

大振幅驻波理论

马 大 猷

(中国科学院声学研究所)

1989年12月22日收到

摘要 本文从流体动力学基本方程出发,提出大振幅驻波的新理论,求得稳定的波形公式,试图解决长期可疑局面。

Theory of finite-amplitude standing wave

MAA Dahyou

(Institute of Acoustics, Academia sinica)

Received December 22, 1989

Abstract A new approach to the theory of finite-amplitude standing wave is proposed, and formulas of steady wave forms are derived from the fundamental equations of hydrodynamics, as an endeavor to settle the long-time disputable situation.

引 言

火箭或喷气发动机所发空气动力噪声、飞机部件或人造卫星的噪声试验,大功率声或超声设备和处理、固体在强烈激光照射下引起的强超声波等等都涉及大振幅声波,多数情况还是驻波。大振幅声波理论早在十八世纪中叶就受到科学家的注意,到十九世纪中叶已形成比较完整的无耗损媒质中的传播理论^[1,2]。二十世纪中又受到注意,耗损、频散等现象也受到处理,大振幅声波的各种性质和效应也都有研究。基本情况已在一些书中总结^[3,5]。传播理论,从瑞利^[4]到最近 Grington 在讲习会^[9]上不断有人评论。但是值得注意的是,评论文章中很少提到驻波,也许有一篇略有涉及^[6]。声学界并非对大振幅驻波不加重视,只是有关闭管中声波共振的理论和实验论文就已发表了多篇^[3,7-12]。所提出的理论不少,但所得结果常互相矛盾,似乎都有可疑问题。在本文中,作者试图根据流体动力学基本原理提出一个一维大振幅驻波的严格理论。只讨论非耗损、无频散媒质中的平面波,以使问题突出。在讨论前,先简单复述非线性行波理论,以作为所提理论的基础。

一、一 维 行 波

由欧勒方程开始,即

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

理想气体中的绝热物态方程为

$$p/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma \quad (3)$$

式中 u, ρ, p 分别为质点速度、密度和声压, b 为粘滞性的影响(以下略去), 而 γ 则为比热比 ρ_0, P_0 为静态值. γ 为一常数, 在行波中, u, ρ 和 p 通过物态方程互相联系, 知其一即可求出其它二量. 因此(1)(2)两式可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{du} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u + \rho \frac{du}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

式中括弧内的量分别等于速度波和密度波的波形上一点的“局部”(或“相”)传播速度. 质点速度和密度是互相依赖的, 因此二者应相同, 即

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{du} = \rho \frac{du}{d\rho}$$

或

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho} \quad (6)$$

式中 $c^2 = dp/d\rho$, c 为声速. $\pm$ 符号分别相应于在正或负 x 方向传播的声波. 代入(4)式, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\gamma+1}{2} u \pm c_0 \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

由(6)式的积分为

$$u = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{cd\rho}{\rho} = \pm \frac{2(c - c_0)}{\gamma - 1}$$

或

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma - 1}{2} u \quad (9)$$

分别用于正方向和负方向的声波, c_0 为小振幅声波的速度. 例如, 向外传播的简单波即为

$$u = f \left[x - \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u \right) t \right]$$

f 为任意函数, 简谐波则为

$$u = u_0 \sin \left(\omega t - kx + \frac{\gamma+1}{2} k u t \right) \quad (10)$$

式中 $k = \omega/c_0$ 。向回传播的声波有相应的形式。

在一振动表面所发出的声波,在 $x = 0$ 处, $u = u_0 \sin \omega t$,在任何距离 x 处则为

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \omega \left[t - x / \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} u \right) \right] \\ &= u_0 \sin \left(\omega t - kx + \frac{\gamma+1}{2} \frac{k u x}{c_0} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

后者直到声压数达 174dB 时还很准确^[13],其余各式则是严格的。(10)式和(11)式可用泰勒级数展开为线性波形 $\sin(\omega t - kx)$ 的幂级数。

