

哮喘音模型研究

徐泾平^① 陈启敏 闵一建 臧晓非

(陕西师范大学应用声学研究所 西安, 710062)

鲁百年

(陕西师范大学数学系 西安, 710062)

1992年3月19日收到

摘要 本文应用有限差分方法研究了哮喘音的线性与非线性模型, 对哮喘音进行了波形分析。实验结果表明: 线性模型的数值结果与 Grotberg 等人的理论分析结果吻合。非线性模型的数值结果与我们的实验结果一致。非线性弹性系数在哮喘音产生中起阻尼作用, 它可能与气道塌陷及气流流量限制有密切关系。哮喘音是气道壁与气流相互作用而产生的声信号, 气道壁颤振是受迫振动, 而不是自激振动。

A study on wheezes models

XU Jingping CHEN Qimin MIN Yijian and ZANG Xiaofei

(Applied Acoustics Institute, Shanxi Normal University Xi'an, 710062)

LU Bainian

(Department of Mathematics, Shanxi Normal University Xi'an, 710062)

Received March 19, 1992

Abstract In this paper, finite difference schemes for linear and nonlinear models of wheezes are given. The waveform of wheezes is analysed. The authors show that numerical results of the linear model of wheezes coincide well with Grotberg's theoretical results, while numerical results of the nonlinear model of wheezes are in qualitative agreement with our experimental observations. It is suggested that, the nonlinear elastance coefficient (β) causes damping and is closely related with the flow limitation and the airway collapse. Wheezes result from the interaction between the fluid force and the wall force, and the airway wall flutter is a forced-vibration rather than a self-vibration.

一、引言

哮喘音是临床上常见的一种异常肺音, 尽管临床上人们容易识别, 但是, 在哮喘音产生机理、生理学意义等方面, 尚遗留着问题^[1]。

Forgacs^[2]认为: 哮喘音是气道壁自身振动产生的, 形象地将哮喘音类比于吹奏乐器的管内气流作用而产生的声音, 其振动频率仅与气道壁的声学特性有关, 而与气管内气流速度无关。这种发生机理学说并未考虑到弹性气管内气流在哮喘音产生中的作用, 而且, 由于人体呼吸道为弹

^①现为西安交通大学生物医学工程与仪器系博士生

性管道, 因此, 哮喘音发生机理可能与吹奏乐器发声机理不同。

近年来, Grotberg 等人^[3, 4]提出了管内气流与可塌陷 (Collapsible) 弹性管道相互作用产生哮喘音的气道壁颤振理论 (Flutter theory), 即在一定条件下, 受气流作用, 气道壁在法线方向上作类似于翅膀 (翼) 的振动。这个理论不同于哮喘音产生的 Forgacs 学说^[2], 也不同于 Conrad 的薄气道壁的振动理论^[5], 这个理论是研究在厚气道壁条件下, 哮喘音产生的条件, 哮喘音特征参数与气道壁声学特性、气流参数等的关系。在产生哮喘音的线性模型中, 文献[4]研究表明: 当管内气流速度大于或等于某一气流速度时, 就会发现气道壁振动, 这一气流速度被称为气道壁颤振的临界速度^[3]。对于非线性模型, 文献[3, 4]仅进行了初步研究。

本文在文献[3, 4]工作的基础上, 提出应用有限差分方法对哮喘音模型进行数值模拟, 研究非线性模型的特性。结果表明: 哮喘音是气道壁与管内气流相互作用产生的声音。非线性弹性系数在哮喘音产生过程中起着重要作用。这些结论对于人们认识哮喘音产生机理及其特征具有重要的意义。

