

非一倍频程的小波算法^{*}

任 锐 吴国清

(中国科学院声学研究所, 北京 100080)

马忠梅

(北京理工大学, 北京 100081)

1994 年 9 月 24 日收到

摘要 本文从舰船幅射噪声分析的需要出发, 提出了一种非一倍频程的小波变换算法。把 Mallat 塔式算法和 Morlet 连续小波算法结合起来, 进行了一种分层的小波变换, 与 Morlet 的不降采样的算法相比, 大大减少了变换后的数据量。这一算法的应用并不局限于舰船噪声的分析, 它同样可以应用到其它一切需要的场合。

Non-one-octave wavelet transform

REN Rui and WU Guoqing

(Institute of Acoustics, Academia Sinica, Beijing 100080)

MA Zhongmei

(Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Received September 24, 1994

Abstract A non-one-octave wavelet transform method is developed for its application in analysis on ship-radiated noise. It combine pyramid(Mallat) method and continuous wavelet transform method, and obtain non-one-octave division of frequency domain. Compared with continues wavelet transform, it greatly decrease the data amount of the transform result.

一、引 言

小波变换作为一种数学方法, 近年来在数字信号处理领域中非常活跃, 它已应用到诸如图象处理, 语音分析, 模式识别等许多方面。目前它被认为是一门独立的理论而发展。在信号处理中, 它作为一种时频分析法, 其最大的特点在于它具有多分辨率, 对高频部分的时间分辨率高, 而对于低频部分的频率分辨率高。它对频带的分割不是线性的, 而是成对数划分的。人耳对声音频率的感知也是成对数的(乐音的音阶正是这样)。声学中传统测量功率谱常用三分之一倍频程滤波器进行, 它对频带按照三分之一倍频程来划分。这与小波变换在 $a_0 = 2^{1/3}$ 时的频带划分正好一致。但是现有的小波变换的算法都是针对一倍频的, 即 $a_0 = 2$, 没有非一倍频的小波算法。而我们在分析舰船幅射噪声时需要按三分之一倍频程进行^[1]。出于这个需要, 本文发展出一种算法, 它把 Mallat 塔式算法和 Morlet 连续小波算法结合起来, 对频带可以按 $a_0 = 2^{1/N}$ 进行分割。声学中, $N = 1$ 时为一倍频程, $N = 3$ 时为三分之一倍频程, 因此这里我们把这种算法称做非一倍频程的小波变换算法。

^{*} 国家自然科学基金资助项目

二、小波变换定义

连续小波变换定义为

$$CWT_x(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int x(t) h^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt \quad (1)$$

小波变换常用的一种离散化的方法是 $a = a_0^j$, $\tau = Ka_0^j T$, j, K 都是整数, T 为时间间隔。离散变换的表达式为

$$h_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} h(a_0^{-j} t - kT) \quad (2)$$

其中 $a_0 > 1$ 。如果 a_0 接近 1, T 足够小, 则 $h_{j,k}(t)$ 接近于连续状态的 $h_{a\tau}(t)$ 。

三、小波变换算法回顾

这里回顾一下 Mallat 塔式算法和 Morlet 连续小波算法。

A. 塔式算法

流程图见图 1。其中 $g(n)$ 为一个半带低通滤波器的冲激响应, $g'(n)$ 是一个与 $g(n)$ 有关系, 符合重建条件的半带低通滤波器。关于 $g'(n)$ 和 $g(n)$ 的不同及如何选择这里不作阐述。这里, $y(n)$ 是 $x(n)$ 经过半带低通滤波后再经过 2 倍亚采样得到的, 这个过程可以表示为

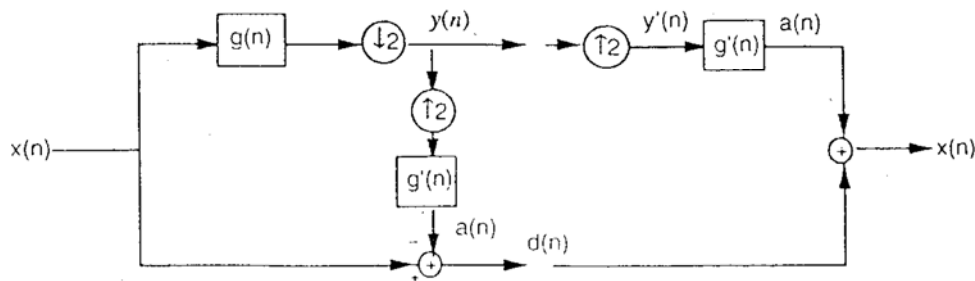


图 1 塔式算法原理图

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) \cdot x(2n-k) \quad (3)$$

$y(n)$ 内插零的过程为:

$$y'(2n) = y(n) \quad y'(2n+1) = 0 \quad (4)$$

$y'(n)$ 经过 $g'(n)$ 的低通滤波, 得到了 $x(n)$ 的近似值 $a(n)$ 。

$$a(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g'(k) \cdot y'(n-k) \quad (5)$$

$d(n)$ 是 $x(n)$ 与 $a(n)$ 之间的差值。

$$d(n) = x(n) - a(n) \quad (6)$$

本质上 $d(n)$ 代表 $x(n)$ 的高频部分的信号, 等效于 $x(n)$ 经过一个半带高通滤波器的输出。对

$y(n)$ 进行重复运算,就可得到不同 Scale 及不同 resolution 的输出,见图 2。小波变换中, Scale 和 resolution 是两个非常重要的词汇。文献[2]对它们做了详细的描述。

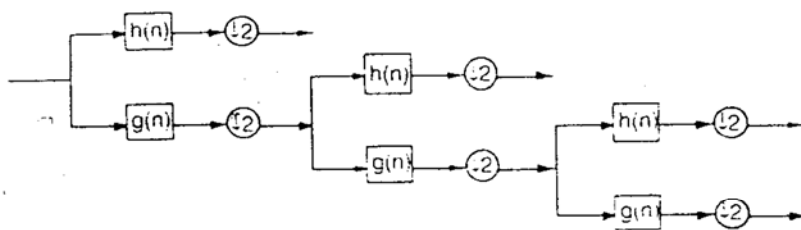


图2 塔式算法迭代过程

B. 连续小波变换

这里说连续小波变换是为了区别于采用有限支集的正交小波基的离散小波变换。当然在实际计算中它也必须进行离散采样。Morlet 在他 1983 年著名的文章中采用这种方法对地层结构进行了分析,他的重建效果非常理想。这里引用 I.Daubechies 的文献[3]对连续小波变换加以说明。假定 $\{\varphi_l, l \in J\}$ 构成了一个 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的框架(frame),即存在 $A > 0$, $B < \infty$, 使得对于所有 $f \in \mathcal{H}$ 满足,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{l \in J} |\langle \varphi_l, f \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (7)$$

其中 $\|f\|^2$ 是 f 的能量, $\langle \varphi_l, f \rangle$ 即是小波系数。 A 与 B 越接近, 重建的效果就越好。 $A = B$ 时, 就成为正交小波基。 Daubechies 给出各种框架在不同的时移步长 b_0 及不同的 N 时的 B/A 值, 并且给出了重建的信噪比的计算公式。这样, 在确定了框架, 时间步长 b_0 及 N 以后, 就可以计算出重建后的信噪比。最常用的框架有两种, 其一称做墨西哥草帽, 定义如下:

$$h(t) = 2/\sqrt{3} \pi^{-1/4} \cdot (1-t^2)e^{-t^2/2} \quad (8)$$

另一个即 Morlet 小波基,

$$h(t) = \pi^{-1/4}(e^{-iKt} - e^{-K^2/2})e^{-t^2/2} \quad (9)$$

其中 $K = \pi(2/\ln 2)^{1/2}$

四、非一倍频的小波算法

我们这里提出的针对 $a_0 = 2^{1/N}$ 的算法, 这一算法的结构框图如图 3。它的特殊之处在于, 它是分“两层”变换的。第一层是由 $h(n)$ 和 $g(n)$ 完成的标准的 Mallat 塔式变换, 第二层是对 $h(n)$ 的输出 $y(n)$ 进行的连续小波变换, 其小波系数为 $h_1(t), h_2(t), h_3(t) \dots, h_N(t)$ 。连续小波变换中的小波是这样从母小波 $h(t)$ 作拉伸和移位得到的, 即

$$H^j(t) = 2^{-j/2N} h(2^{-j/N} t), \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (10)$$