解非线性声波的另一方法为微扰技术,此技术于 1948 年为 Echart^[15] 引入声学,从那以后就成为非线性声学中最有力而常用的技术。微扰技术可直接用于(1)和(2)式,也常在转换坐标至拉格朗日系统后去解波动方程。在(1)(2)式中欧勒坐标 x 代表振动质点在振动中的实际位置,拉格朗日坐标 a 则为该质点在振动前的平衡位置,因此 $x = a + \xi$, ξ 为质点位移。在平衡位置的一小段物质的质量与 $\rho_0 da$ 成比例,振动到 x 时则为 ρdx ,二者应相等,即 $\rho_0 da = \rho dx$ 或 $\rho/\rho_0 = 1/(1 + \partial \xi/\partial a)$,这就是连续方程,代入拉格朗日运动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial a} = 0 \quad (12)$$

中,可得严格波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^{-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (13)$$

如果只取二阶近似,上式即成为无耗散理想气体中严格波动方程的近似式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = -c_0^2 (\gamma+1) \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (14)$$

略去(14)式的右方项可求得方程的一阶解,将一阶解代入右方后就可从它求得二阶解。于是可求得(14)式的通解

$$\xi = f \left(t - \frac{a}{c_0} \right) + \frac{\gamma+1}{4c_0^2} a \left[f' \left(t - \frac{a}{c_0} \right) \right]^2 \quad (15)$$

或,在简谐激发时,

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - ka) - \frac{\gamma+1}{8} k^2 A_0^2 a \cos 2(\omega t - ka) \quad (16)$$

对时间微分可得质点速度

$$u = u_0 \sin(\omega t - ka) + \frac{\gamma+1}{4c_0} u_0^2 ka \sin 2(\omega t - ka) \quad (17)$$

式中 $u_0 = -\omega A_0$ 。这和用泰勒级数展开(11)式的结果相同。同理此式中的 ka 也可用 ωt 代替。严格波动方程(13)可继续用这种微扰技术求得高阶项。

另一个方法是把变量 x 和 t 转换为 x 和 $\tau = t - x/c_0$ (推迟时间), (1)和(2)式就可变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\gamma+1}{2} \frac{u}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{b}{2\rho_0} c_0^3 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (18)$$

和 Burger 方程^[6]相同,这可求得严格解,耗散也不增加困难。

二、一维驻波

仍由(1)(2)式开始,但在驻波中 $du/d\rho = \pm c/\rho$ 的关系即不能用,声压和密度也不能由 u 决定,因为这时正负波同时存在。命 $d\lambda = \int c d\rho/\rho = \int dp/\rho c$, (1)、(2)式,无耗损时,即成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} + u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

取因变数 r 和 s ,称为黎曼不变量,为

$$2r = \lambda + u, \quad 2s = \lambda - u \quad (20)$$

取(19)式中二式的和和差,得

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

可见黎曼简单波 r 及 s 分别在正、负方向传播,相速 $c \pm u = c_0 \pm (\gamma+1)u/2$ 。

在此处须强调,(7)(8)式和(21)(22)式一样是完全普遍适用的,但解(10)(11)的形式却只限于波形上 u 值为固定值的点。这就不包括大振幅驻波了。首先,线性系统中的叠加原理不适用于非线性声学,驻波中 r 和 s 波彼此互相影响,二式中的质点速度 u 不是 r 波或 s 波的质点速度而是 r 和 s 形成的复合波的质点速度。此外,既是复合波(驻波)的质点速度,它就不可能是固定值(驻波波形上也没有一点具有固定速度值),因此它所产生的相位移动不是如上节中讨论的简单行波中的时间乘积 ut ,而应为质点速度的时间积分, $\int u dt = \xi$, 即复合波的质点位移。因而, r 波和 s 波的公式应为

$$r = \frac{1}{2} u_0 \cos \left(\omega t - kx + \frac{\gamma+1}{2} k\xi \right) \quad (23)$$

$$s = \frac{1}{2} u_0 \cos \left(\omega t + kx - \frac{\gamma+1}{2} k\xi \right) \quad (24)$$