二、哮喘音产生的模型

哮喘音产生模型及有关参数如图 1 所示。

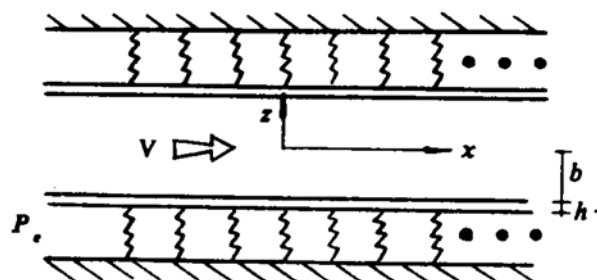


图 1 哮喘音产生模型。

流体与弹性模量为 E 、弯曲刚性为 D 、密度为 ρ_w 、非线性弹性系数为 β 的气道。

哮喘音产生可模拟成图 1 所示的形式: 气道被定义为具有弹性模量为 E 、弯曲刚性为 D 、密度为 ρ_w 、非线性弹性系数为 β 的无限长弹性管道 (壁厚为 h , 半径为 b)^[4]。流体被定义为: 不可压缩的非粘滞的或有一定粘滞系数的^[6]密度为 ρ_f 的气体, 且在 x 方向上以平均速度 V 作无旋的平移流动。

若管道中气体运动速度势 $\Phi(x, z, t)$, (u, v) 为 x, z 方向上流体的速度。流体无量纲压力为 P , 壁外压力为 P_e (如图 1 所示), P_a 为驱动流体的稳定压力。根据文献[4]所述, 则流体速度方程、波动方程、气道壁振动方程分别为:

$$u = \Phi_x, \quad v = \Phi_z \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.2)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + 2R_f \Phi + P - P_a = 0 \quad (1.3)$$

$$MW_{tt} + 2R_w W_t + BW_{xxxx} + (1+W) + \beta(1+W)^3 - TW_{xx} + P - P_e = 0 \quad (1.4)$$

其中 W 为管壁法向位移。 M, R_w, B, β, T 分别为壁质量与流体质量比, 无量纲壁阻尼系数, 弯曲刚性与弹性比, 非线性弹性系数, 外加纵向张力与弹性力之比, R_f 为流体的无量纲达西

(Darcy) 摩擦系数, s 为无量纲流体速度。

在对称周期条件下, 方程 (1) 可化为:

$$MW_{tt} + 2R_w W_t + BW_{xxxx} + q(1+W) - TW_{xx} = f(x, t) \quad (2.1)$$

$$W(x + \lambda_x, t) = W(x, t) \quad (x, t) \in [0, \lambda_x] \times [0, L] \quad (2.2)$$

$$W(x, 0) = W_0(x) \quad x \in [0, \lambda_x] \quad (2.3)$$

$$W_t(x, 0) = W_{t_0}(x) \quad x \in [0, \lambda_x] \quad (2.4)$$

其中

$$f(x, t) = \left\{ \Phi_t + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + 2R_f \Phi \right\} \Big|_{z=-1} - (2R_f s x + s^2 / 2),$$

$$q(1+W) = 1 + W + \beta(1+W)^3,$$

λ_x 为 x 方向的波长, L 为波的周期。

三、数值计算

取时间步长为 τ 、空间步长为 h_1 , $J = [\lambda_x / h_1]$, $K = [L / \tau]$, $x_j = j h_1$, $t_n = n\tau$, $0 \leq j \leq J$, $0 \leq n \leq K$ 。记 W_j^n 为 $W(x_j, t_n)$ 的近似解。对方程 (2) 作如下差分格式:

$$MW_{j\bar{t}}^n + 2R_w W_{j\bar{t}}^n + BW_{j\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}^n + q(1+W_j^n) - TW_{j\bar{x}\bar{x}}^n = f_j^n \quad (3.1)$$

$$W_{j+rJ}^n = W_j^n \quad 0 \leq j \leq J, 1 \leq n \leq K, r = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

$$W_j^0 = W(x_j) \quad 0 \leq j \leq J \quad (3.3)$$

$$W_{j\bar{t}}^0 = W_{t_0}(x_j) \quad 0 \leq j \leq J \quad (3.4)$$

其中 $W_{j\bar{t}}^n = (W_j^{n+1} - W_j^n) / \tau$, $W_{j\bar{t}}^n = (W_j^n - W_j^{n-1}) / \tau$, $W_{j\bar{t}}^n = (W_j^{n+1} - W_j^{n-1}) / (2\tau)$, $W_{j\bar{x}}^n = (W_{j+1}^n - W_j^n) / h_1$, $W_{j\bar{x}}^n = (W_j^n - W_{j-1}^n) / h_1$ 。

