

修正的统计能量分析能量平衡方程^{*}

孙进才 任克明 王 冲 孙朝晖

(西北工业大学声学工程研究所, 西安 710072)

1995年3月4日定稿

摘要 根据三串联振子功率流的表达式, 对经典统计能量分析 (SEA) 平衡方程进行了修正。修正的 SEA 能量平衡方程中包括了直接和间接结构间的功率流。在满足工程精度的条件下, 修正的 SEA 能量平衡方程中的参数可以用经典 SEA 参数来表示。

Modification of energy balance equations in Statistical Energy Analysis

SUN Jincai REN Keming WANG Chong and SUN Zhaohui

(Institute of Acoustic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Received March 4, 1995

Abstract The energy balance equations in the Classical Statistical Energy Analysis (CSEA) are modified by using the equations of power flow between the three series coupled oscillators. The modified equations include not only the direct power flow, but also the indirect power flow. The parameters in the modified equations can be expressed by those in the classical equations when the accuracy of the predicted results is able to satisfy the needs for engineering.

一、引 言

实际工程结构, 一般不符合弱耦合的假设, 因此间接连接结构之间的功率流不能忽略^[1-3]。为此必须考虑间接耦合功率对能量平衡的影响。作者为发展包含间接功率流影响的 SEA 能量平衡方程 (称为修正的统计能量平衡方程), 已作了三方面的工作: (1) 发展了三串联耦合振子功率流的理论表达式^[4]; (2) 完成了串联耦合结构间的间接耦合损耗因子的计算^[2,3]; (3) 间接耦合损耗因子的测量原理分析及实现方法^[1]。这些研究作为修正经典统计能量分析的能量平衡方程奠定了理论基础。工程应用结果表明, 当 SEA 能量平衡方程中考虑了间接功率流的影响后, 理论预测的振动响应与实际测量振动响应比较, 其一致性优于用经典 SEA 能量平衡方程预测的结果^[1,2]。但文献[2]中图 5 的计算结果所用的间接耦合损耗因子是实验的实测结果。对于实际工程结构, 由于激振器要安装在每一个子结构表面不总是能实现的, 另外即使可能, 随着子结构数目的增加, 测量是费时的, 计算也较复杂。自六十年代 Lyon 发展统计能量分析以来, 由于它在工程中的广泛应用, 已发展了各种结构连接方式的直接耦合损耗因子的计算公式, 在文献[5]中, 对这些计算公

* 国家自然科学基金资助项目

式作了总结。八十年代以后,随着 SEA 在机械噪声控制中的应用,孙进才^[6]、Fahy^[7]、刘明治^[8]、张健^[9]、Chen^[10]等人发展了非保守耦合结构的统计能量分析原理,在此基础上,作者又发展了各种结构不同连接方式下的直接非保守耦合损耗因子计算公式^[11,12]。本文的目的是要发展包含间接功率流影响的 SEA 能量平衡方程。在满足工程计算精度的条件下,该方程中的间接耦合损耗因子可以用直接耦合损耗因子表示,从而避免了间接耦合损耗因子的复杂计算,更具有工程应用价值。

二、修正的 SEA 能量平衡方程

1. 耦合三振子的能量平衡方程

为了求得相互耦合的三振子功率流,可将相互耦合的三振子,如图 1 所示,变换成图 2 所示的三组串联耦合三振子。根据文献[4]的功率流表示,可以获得相互耦合的三振子功率流为

$$P_{12} = \beta_{12}(E_1 - E_2) + \gamma_{13}(E_1 - E_3) \quad (1-1)$$

$$P_{32} = \beta_{32}(E_3 - E_2) + \gamma_{31}(E_3 - E_1) \quad (1-2)$$

$$P_{21} = \beta_{21}(E_2 - E_1) + \gamma_{23}(E_2 - E_3) \quad (1-3)$$

$$P_{31} = \beta_{31}(E_3 - E_1) + \gamma_{32}(E_3 - E_2) \quad (1-4)$$

$$P_{13} = \beta_{13}(E_1 - E_3) + \gamma_{12}(E_1 - E_2) \quad (1-5)$$

$$P_{23} = \beta_{23}(E_2 - E_3) + \gamma_{21}(E_2 - E_1) \quad (1-6)$$

其中 β_{ij} , γ_{ij} 为功率流比例系数。

功率流与振动能量差成正比。为了求得其中一个振子与其他振子用耦合损耗因子表示的功率流,必须定义其他两个振子的振动能量为零。如当振子 2, 3 固定时, $E_2 = E_3 = 0$, 由 (1-1) 式得