二者导致驻波中质点速度的严格公式

$$\begin{aligned} u &= r - s \\ &= u_0 \sin \omega t \sin k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right) \end{aligned} \quad (25)$$

声压 p 应满足(1)式,可从 u 求出

$$p = p_0 \cos \omega t \cos k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right) \quad (26)$$

式中 $p_0 = u_0 \rho_0 c$, 此式也是严格的。二式都与质点位移 ξ 有关, 后者由 $u = \partial \xi / \partial t$ 可求得为

$$\begin{aligned} \xi = & A \cos \omega t \sin k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right) + \frac{\gamma+1}{8} k A^2 \cos^2 \omega t \sin 2k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right) \\ & + \frac{(\gamma+1)^2}{24} k^2 A^3 \cos^3 \omega t \cos 2k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right) \sin k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $A_0 = -u_0/\omega$ 为质点位移的幅值。这个式子是隐含式, 可用幂级数展开为显式

$$\begin{aligned} \xi = & A \cos \omega t \sin kx - \frac{\gamma+1}{4} k A^2 \cos^2 \omega t \cos kx \sin kx \\ & + \frac{(\gamma+1)^2}{24} k^2 A^3 \cos^3 \omega t \cos 2kx \sin kx - \dots \end{aligned}$$

ξ 可展开至任何高阶项, 但可见各项以数量级为 $|kA| = u_0/c = p_0/\gamma P_0$ (P_0 为大气压) 的比值递减, 在相当强的声波中这个比值也比 1 小得多。(27) 式中第三项以后各项无甚意义。只取到二阶近似, 上面的级数就可写做

$$\begin{aligned} \xi = & A_0 \cos \omega t \sin kx - \frac{\gamma+1}{8} k A_0^2 \cos^2 \omega t \sin 2kx \\ = & A_0 \cos \omega t \sin k \left(x - \frac{\gamma+1}{4} \xi^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (27a)$$

式中 $\xi^{(1)} = A_0 \cos \omega t \sin kx$ 为一阶位移。将此代入(25)和(26)式, 所得 u 和 p 准确到三阶近似。只取二阶近似, 质点速度和声压即为

$$u = u_0 \sin \omega t \sin kx + \frac{\gamma+1}{8} \frac{u_0^2}{c_0} \sin 2\omega t \sin 2kx \quad (25a)$$

$$p = p_0 \cos \omega t \cos kx + \frac{\gamma+1}{8} \frac{p_0^2}{\gamma P_0} \cos 2\omega t \cos 2kx \quad (26a)$$

与行波情况相似, 声场量也可以表达为傅里叶级数。由(27)式可见, ξ 中各项都有因式 $\sin k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right)$, 因此可写做

$$\xi = B \sin \left(kx - \frac{\gamma+1}{2} k \xi \right) \quad (28)$$

式中

$$B = A_0 \cos \omega t - \frac{\gamma+1}{4} k A_0^2 \cos^2 \omega t \cos k \left(x - \frac{\gamma+1}{2} \xi \right) + \dots \quad (29)$$

据此, (25) 式的振动速度可写做参量式

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \sin \omega t \sin \phi \\ kx &= \phi + K \sin \phi, \quad K = \frac{\gamma+1}{2} k B \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

按 Fubini 的方法^[14]函数 $\sin \phi$ 可展开为 kx 的傅里叶级数, 结果是

$$u = u_0 \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{nK} J_n(nK_u) \sin nkx \quad (31)$$

同样

$$p = p_0 \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J'_n(nK_p) \cos nkx \quad (32)$$