1. 线性模型差分格式及稳定性讨论

应用 Von Neumann 稳定性方法^[7], 令 $W_j^n = G^n e^{ij\eta}$ 代入 (3.1) ($\beta=0$, $f=0$, $q(1+W) = 1+W$) 中得:

$$MG_{\bar{t}\bar{t}}^n e^{ij\eta} + 2R_w G_{\bar{t}}^n e^{ij\eta} + BG_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}^n e^{ij\eta} + G^n e^{ij\eta} - TG_{\bar{x}\bar{x}}^n e^{ij\eta} = 0 \quad (4)$$

简化整理 (4) 式有:

$$(M + \tau R_w) G^2 + [(\tau^2 - 2M + 2TC_1^2)(1 - \cos \eta) + 4BS_1^2(\cos \eta - 1)^2]G + (M - \tau R_w) = 0 \quad (5)$$

式中: $C_1 = \tau / h_1$, $S_1 = \tau / h_1^2$ 。

将 (5) 式改写为:

$$a_1 G^2 + b_1 G + c_2 = 0 \quad (6)$$

其中 a_1 , b_1 , c_2 分别为 (6) 式中的系数。所以:

$$\Delta = b_1^2 - 4a_1c_2 = 4[M - TC_1^2(1 - \cos \eta) - 2BS_1^2(\cos \eta - 1)^2 - \tau^2/2]^2 - 4(M^2 - \tau^2 R_w^2)$$

当 τ 充分小时, 显然 $\Delta < 0$ 故:

$$G = (-b_1 \pm i\sqrt{-\Delta}) / 2a_1$$

$$|G|^2 = \frac{1}{4a_1^2} (b_1^2 + 4a_1c_2 - b_1^2) = \frac{4a_1c_2}{4a_1^2} = \frac{c_2}{a_1} = \frac{M - \tau R_w}{M + \tau R_w} < 1$$

不难证明(3)与(2)相容。所以有:

在线性模型中, 即当 $q(1+W) = 1+W$, $\beta=0$ 时, 差分格式 (3) 无条件稳定, 收敛, 且收敛的阶为 $O(\tau^2 + h_1^2)$ 。

2. 非线性模型的理论分析。

应用能量不等式方法, 对非线性模型有如下结论。

设 $W \in C^4((0, L); H_p^6(0, \lambda_x))$, W_j^n 为 (3) 的解, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma_1 > 0$, 当 $[M - TC_1^2/(T-2\varepsilon) - 4BS_1^2/(T-2\varepsilon) - \tau\varepsilon/2] \geq \sigma_1$ 时, 存在与 h_1, τ 无关的正常数 C_3 使得:

$$\|W_t(\cdot, t_n) - W_t^n\| + \|W_c(t_n) - W^n\|_2 \leq C_3(h_1^2 + \tau^2) \quad (7)$$

其中: $S_1 = \tau/h_1^2$, $C_1 = \tau/h_1$ (见附录)。

结论表明, 当 M 相当大时, 即在厚气道壁条件下, 差分格式的收敛性与稳定性很好, 而当 M 较小时, 即在薄气道壁条件下, 差分格式稳定性是有条件的, 近似为 $TC_1^2 + 4BS_1^2 \leq M$, 由于 T 很小, 即可近似为: $4B\tau^2 \leq Mh_1^4$ 。在此, 我们给出了显式差分格式在厚气道壁条件下的收敛性与稳定性, 为厚气道壁颤振的数值分析奠定了理论基础。