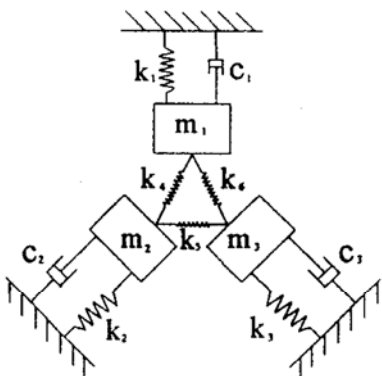


图 1 三耦合振子的力学模型

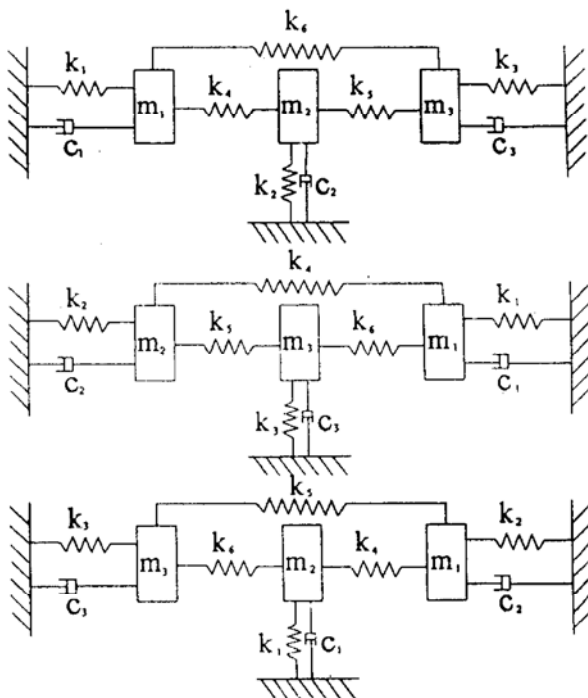


图 2 三组等效三串联耦合振子

$$P_{12} = \beta_{12} E_1 + \gamma_{13} E_1 \quad (2-1)$$

同样, 以次设振子 2, 1;1, 3;1, 2;3, 2; 和 3, 1 固定, 方程 (1-2)-(1-6) 变为

$$P_{32} = \beta_{32} E_3 + \gamma_{31} E_3 \quad (2-2)$$

$$P_{21} = \beta_{21} E_2 + \gamma_{23} E_2 \quad (2-3)$$

$$P_{31} = \beta_{31} E_3 + \gamma_{32} E_3 \quad (2-4)$$

$$P_{13} = \beta_{13} E_1 + \gamma_{12} E_1 \quad (2-5)$$

$$P_{23} = \beta_{23} E_2 + \gamma_{21} E_2 \quad (2-6)$$

用耦合损耗因子表示方程 (2) 为

$$P_{12} = \eta_{12} \omega_1 E_1 + \eta'_{13} \omega_1 E_1 \quad (3-1)$$

$$P_{32} = \eta_{32} \omega_3 E_3 + \eta'_{31} \omega_3 E_3 \quad (3-2)$$

$$P_{21} = \eta_{21} \omega_2 E_2 + \eta'_{23} \omega_2 E_2 \quad (3-3)$$

$$P_{31} = \eta_{31} \omega_3 E_3 + \eta'_{32} \omega_3 E_3 \quad (3-4)$$

$$P_{13} = \eta_{13} \omega_1 E_1 + \eta'_{12} \omega_1 E_1 \quad (3-5)$$

$$P_{23} = \eta_{23} \omega_2 E_2 + \eta'_{21} \omega_2 E_2 \quad (3-6)$$

其中 η_{ij} 表示振子 i 和 j 之间的直接耦合损耗因子, η'_{ij} 表示间接振子 i 和 j 之间的间接耦合损耗因子。

根据比例系数相同, 可得

$$\omega_i \eta_{ij} = \beta_{ij} \quad (4)$$

$$\omega_i \eta'_{ij} = \gamma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \quad (5)$$