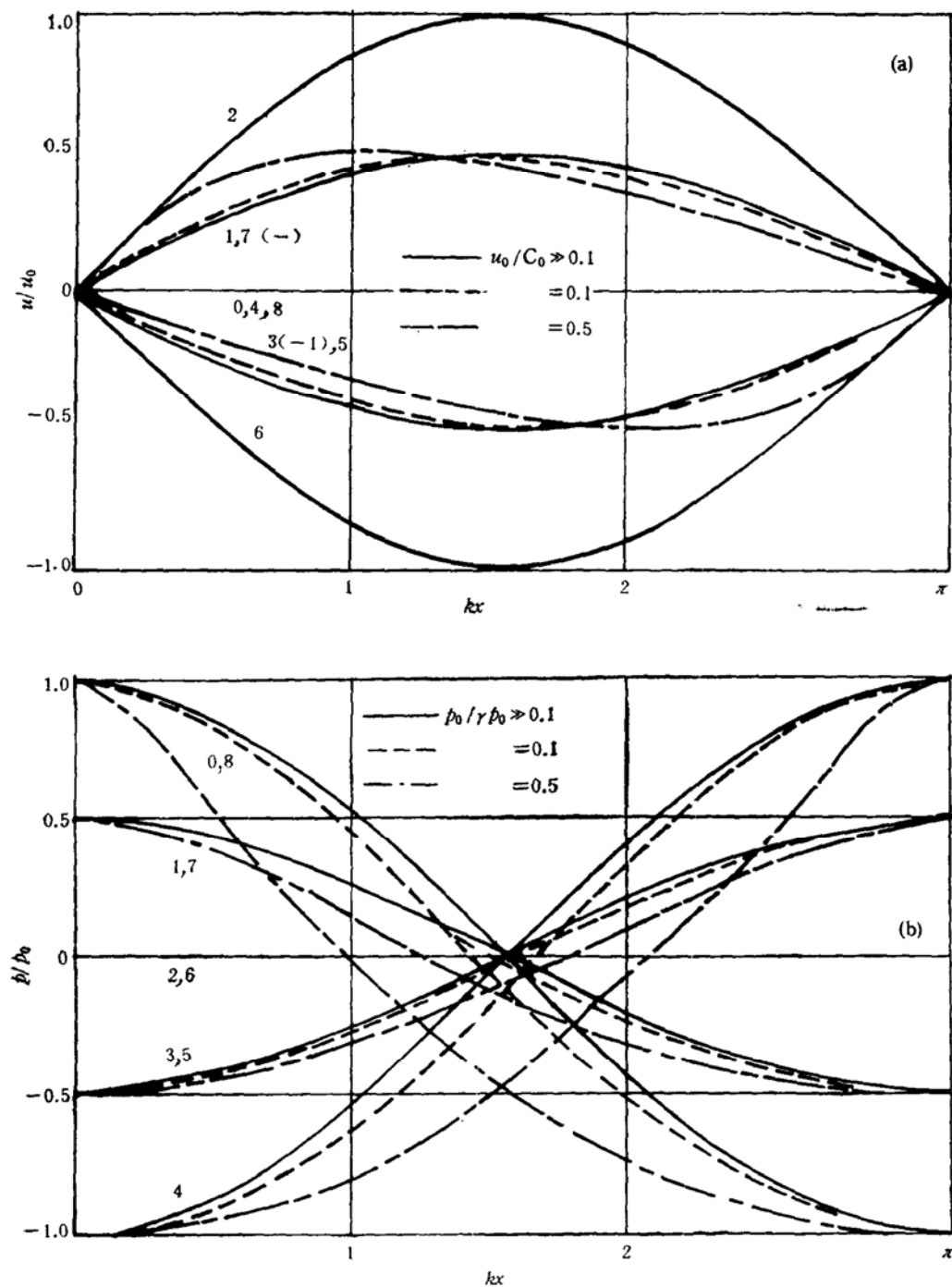


图 1 一维大振幅驻波的质点速度和声压。

式中, J_n 为第一类第 n 阶贝塞耳函数, 加一撇代表对其宗量的微商. K_u 是 K 中 kA_0 代以 u_0/c_0 , K_p 则是 K 中 kA_0 代以 $p_0/\gamma P_0$.