3. 数值分析

根据文献[4]所测的参数, 可计算获得: $M = 3193$, $B = 529$, $T = 0$, $K = 0.1$, $R_w = 0.0265$, $R_f = 0.0003$, $G = 40.045$, 取 $W_0(x) = Ae^{-i(\omega t - kx)}$, $W_{t_0}(x) = -i\omega Ae^{ikx}$, s 及 ω 满足文献[3]的稳定性条件。

取 $h_1 = 0.62$, $\tau = 0.001$, $\lambda_x = 2\pi/K = 20\pi$, 应用 (3), 用 Turbo pascal 语言编写了计算程序, 在 IBM-PC XT/286 计算机上进行了大量的数值计算, 其结果如下所述。

1). 线性模型

当气道内气流速度大于临界气流速度 s_0 ($s_0 = 0.3$) 时, $t = 5$ 时气道壁振动振幅约为 $t = 0$ 时其振幅的 150 倍, 且随着时间增加, 气道壁振动振幅还将迅速增大。即当气道内气流速度大于临界气流速度时, 气道壁振动振幅随时间增加而增大。

当 $s = s_0$ 时, 气道壁振动振幅基本上不变。

当 $s < s_0$ 时, $t = 5$ 时气道壁振动振幅为 $t = 0$ 时振幅的近 0.94 倍, 且随着时间增加, 振幅逐渐衰减, 但振幅衰减得比较慢。

2). 非线性模型

当考虑非线性弹性系数时, 方程 (2) 为非线性模型的数学描述。对于非线性模型, 当气流速度大于临界气流速度时, 气道壁振动振幅基本上不变化。对壁上某一点 (相当于固定 x 的值), 计算气道壁振动随时间变化时的振幅值, 发现振幅随时间变化的曲线近似于正弦波。

气流密度 ρ_f 等其它参数对振动振幅影响较小。

四、实验结果

我们对临床上典型的支气管哮喘在发作时的哮喘音进行了检测与处理。图 2 所示为信号检测处理系统框图。

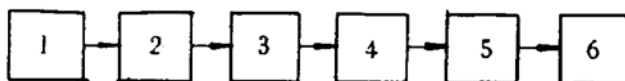


图 2 哮喘音检测处理系统框图

1. 传感器 2. 放大器 3. 高通滤波器 4. 磁带记录仪 5. 低通滤波器 6. 信号处理机

传感器由空气耦合腔与 B&K4166 型电容传声器组成, 其灵敏度为 $50\text{mv}/\text{pa}$, 频响为 $50\text{Hz} - 5\text{kHz}$ ^[8]。高通滤波器的截止频率为 80Hz , 主要作用是滤除各种低频干扰噪声^[8]。低通滤波器的截止频率为 2kHz , 采样频率为 5kHz 。采样数据存贮于信号处理机中 (日本三荣公司 7T08S 信号处理机)。然后, 调用功率谱分析程序对哮喘音进行分析^[8]。哮喘音典型波形如图 3 所示。



图 3 哮喘音典型波形

由图 3 可见, 哮喘音波形基本上由上升期、持续期与衰减期组成, 其主体波形 (持续期) 类似于正弦波。

临床上典型哮喘音的分析结果与哮喘音非线性模型的理论计算结果完全一致, 即哮喘音产生的非线性模型较好地模拟了哮喘音的产生过程。而另一方面, 哮喘音的实验分析结果与哮喘音产生的线性模型的理论计算结果有较大差异。

五、讨论与结论

哮喘音产生的线性模型揭示了气道内气流速度与气道壁振动之间密切相关, 它是气道壁振动的必要条件。本文对线性模型的数值模拟结果证实了 Grotberg 等人^[4]的理论, 但是, 当气流速度大于临界气流速度时, 线性模型所获得的气道壁振动振幅值随着时间增加而迅速地增大, 这一结果与临床上哮喘音特征不符合, 反映了线性模型的局限性。