设振子 i 的损耗因子为 η_i , $\eta_i = C_i / m_i \omega_i$, C_i 为阻尼系数, m_i 为质量, ω_i 为圆频率。根据公式 (3), 可得三个振子的能量平衡方程为

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{d1} + P_{12} + P_{13} - P_{21} - P_{31} \\ &= [\eta_1 + (\eta_{12} + \eta_{13}) + (\eta'_{12} + \eta'_{13})] \omega_1 E_1 - (\eta_{21} + \eta'_{23}) \omega_2 E_2 - (\eta_{31} + \eta'_{32}) \omega_3 E_3 \\ P_2 &= P_{d2} + P_{21} + P_{23} - P_{12} - P_{32} \\ &= [\eta_2 + (\eta_{21} + \eta_{23}) + (\eta'_{21} + \eta'_{23})] \omega_2 E_2 - (\eta_{12} + \eta'_{13}) \omega_1 E_1 - (\eta_{32} + \eta'_{31}) \omega_3 E_3 \\ P_3 &= P_{d3} + P_{31} + P_{32} - P_{13} - P_{23} \\ &= [\eta_3 + (\eta_{31} + \eta_{32}) + (\eta'_{31} + \eta'_{32})] \omega_3 E_3 - (\eta_{13} + \eta'_{12}) \omega_1 E_1 - (\eta_{23} + \eta'_{21}) \omega_2 E_2 \end{aligned}$$

用矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & -\varphi_{21} & -\varphi_{31} \\ -\varphi_{12} & \varphi_{22} & -\varphi_{32} \\ -\varphi_{13} & -\varphi_{23} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 E_1 \\ \omega_2 E_2 \\ \omega_3 E_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中

$$\varphi_{ii} = \eta_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 (\eta_{ik} + \eta'_{ik}), \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\varphi_{ij} = \eta_{ij} + \eta'_{ik} \quad (j = 1, 2, 3), (i = 1, 2, 3, i \neq j; k = 3, 2, 1, k \neq i, j)$$

2. 三耦合振子组的能量平衡方程

耦合三振子的能量平衡方程 (6) 不能直接扩展到连续结构的情况, 因为每一连续子结构响应均是由一系列固有模态组成的, 每一模态相当于一个简单振子。所以必须首先推导三耦合振子组的能量平衡方程。设三耦合振子组分别为 1、2、3, 振子组的非耦合模态数分别为 N_1 、 N_2 、 N_3 , 振子振动频率带宽为 Δf , 中心频率为 f , 振子组的平均振动能量定义为^[13]

$$\bar{E}_1 / N_1 = [\sum_i (\pi S_{1i} / M_{1i} \eta_{1i} \omega_{1i})] / N_1 \quad (7-1)$$

$$\bar{E}_2 / N_2 = [\sum_j (\pi S_{2j} / M_{2j} \eta_{2j} \omega_{2j})] / N_2 \quad (7-2)$$

$$\bar{E}_3 / N_3 = [\sum_k (\pi S_{3k} / M_{3k} \eta_{3k} \omega_{3k})] / N_3 \quad (7-3)$$

其中 S 为外激励力谱密度, M 为振子模态质量, η 为模态损耗因子。

模态平均内损耗因子为

$$\eta_1 = \sum_i \eta_{1i} / N_1; \quad \eta_2 = \sum_j \eta_{2j} / N_2; \quad \eta_3 = \sum_k \eta_{3k} / N_3; \quad (8)$$

模态平均直接耦合损耗因子为

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \sum_{i,j} \eta_{1i,2j} / N_1; & \eta_{13} &= \sum_{i,k} \eta_{1i,3k} / N_1; \\ \eta_{21} &= \sum_{j,i} \eta_{2j,1i} / N_2; & \eta_{31} &= \sum_{k,i} \eta_{3k,1i} / N_3; \\ \eta_{23} &= \sum_{j,k} \eta_{2j,3k} / N_2; & \eta_{32} &= \sum_{k,j} \eta_{3k,2j} / N_3; \end{aligned} \quad (9)$$