和一般驻波相似, 如驻波是在两面坚壁中存在, 相距 L , 边界条件即为 $x=0$ 和 L 时 $u=0$, 简正振动方式要求 $kL=m\pi$, m 为任一正整数, 简正频率则为 $f_m=mc_0/2L$ (基频). 峰级不同的驻波变化如图 1.

三、闭管中共振

在闭管中共振的问题在应用中常遇到, 在文献也颇为注意^[7-12]. 用本文理论加以分析很有必要. 设管长为 L , 一端, $x=0$ 处关闭, 另一端 $x=L$ 处有活塞振动, $u=U\sin\omega t$. 上节结果可直接应用, 使 $x=L$ 处振动满足要求即可. 由(25)和(26)式可求得声场变量

$$u = \frac{U}{\sin kL} \sin \omega t \sin k\left(x - \frac{\gamma+1}{2}\xi\right) \quad (33)$$

$$p = \frac{P}{\sin kL} \cos \omega t \cos k\left(x - \frac{\gamma+1}{2}\xi\right) \quad (34)$$

式中 $P=U\rho_0 c_0$ 振动位移, 根据 $u=\partial\xi/\partial t$, 可求得, 为

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{A}{\sin kL} \cos \omega t \sin k\left(x - \frac{\gamma+1}{2}\xi\right) \\ & + \frac{\gamma+1}{8} \frac{kA^2}{\sin^2 kL} \cos^2 \omega t \sin 2k\left(x - \frac{\gamma+1}{2}\xi\right) \\ & + \frac{(\gamma+1)^2}{24} \frac{k^2 A^3}{\sin^3 kL} \cos^3 \omega t \cos 2k\left(x - \frac{\gamma+1}{2}\xi\right) \\ & \times \sin k\left(x - \frac{\gamma+1}{2}\xi\right) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

式中 $A=-U/\omega$. 到二级近似, 此式可写做

$$\xi = \frac{A}{\sin kL} \cos \omega t \sin k\left(x - \frac{\gamma+1}{4}\xi^{(1)}\right) \quad (35a)$$

式中 $\xi^{(1)}=(A/\sin kL)\cos\omega t\sin kx$ 为 ξ 的一阶近似. 将隐含式(35)展开为幂级数, 可得

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{A}{\sin kL} \cos \omega t \sin kx - \frac{\gamma+1}{4} \frac{kA^2}{\sin^2 kL} \cos^2 \omega t \cos kx \sin kx \\ & + \frac{(\gamma+1)^2}{24} \frac{k^2 A^3}{\sin^3 kL} \cos^3 \omega t \cos 2kx \sin kx + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

将此值代入(33)(34)式可得振动速度和声压的准确值. 后者也可展开为幂级数, 得

$$\begin{aligned} u = & \frac{U}{\sin kL} \sin \omega t \sin kx + \frac{\gamma+1}{8} \frac{U^2}{c_0 \sin^2 kL} \sin 2\omega t \sin 2kx \\ & + \frac{(\gamma+1)^2}{8} \frac{U^3}{c_0^2 \sin^3 kL} \cos^2 \omega t \sin \omega t \cos 2kx \sin kx + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

及

$$p = \frac{P}{\sin kL} \cos \omega t \cos kx + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{P^2}{\gamma P_0 \sin^2 kL} \cos^2 \omega t \cos^2 kx + \frac{(\gamma + 1)^2}{4} \frac{P^3}{(\gamma P_0)^2 \sin^3 kL} \cos^3 \omega t \sin^2 kx \cos kx + \dots \quad (38)$$

展开为傅里叶级数也很简单。由以上各式可见振动幅值以及高阶项都在共振情况下变成很大, 因此时 $\sin kL$ 很小。但是幅值的增大要受管闭端的吸收所限, 即使其它耗损不计。可证明在接近共振时, 分母就应取准确值 $[\sin^2(kL + b) + g^2]^{1/2}$, 其中 $g - jb = \rho_0 c / z$ 为管端材料的相对声导纳。在 $\sin kL$ 很小时, 与准确值相差就较大, 在共振时 $kL + b = n\pi$, 准确值极限为 g , 对一般硬材料, g 和 b 比一小得多。因而 u 和 p 的幅值可几十倍、上百倍地增加, 因而形成冲击波。

