱哲民、杜功焕、龚秀芬, "有限振幅声波的非线性传播畸变消除的研究", *声学学报*, 1981年,第三期, 189.
- [7] Rudenko, O. V. and Soluyan, S. I., "Theoretical foundations of nonlinear acoustics", (Consultants Bureau, New York, 1977).
- [8] Benton, E. R. and Platzman, G. W., "A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation", *Quarterly Appl. Math.*, July, (1972), 195.
- [9] Sachdev, P. L., "Some exact solutions of Burgers-type equations", *Quarterly Appl. Math.*, (1976), April, 118.
- [10] Chester, W., "Resonant oscillations in closed tubes", *J. Fluid Mech.*, 44(1964), 18.
- [11] Nakamura, A., Takeuchi, R. and Oie, S., "Nonlinear attenuation of an N wave propagation in tube, including dissipation due to wall effect", *J. Acoust. Soc. Am.*, 63(1978), 346.
- [12] Keller, J. J., "Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction", *J. Appl. Math. and Phys.*, 32(1981), 170.
- [13] Blackstock, D. T., "Generalized Burgers equation for plane waves", *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(1985), 2050.