模态平均间接耦合损耗因子为

$$\begin{aligned} \eta'_{12} &= \sum_{i,j \neq i} \eta'_{1i,2j} / N_1; & \eta'_{13} &= \sum_{i,k \neq i} \eta'_{1i,3k} / N_1; \\ \eta'_{21} &= \sum_{j,i \neq j} \eta'_{2j,1i} / N_2; & \eta'_{31} &= \sum_{k,i \neq k} \eta'_{3k,1i} / N_3; \\ \eta'_{23} &= \sum_{j,k \neq j} \eta'_{2j,3k} / N_2; & \eta'_{32} &= \sum_{k,j \neq k} \eta'_{3k,2j} / N_3; \end{aligned} \quad (10)$$

功率流的互易关系为

$$n_\alpha \eta_{\alpha\beta} = n_\beta \eta_{\beta\alpha} \quad n_\alpha \eta'_{\alpha\beta} \approx n_\beta \eta'_{\beta\alpha} \quad (11)$$

其中 n_α 为模态密度

$$n_\alpha = N_\alpha / \Delta f,$$

其中 $i = 1, 2, 3 \dots N_1$; $j = 1, 2, 3 \dots N_2$; $k = 1, 2, 3 \dots N_3$; $\alpha = 1, 2, 3$; $\beta = 1, 2, 3$, $\beta \neq \alpha$ 。

经过上述处理, 三耦合振子组等效为三耦合振子, 其等效耦合三振子的平均振动能量为 $\bar{E}_\alpha / N_\alpha$, 平均内损耗因子为 η_α , 平均直接耦合损耗因子为 $\eta_{\alpha\beta}$, 间接耦合损耗因子为 $\eta'_{\alpha\beta}$ 。代入方程 (6) 即得到三耦合振子组的能量平均方程

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \varphi_{11} & -\varphi_{21} & -\varphi_{31} \\ -\varphi_{12} & \varphi_{22} & -\varphi_{32} \\ -\varphi_{13} & -\varphi_{23} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中 $\varphi_{\alpha\beta}$ 具有方程 (6) 中同样形式, 只是用平均参数代替了振子参数。

3. 多耦合振子组能量平衡方程

方程(12)可直接推广到多振子组情况而无须考虑弱耦合的条件, 因为方程中已考虑了强耦合引起的间接耦合损耗因子的影响, 对于 N 个振子组的情况

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \varphi_{11} & -\varphi_{21} & \cdots & -\varphi_{N1} \\ -\varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varphi_{1N} & -\varphi_{2N} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \vdots \\ \bar{E}_N \end{bmatrix}$$

或写成

$$[P] = \omega[\Phi][E] \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \varphi_{ii} = \eta_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (\eta_{ik} + \eta'_{ik}), & (i = 1, 2, 3, \dots, N) \\ \varphi_{ij} = \eta_{ij} + \eta'_{ik} & (j = 1, 2, 3, \dots, N), \\ & (i = 1, 2, 3, \dots, N, i \neq j, \\ & k = N, N-1, N-2, \dots, 1, k \neq i, j) \end{cases} \quad (14)$$

方程(13)称为修正的统计能量分析能量平衡方程。

三、用直接耦合损耗因子表示间接耦合损耗因子

正如引言中所述, 几十年来, 由于 SEA 在结构和声响应预测中的广泛应用, 前人已发展了各种系统连结条件下的直接耦合损耗因子计算方法。尽管作者已经推导了连续结构的串联耦合时的间接耦合损耗因子计算的一般表示式^[2], 但要精确计算组装的复杂结构之间的间接耦合损耗因子仍然是十分困难的, 原因是计算耦合子结构的平均点导纳和传递导纳是十分艰巨的任务。因此作者假设一般结构的传递导纳幅值小于点导纳幅值, 在这种条件下, 串联耦合结构的间接耦合损耗因子可以用直接耦合损耗因子来表示。实验和理论结果比较说明, 这种假设是满足工程计算精度要求的^[3]。但对实际工程结构, 子结构之间的连接不总是串联的, 而是相互连结的, 因此功率流的路径数将随着子结构数 N 的增加而增加, 例如, 当子结构数为 N 时, 则功率流的路径数为 $N(N-1)/2$ 。尽管如此, 根据文献[3]中公式(21), 仍然可以写出用直接耦合损耗因子表达间接耦合损耗因子的一般表达式