由 (25a—27a) 式或 (36—38) 式可见由于畸变所产生的谐波项相对但与 u_0/c 或 $p_0/\gamma P_0$ 的幂数成比例。即使在峰级为 177dB 时 $u_0/c = p/\gamma P_0$ 也才等于 0.1, 驻波中, 除非声压级非常高, 畸变是有限的。过去很多作者的实验结果似乎支持这个结论, 在出现冲击波以前很少观察到重要畸变。

四、与前人所得结果的比较

以前的作者^[3,7-12]多数采用微扰技术处理驻波问题。处理方法基本与处理行波时所用相同, 只是从一阶驻波开始而已, 所得公式与 (17) 式相似。典型处理情况大概如下述。例如取拉格朗日波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = -c_0^2 (\gamma + 1) \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} \quad (14)$$

求一阶近似可略去右方项而去解线性微分方程, 得

$$\xi^{(1)} = A \cos \omega t \sin ka \quad (39)$$

代入 (14) 式右方以从微分方程

$$\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial a^2} = \frac{\gamma + 1}{4} k A^2 \omega^2 (1 + \cos 2\omega t) \sin 2ka \quad (40)$$

解出二阶项, 得

$$\xi^{(2)} = \frac{\gamma + 1}{16} k A^2 (1 + \omega t \sin 2\omega t) \sin 2ka \quad (41)$$

加上一阶项, 对时间微分即得质点速度

$$u = u_0 \sin \omega t \sin ka + \frac{\gamma + 1}{8} \frac{u_0^2}{c_0} \omega t \cos 2\omega t \sin 2ka \quad (42)$$

高阶项可继续从低阶项求得。用 (10) 式的形式解黎曼不变量 ((21)(22) 式) 也得相似结果。(42) 式反映这类解的特点, 即畸变项无休止地随时间增大。这种增加从数学上可以说, 也可以解释说增加到一定程度后某种原因就会使它停止, 但究竟和共振不同, 从物理学上说是无根据的。

在讨论平均声场时 Westervelt 则提出另一取得稳定结果的理论^[17]。他在考虑 (40) 式时推论, 可假设一阶项和二阶项间的相互作用可忽略, 因而为一阶解二倍以上的简正频率不被激

发,二阶量可在求解(40)式时只保留与时间无关的项而求得。这样(40)式就成为

$$\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial a^2} = -\frac{\gamma+1}{4} A^2 k^3 \sin 2ka \quad (40a)$$

其解则为

$$\xi^{(2)} = \frac{\gamma+1}{16} k A^2 \sin 2ka \quad (41a)$$

这个解稳定,但所作假设较难设想。

两种结果都与本文所得不同,但是如果把 u 不是常值,不传播的观点适当加以运用,二者都可变为与本文一致。在表示质点位移的(41)式中,二阶项中包含因式

$$\omega t \sin 2\omega t \sin 2ka = 4 \cos \omega t \cos ka (\omega t \sin \omega t \sin ka)$$

括弧内的量比例于 ut 。按照上节的推理, ut 应改作时间积分 $4 \cos \omega t \cos ka \int \omega \sin \omega t \sin ka dt$ 其值为 $-\cos \omega t \sin ka$ (41)式即成为

$$\xi^{(2)} = \frac{\gamma+1}{16} (1 - 2 \cos^2 \omega t) \sin 2ka \quad (41b)$$

与一阶项相加后对时间微分,即得

$$u = u_0 \sin \omega t \sin ka + \frac{\gamma+1}{8} \frac{u_0^2}{c_0} \sin 2\omega t \sin 2ka \quad (43)$$