线性模型与 Forgacs^[2]学说相比较而言, Forgacs 学说忽略了气道内气流在哮喘音产生中的作用, 并认为哮喘音源于气道壁自身的振动, 即气道壁自激振动, 与此相反, Grotberg 理论^[4]突出了气道内气流在气道壁振动中的作用, 即气流速度大于或等于某一临界气流速度是气道壁颤振的必要条件, 这一条件与人体中许多可塌陷管中的振动条件相类似^[10]。

严格地说, 哮喘音的模型应当是非线性模型, 但非线性偏微分方程理论解一般很难找到。本文采用数值分析方法研究哮喘音产生的非线性模型, 当气流速度大于临界气流速度时, 气道壁振动振幅基本上不随时间变化, 这与线性模型在同样条件下, 振幅随时间增加而增大的结论相比,

说明非线性弹性系数 β 起着限制振幅增大的作用, 即非线性弹性系数 β 起阻尼作用。气道壁上某一点振动波形类似于正弦波, 这与我们的实验结果一致, 也与文献[1]所做模拟实验结果一致。

壁振动能量基本上来源于气道内气流能量, 只有当气流速度达到临界气流速度时, 才能激励气道壁振动, 并且产生哮喘音。但是, 哮喘音的频率除与气道的声学特性有关外, 还与气流速度大小有关^[3], 因此, 我们认为: 哮喘音是由气道壁与气流相互作用而产生的声音, 气道壁振动是受迫振动, 而不是自激振动。

从生理学意义上来看: 哮喘音产生与气道内气流流量限制现象有关^[1], 可塌陷管中出现塌陷时, 会限制气道内气流流量增大, 同时, 由于塌陷, 出现气道狭窄。由于非线性模型真实地描述了哮喘音产生过程, 因此, 非线性弹性系数可能与气道塌陷及气流流量限制有密切关系。

应用数值分析方法对哮喘音产生模型进行了分析, 同时对哮喘音信号进行了处理。由以上实验与分析, 本文取得以下结论:

1. 气流速度大于或等于临界气流速度是气道壁颤振的必要条件。
2. 非线性模型描述了哮喘音产生的过程。非线性弹性系数在哮喘音产生中起着重要的作用。
3. 哮喘音是气流与气道壁相互作用而产生的, 气道壁颤振是受迫振动, 而不是自激振动。

参 考 文 献

- [1] Gavriely, N. et al, "Flutter in flow-limited collapsible tubes: a mechanism for generation of wheezes", *J. Appl. physiol.*, **66** (1989), 5: 2251—2261.
- [2] Forgacs, P, "Lung sounds", (Tindall London, 1978), 5—20.
- [3] Grotberg, J. B and Reiss, E. L, "Subsonic flapping flutter", *J. Sound Vib.*, **92** (1984), 349—361.
- [4] Grotberg, J. B and Gavriely, N, "Flutter in collapsible tubes: a theoretical model of wheezes", *J. Appl. physiol.*, **66** (1989), 5: 2262—2273.
- [5] Conrad, W. A, "pressure-flow relationships in collapsible tubes", *IEEE Trans. BME.*, **16** (1969), 284—295.
- [6] Grotberg, J. B., and shee, T. R, "compressible-flow channel flutter", *J. Fluid mech.*, **159** (1985), 175—193.
- [7] Noye, J, "computational techniques for differential equation", Elsevier science publishers B. V. (1984), 95—354.
- [8] 闵一建, 徐泾平等, "空气式耦合肺音测量传感器的研究", *应用声学*, **12** (1993), No. 1, 38—41.
- [9] 徐泾平, 闵一建等, "不同类型传感器对检测肺音信号谱特征的影响", *应用声学*, **12** (1993), No.1, 34—38.
- [10] 陶祖莱, "生物流体力学", 科学出版社 (1984), 445—463.