$$\begin{aligned} \eta'_{ij} = & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{N-2} \frac{\eta_{ik} \eta_{kj}}{\eta_k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{N-2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j,k}}^{N-3} \frac{\eta_{ik} \eta_{kl} \eta_{li}}{\eta_k \eta_l} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{N-2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j,k}}^{N-3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i,j,k,l}}^{N-4} \frac{\eta_{ik} \eta_{kl} \eta_{lm} \eta_{mj}}{\eta_k \eta_l \eta_m} + \dots \\ & + \sum_k^{N-2} \sum_l^{N-3} \sum_m^{N-4} \dots \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j,k,l,m,\dots}}^2 \frac{\eta_{ik} \eta_{kl} \eta_{lm} \dots \eta_{pj}}{\eta_k \eta_l \eta^m \dots \eta_p} \end{aligned} \quad (15)$$

四、利用修正的 SEA 能量平衡方程计算响应的步骤

使用修正的 SEA 能量平衡方程计算结构或声响应时, 其基本步骤可总结如下:

- (1) 按 SEA 划分子系统的原则给出 SEA 模型图;
- (2) 确定内损耗因子, 直接耦合损耗因子及模态密度参数;
- (3) 根据直接耦合损耗因子参数, 由公式 (15) 计算间接耦合损耗因子参数;
- (4) 将内损耗因子, 直接耦合损耗因子, 间接耦合损耗因子参数代入公式 (14), 即 $[\varphi]$ 矩阵, 如果输入功率矩阵 $[P]$ 已知, 即可求得 $[E]$ 。

作者利用修正 SEA 能量平衡方程和经典 SEA 能量平衡方程预测了某机械的传递损失并与实验结果相比较, 利用修正的 SEA 能量平衡方程计算结果远优于经典 SEA 能量平衡方程预测结果 (参考文献[3]中图 6)。

五、结 论

本文考虑了间接耦合功率流的影响, 对 CSEA 能量平衡方程作了修正。用修正的 SEA 能量平衡方程预测的振动或声响应结果与经典 SEA 能量平衡方程预测结果相比具有更高的精度; 间接耦合损耗因子用直接耦合损耗因子表示避免了计算的复杂性; 该方程适用于保守强耦合系统, 因此可广泛应用于实际工程结构。

参 考 文 献

- [1] Cuschieri J M and Sun Jincai. Use of statistical energy analysis for rotating machinery, Part I: Determination of dissipation and coupling loss factors using energy ratios, *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **170**(2): 181—190.
- [2] Cuschieri J M and Sun Jincai. Use of statistical energy analysis for rotating machinery, Part II: Coupling loss factors between indirectly coupled substructures, *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **170**(2): 191—201.
- [3] 孙进才, 王 冲, 孙朝辉. 间接耦合机械结构之间的耦合损耗因子, *声学学报*, 1995, **20**(1): 33—41.
- [4] 孙进才, 荣军虎, 王 冲, 武延祥. 三串联耦合振子的功率流, *声学学报* (待发表)。
- [5] 孙进才, 王 冲. 机械噪声控制原理, 西北工业大学出版社, 1993.
- [6] Sun Jincai *et al.* Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures, *Journal of Sound and Vibration*, 1987, **112**(2): 321—343.
- [7] Fahy F J and De-Yung Y. Power flow between non-conservatively coupled oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 1987, **114**(1): 1—11.
- [8] 刘明治. 非保守耦合系统统计能量分析法研究, 南京航空学院博士学位论文, 1987, 4.
- [9] 张 建. 切削噪声的能量分析与实验研究, 西安交通大学博士学位论文, 1988, 12.
- [10] Chen G and Soong T T. Power flow and energy balance between non-conservatively coupled oscillators, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 1991, **113**: 448—454.
- [11] 明瑞森, 孙进才. 非保守面耦合损耗因子计算, *振动工程学报*, 1989, **2**: 44—48.
- [12] 明瑞森, 孙进才. 非保守耦合结构间耦合损耗因子计算, *西工大学报*, 1989, **7**(1): 39—46.
- [13] Fahy F J. *Statistical Energy Analysis*, Chapter 7, Noise and Vibration, edited by R. G. White and J. G. Walber, 1982.