与(25a)式一致。

Westervelt 的推理只要改为(40)式中时间微商项可忽略,原因是(40)式的右方表示波形的畸变,来源于质点振动而波形总体并不移动,同时它是只由空间微商得来的。(40)式不成为(40a)而成为

$$\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial a^2} = -\frac{\gamma+1}{4} A^2 k^3 (1 + \cos 2\omega t) \sin 2ka \quad (40b)$$

解之

$$\xi^{(2)} = \frac{\gamma+1}{16} k A^2 (1 + \cos 2\omega t) \sin 2ka \quad (41b)$$

其时间微商与(43)式第二项只差一符号。如果不是忽略(40)式中的时间微商项,而忽略其空间微商项和常数项,所得就是(43)式。

结 论

本文中重新考虑一维大振幅驻波问题,提出新理论以避免过去一些理论所遇问题,并求得大振幅驻波的稳定解。根据本文理论,驻波波形上的畸变与行波上情况不同,除非强度极大,畸变总是有限,过去许多作者的实验结果似乎与此相符,在发生冲击波以前,严重畸变很少见。前人所得结果经适当修正都可以与本文一致,其中物理意义当待推敲。

参 考 文 献

- [1] Earnshaw, S. "On the Mathematical Theory of Sound", *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, **150**, (1866), 133.
- [2] Riemann, B. "Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite" *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische Physikalische Klasse*, **8**(1858—59) 43.
- [3] Rozenberg, L. ed., *High-Intensity Ultrasonic Field* (Plenum, 1977) Rudenko, O. V. and Soluyan, S. I. *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (Plenum, 1977)
- [4] Rayleigh, Lord, "Aerial Plane Waves of Finite Amplitude," *Proc. Roy. Soc.*, **84**(1910), 247.
- [5] Sette, D. ed., "*Frontier in Physical Acoustics*" (North Holland, 1986).
- [6] Blackstock, D. T. "Nonlinear Acoustics (Theoretical)", in *AIP Handbook*, Section 3, by R. K. Cook, ed. (1972), 3—183 to 205.
- [7] Chester W. W. "Resonant Oscillations in Closed Tubes", *J. Fluid Mech.*, **18**(1964), 44—64.
- [8] 冯绍松, "大振幅驻波," *声学学报*, **2**(1965), 149—151.
- [9] Coppens, A. B. and Sanders, J. Y., "Finite Amplitude Standing Waves in Rigid Walled Tubes", *J. Acoust. Soc. Am.*, **43**(1968), 516—529.
- [10] Zaripov, R. G. and Ilhamov, M. A., "Nonlinear Gas Oscillations in a Pipe", *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**(1976), 245—257.
- [11] Kaner, V. V. Rudenko, O. V. Khokhlov, R. V., "Theory of Nonlinear Oscillation in Acoustic Resonators", *Akust. Zhur.*, **23**(1977), 756—765.
- [12] Ochmann, M., "Nonlinear Resonant Oscillation in Closed Tubes —An Application of Averaging Method", *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**(1986), 61—66.
- [13] Blackstock, David T., "Propagation of Plane Sound Waves of Finite Amplitude in Nondissipative Fluids", *J. Acoust. Soc. Am.*, **34**(1962), 9—30.
"On Plane, Spherical and Cylindrical Sound Waves of Finite Amplitude in Lossless Fluids", *J. Acoust. Soc. Am.*, **36** (1964), 217—219.
- [14] Fubini-Ghiron, E., "Anomalie Nella Propagazione di onde Acustiche di Grand Ampiezza", *Alta Frequenza*, **4** (1935), 530.
- [15] Echert, C., "Vortices and Streams Caused by Sound Waves", *Phys. Rev.*, **73**(1948), 68.
- [16] Burgers, J. M., "A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence", *Advances in Applied Mechanics*, **1** (Academic Press, 1948) 171—199.
- [17] Westervelt, Peter, "The Mean Pressure and Velocity in a Plane Acoustic Wave in Gas", *J. Acoust. Soc. Am.*, **22** (1950), 319—327.