附 录

对 (7) 式的证明。

引理 1. 对于一切网格函数 u^n , 有

$$(I) \quad 2\text{Re}(u_{ii}^n, u_i^n) = \|u_i^n\|_i^2 \quad (8.1)$$

$$(II) \quad 2\text{Re}(u^n, u_i^n) = \|u^n\|_i^2 - \frac{\tau^2}{2} \|u_i^n\|_i^2 \quad (8.2)$$

其中 $(u^n, v^n) = h_1 \sum_{j=1}^J u_j^n \bar{v}_j^n$, $\|u^n\|^2 = (u^n, u^n)$, Re 为实部。

$$\begin{aligned} \text{证明 (I) 因为 } 2\operatorname{Re}(u_{i\tau}^n, u_i^n) &= 2\operatorname{Re}\left(\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau}, \frac{u_i^n + u_i^{n-1}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\|u_i^n\|^2 - \|u_i^{n-1}\|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 2\operatorname{Re}(u_{i\tau}^n, u_i^n) = \|u_i^n\|_{\tau}^2$$

$$\begin{aligned} \text{(II) 因为 } 2\operatorname{Re}(u^n, u_i^n) &= 2\operatorname{Re}\left(u^n, \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(u^n + u^{n+1} - (u^{n+1} - u^n), \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}\right) \\ &= (\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2) / \tau - \tau \|u_i^n\|^2 = \|u^n\|_{\tau}^2 - \tau \|u_i^n\|^2 \end{aligned}$$

类似可证

$$2\operatorname{Re}(u^n, u_i^n) = \|u^n\|_{\tau}^2 + \tau \|u_i^n\|^2 = \|u^n\|_{\tau}^2 + \tau \|u_i^{n-1}\|^2$$

$$\text{两式相加得: } 4\operatorname{Re}(u^n, u_i^n) = 2\|u^n\|_{\tau}^2 - \tau(\|u_i^n\|^2 - \|u_i^{n-1}\|^2)$$

故 (8.2) 得证。

引理 2. 对于一切网格函数 u^n, v^n , 有

$$(u_{x\bar{x}}^n, v^n) = -(u_x^n, v_x^n) \quad (9)$$

周期Soboler空间定义为 $H_p^m(0, \lambda_x) = \{u \in H_{loc}^m(c) \mid u(x) = u(x + \lambda_x)\}$, 记 $|u^n|_j^2$

$$= \|u_{x^j}^n\|^2, \|u^n\|_m^2 = \sum_{j=0}^m |u^n|_j^2, \text{ 其中 } u_{x^j}^n \text{ 为 } u^n \text{ 关于 } x \text{ 的 } j \text{ 阶差分。}$$

引理 3. 设 $\gamma = \tau / h_1^{\alpha-\beta}$, $\alpha \geq \beta + 1$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 u_j^n 满足 (3.2) 时, 有:

$$\frac{c}{2} \tau^2 |u_i^n|_{\alpha}^2 \leq \varepsilon (|u^n|_{\alpha}^2 + |u^{n+1}|_{\alpha}^2) + \frac{c^2}{2\varepsilon} \cdot 4^{\alpha-\beta-1} \gamma^2 |u_i^n|_{\beta}^2 \quad (10)$$

由 ε 不等式 $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$ 得

$$\frac{\tau^2}{2} c |u_i^n|_{\alpha}^2 \leq \frac{\tau^2}{2} \varepsilon |u_i^n|_{\alpha}^2 + \frac{\tau^2}{8\varepsilon} c^2 |u_i^n|_{\alpha}^2 \quad (11)$$

$$\frac{\tau^2}{2} \varepsilon |u_i^n|_{\alpha}^2 \leq \varepsilon (|u^{n+1}|_{\alpha}^2 + |u^n|_{\alpha}^2) \quad (12)$$