在我们的应用中, 由于中心频率按三分之一倍频程变化, 很自然取 $N=3$ 。图中的 $h_1(n), h_2(n), h_3(n)$ 分别是对 $h_0(t), h_1(t), h_2(t)$ 密抽样得到的。如果完全从带通滤波器的观点看待这一算法, 各次叠代中的滤波器连结起来就构成一个完整的三分之一倍频程滤波

器。随着叠代次数的增加,中心频率就会越来越低。而且保证不同次叠代之间的输出的中心频率变换会衔接得很好。简单说明如下。设第一次叠代中三个滤波器中心频率分别为 f_0 , $f_0 \cdot 2^{-1/3}$, $f_0 \cdot 2^{-2/3}$, 经过 2 倍亚采样后, 由于采样率降低了一半, 三个滤波器作用于信号时实际上它们的中心频率分别成为上一次的 2^{-1} 倍。这样, 第二次的中心频率成为 $f_0 \cdot 2^{-1}$, $f_0 \cdot 2^{-4/3}$, $f_0 \cdot 2^{-5/3}$ 。保证了最高频率 $f_0 \cdot 2^{-1}$ 与上一次的最低频率 $f_0 \cdot 2^{-2/3}$ 之间比例为 $2^{-1/3}$ 。这一算法的可能性的依据就在于, 它是分层变换的, 只要每一层变换都是可重建的, 则最初的信号就可得到重建。我们可以看到由 $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$ 可重建出 $y(n)$, 由 $y_0(n)$, $y(n)$ 可重建出 $x(n)$, 可以想象从迭代运算的最低层开始, 一步一步地向前重建, 就可重建出原始信号 $x(n)$ 。

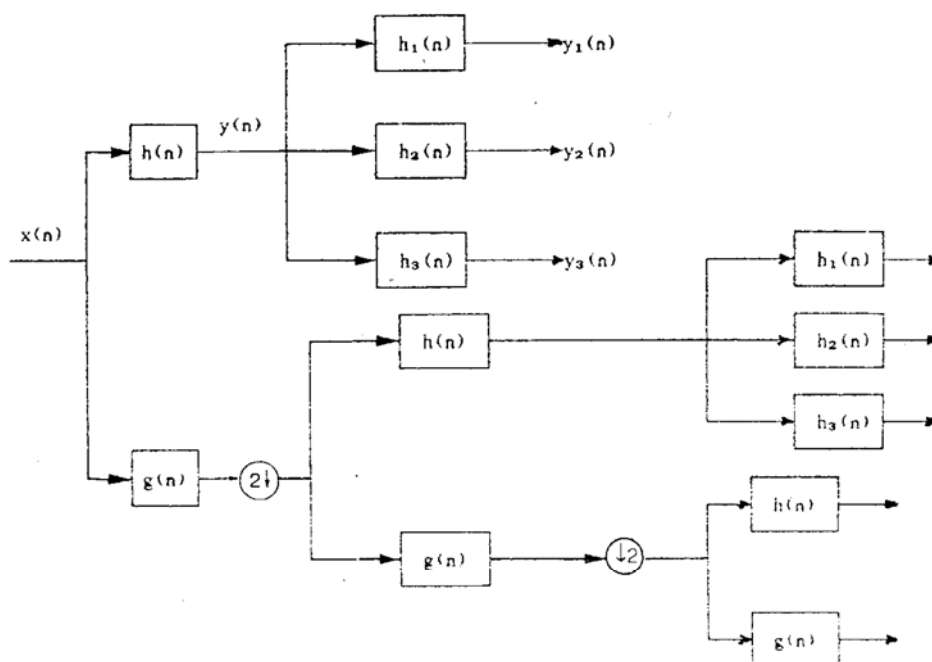


图3 非一倍频的小波算法框图

五、结 论

本文把小波变换的 Mallat 塔式算法和 Morlet 连续小波算法结合起来, 提出了一种非一倍频的小波算法。这一算法中得到了比 Mallat 塔式算法更细的频带分割, 付出的代价是数据的冗余量, 即这种算法总的的数据量是原数据的四倍。但是与 Morlet 的不降采样的算法相比, 数据量已大大减少了。

参 考 文 献

- [1] 吴国清、任锐. 舰船辐射噪声的子波分析, 声学学报, 待发表。
- [2] Vetterli M and Herley C. Wavelet and filter banks: theory and design, *IEEE Trans. on SP*, 1992.
- [3] Daubechie I. The wavelet transforms, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1990, 36(5): 961—1005.