因为 $u_{x^s,j}^n = (E-1)^s u_j^n / h_1^s$, 此处 E 为平移算子 $Eu_j^n = u_{j+1}^n$

$$\text{所以 } |u_{x^s,j}^n|^2 \leq \frac{1}{h_1^{2s}} \cdot \left(\sum_{v=0}^s |c_s^v| \|u_{j+v}^n\| \right)^2$$

$$h_1 \sum_{j=1}^J |u_{x^s,j}^n|^2 \leq \frac{1}{h_1^{2s}} \cdot \left(\sum_{v=0}^s |c_s^v| \right)^2 |u^n|^2 = \frac{1}{h_1^{2s}} (1+1)^{2s} |u^n|^2$$

$$\text{故 } |u^n|_s^2 \leq 2^{2s} / h_1^{2s} |u^n|^2$$

由上式得:

$$\frac{\tau^2}{8\varepsilon} c^2 \left| u_t^n \right|_\alpha^2 = \frac{\tau^2}{8\varepsilon} c^2 \left| u_{t,x^\beta}^n \right|_{\alpha-\beta}^2 \leq \frac{c^2}{8\varepsilon} \gamma^2 \cdot 2^{2(\alpha-\beta)} \left| u_t^n \right|_\beta^2 \quad (13)$$

由 (11) - (13) 知: (10) 成立。

定理 1 设 $q \in c^1(c)$, 则: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma_1 > 0$, 当 $[M - TC_1^2 / (T - 2\varepsilon)$

$- 4BS_1^2 / (B - 2\varepsilon) - \tau\varepsilon / 2] \geq \sigma_1$ 时, $M, R_w, T, B > 0$, 在初值及右端项有扰动
的情况下, 存在与 h_1, τ 无关的常数 c_3 , 使得:

$$\|W_t^n - \tilde{W}_t^n\| + \|W^n - \tilde{W}^n\|_2 \leq c_3 (\|W_t^0 - \tilde{W}_t^0\| + \|W^0 - \tilde{W}^0\|_2 + \max_{0 \leq n \leq B} \|\tilde{f}^n\|) \quad (14)$$

其中 $S_1 = \tau / h_1^2$, $c_1 = \tau / h_1$, $\tilde{W}$ 为 (3) 在有扰动 $\tilde{W}_0, \tilde{W}_t, \tilde{f}$ 时的解。

证明, 令 $e^n = W^n - \tilde{W}^n$, 则 e^n 满足:

$$Me_{tt}^n + 2R_w e_t^n + Be_{xxx}^n + Q(e^n) - Te_{xx}^n = \tilde{f}^n \quad (15)$$

(15) 与 $2e_t^n$ 作内积, 有:

$$\begin{aligned} & 2M(e_{tt}^n, e_t^n) + 4R_w(e_t^n, e_t^n) - 2B(e_{xxx}^n, e_t^n) - 2T(e_{xx}^n, e_t^n) \\ & = 2(\tilde{f}^n - Q(e^n), e_t^n) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $Q(e^n) = q(1 + W^n) - q(1 + \tilde{W}^n)$

由引理 1, 2, (16) 取实部得:

$$\begin{aligned} & M\|e_t^n\|_t^2 + 4R_w\|e_t^n\|^2 + B\left(|e^n|_{2t}^2 - \frac{\tau^2}{2}|e_t^n|_{2t}^2\right) \\ & - T\left(|e^n|_{1t}^2 - \frac{\tau^2}{2}|e_t^n|_{1t}^2\right) = 2\operatorname{Re}(\tilde{f}^n - Q(e^n), e_t^n) \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 关于 n 从 1 到 m 求和得:

$$\rho^m + 4\tau R_w \sum_{n=1}^m \|e_t^n\|^2 = \rho_0 + 2\tau \sum_{n=1}^m \operatorname{Re}(\tilde{f}^n - Q(e^n), e_t^n) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \rho^m &= M\|e_t^m\|^2 + \frac{B}{2}(|e^{m+1}|_2^2 + |e^m|_2^2) + \frac{T}{2}(|e^{m+1}|_1^2 + |e^m|_1^2) - \frac{B}{2}\tau^2|e_t^m|_2^2 \\ & - \frac{T}{2}\tau^2|e_t^m|_1^2 \end{aligned}$$

先假定 $q \in c_b^1(c)$ ($c_b^1(c)$ 的定义见 [1]) , 则有:

$$\operatorname{Re}(\tilde{f}^n - Q(e^n), e_t^n) \leq \varepsilon_1 (\|e_t^m\|^2 + \|e_t^{n-1}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + c_1^2) (\|e^n\|^2 + \|\tilde{f}^n\|^2)) \quad (19)$$

在引理 3 中, 取 $\alpha = 2, \beta = 0, c = B, r = s, u^n = e^m, \varepsilon = \frac{B}{2} - \varepsilon'$, 得:

$$\frac{B}{2}\tau^2|e_t^m|_2^2 \leq \left(\frac{B}{2} - \varepsilon'\right) (|e^{m+1}|_2^2 + |e^m|_2^2) + \frac{4B^2s^2}{(B - 2\varepsilon)} \|e_t^m\|^2 \quad (A)$$

取 $\alpha = 1, \beta = 0, c = T, r = c, u^n = e^m, \varepsilon = \frac{T}{2} - \varepsilon'$ 得:

$$\frac{T}{2} \tau^2 |e_i^m|^2 \leq \left(\frac{T}{2} - \varepsilon'\right) \left(|e^{m+1}|_1^2 + |e^m|_1^2\right) + \frac{Tc^2}{(T-2\varepsilon')} \|e_i^m\|^2 \quad (B)$$

由(A), (B)及(19)和题设有:

$$\eta^m \leq \rho^m \leq c_2^2 \left(\|e_i^m\|^2 + \|e^{m+1}\|_2^2 + \|e^m\|_2^2\right) \quad (20)$$

$$\text{其中 } \eta^m = \sigma_1 \|e_i^m\|^2 + \varepsilon \left(|e^{m+1}|_2^2 + |e^{m+1}|_1^2 + |e^m|_2^2 + |e^m|_1^2\right)$$

又因为 $e^1 = e^0 + \tau e_i^0$ 得:

$$\|e^1\|^2 \leq 2 \left(\|e^0\|^2 + \tau^2 \|e_i^0\|^2\right) \quad (21)$$

由(18) — (21)得:

$$\eta^m \leq c_3 \left(\|e_i^0\|^2 + \|e^0\|_2^2 + \max_{1 \leq n \leq K} \|\tilde{f}^n\|^2\right) + \tau c_4 \sum_{n=1}^m \|e_i^n\|^2$$

由Gronwall不等式得:

$$\eta^m \leq c_3 e^{c_4 T_1} \left(\|e_i^0\|^2 + \|e^0\|_2^2 + \max_{1 \leq n \leq K} \|\tilde{f}^n\|^2\right) \quad (22)$$

又由 $\|e^{n+1}\| \leq \|e^n\| + \tau \|e_i^n\|$, 所以:

$$\|e^m\| \leq \|e^0\| + \tau \sum_{n=1}^m \|e_i^{n-1}\| \leq \|e^0\| + T_1 \max_{1 \leq n \leq K} \|e_i^{n-1}\| \quad (23)$$

由 (22), (23) 得, (14) 对 $q \in c_b^1(c)$ 时成立. 类似于文[1, 2, 3]的方法可取掉 $q \in c_b^1(c)$ 的假定.

(7) 式证明类似于定理1, 略.

参 考 文 献

- [1] 鲁百年, “高维非线性Schrödinger方程的Fourier谱方法”, 计算数学, 13 (1991), No.1, 25—33.
- [2] Lu Bai-nian, “An unconditionally stable difference approximation for a class of nonlinear dispersive equations”, J. C. M., 9(1991), No.1, 28—32.
- [3] A. Quarteroni, “Fourier Spectral methods for pseudo-parabolic equations”, SIAM, J. Numer. Anal., 24(1987), No.2, 323—335.