

# 长江口与杭州湾海区水底浮泥地声模型 及其声反射特性研究

张叔英

(中科院东海研究站 上海 200032)

杨挺 马在田

(同济大学海洋地质与地球物理系 上海 200092)

1997 年 7 月 29 日收到

1998 年 1 月 5 日定稿

**摘要** 通过在现场和实验室分别对长江口与杭州湾海区水底浮泥重度  $\rho$  随深度变化规律以及声速  $c$  与声衰减常数  $\beta$  等浮泥声学参数随  $\rho$  及声波频率  $f$  的变化规律的测量和分析, 得出了这个海区水底浮泥层的地声模型。其主要特点是: 重度  $\rho$  ( $\text{kN/m}^3$ ) 在 10.1 到 15.0 的范围内, 随着深度线性增加, 但在 12.5 左右处线性增加的梯度(斜率)有一个突变(拐点),  $\rho$  大于 15.0 以后,  $\rho$  随深度的递增加快, 即浮泥层很快过渡到硬性泥层或沙层; 声速  $c$  ( $\text{m/s}$ ) 随  $\rho$  增大的变化不明显(在  $\pm 1.5\%$  以内), 但在  $\rho$  为 14.0 附近存在一个最小值; 声衰减常数  $\beta$  ( $\text{dB/m}$ ) 则分别随  $\rho$  和  $f$  ( $\text{kHz}$ ) 线性增加。根据实测的地声模型, 通过理论计算, 对长江口和杭州湾海区水底浮泥层的声反射信号进行了正演模拟研究, 得到了在拐点处出现的声反射特性(反射波的幅度和极性)与梯度变化的关系, 为解决浮泥层重度的回声探测问题提供了依据。

PACS 数 43.30

**A study of geoacoustic model and acoustic reflection properties of fluid mud layer in Changjiang Estuary and Hangzhou Bay**

ZHANG Shuying

(Shanghai Acoustics Laboratory, The Chinese Academy of Sciences Shanghai 200032)

YANG Ting MA Zaitian

(Tongji University Shanghai 200092)

Received Jul. 29, 1997

Revised Jan. 5, 1998

**Abstract** A generalized geo-acoustic model of fluid mud layer in Changjiang Estuary and Hangzhou Bay has been derived through a large amount of in-situ measurements of the bulk density ( $\rho$ ) of the layers and lab measurements of the acoustic velocity ( $c$ ) and attenuation coefficient ( $\beta$ ) of the fluid mud samples with different values of  $\rho$  for four frequencies of 100, 150, 500, 1500 kHz. The main features of the geoacoustic model can be expressed as follows: in the range of  $\rho=10.0\sim 15.0$ , the bulk density of

the fluid mud  $\rho$  increases linearly with depth  $z$ , however, there is a gradient change (knee) when  $\rho$  is about 12.5. After  $\rho$  more than 15.0, the fluid mud quickly transform into the ooze layer. In the fluid mud layer, the sound velocity  $c$  can be regarded as constant since its variation with  $z$  less than 1.5 %, and a minimum value exists when  $\rho$  is about 13.5. The variations of  $\beta$  with  $\rho$  and with frequency  $f$  are linear. Based on the geo-acoustic model and the ray theory, simulations of sound reflection properties of the fluid mud layers have been made, and some significant results obtained.

## 引言

水下地声探测技术正在从水底地貌和沉积构造的形态探测(定形探测)向水底沉积物的地质属性分类识别(定性探测)及其声学和其它物理参数估测(定量探测)的方向发展<sup>[1]</sup>。例如,现代水底地形测绘要求使用双频测深仪在应用高频测定水底深度的同时,还需要用低频对水底的底质进行属性识别;同样,在采用地质声呐探测水底沉积物分层构造的同时,也要求对各层沉积物的地质属性作出分类。水声传播研究和水下工程建设分别对水底沉积物的声学参数和力学参数的估测提出了要求;而在当今大江、大河的航道整治和疏浚工作中则迫切需要估测水底浮泥重度的分布,从而解决如何正确测定航道的适航深度的问题。多年来,国内外学者在水下地声探测的定性和定量探测方面开展了很多工作,近期不断有这方面的报道<sup>[2-10]</sup>。本文则报道了为探索解决航道水底浮泥重度估测问题而开展的基础性研究工作,主要是通过实验研究建立水底浮泥层的地声模型,然后通过理论分析和计算机模拟,研究了水底浮泥层的声反射特性。

## 1 水底浮泥地声模型的建立

水底浮泥层的地声模型是指浮泥层的声阻抗(重度×声速)、声衰减常数在深度方向上的分布规律<sup>[11]</sup>。浮泥层的地声模型决定了浮泥层的声反射特性(称为正演问题),它对水下地声探测有着重要意义。为了对探测的海区建立起一个合适的地声模型,通常需要进行大量的实际测量和综合分析工作。

交通部上海航道勘察设计研究院和其他有关单位曾利用“ $\gamma$ 射线测沙仪”对杭州湾和长江口海区的水底浮泥重度在深度方向上的变化规律进行了长期的探测\*,典型的记录如图1和图2所示<sup>[12,13]</sup>。水底浮泥重度在深度方向上的分布曲线在不同时间内的变化很大(主要受潮汐影响),但是这些分布曲线的共同特征是:从浮泥的上界面开始,浮泥重度  $\rho$  以梯度  $k_1$  从水的重度线性递增至重度为 12.0~13.0 kN/m<sup>3</sup> 之间的一个拐点以后,再以另一梯度  $k_2$  线性递增,  $k_2$  可以大于或小于  $k_1$ ,当  $\rho$  随深度增加到 15.0 kN/m<sup>3</sup> 左右,浮泥层很快过渡到重度约等于或大于 18.0 kN/m<sup>3</sup> 的较硬泥层或沙层<sup>[14]</sup>。

水底浮泥的声速和声衰减的测量是在实验室里的一个尺寸为 43.5 × 35 × 20 cm<sup>3</sup> 的水槽内进行的,测试的泥样分别在长江口和杭州湾的水底浮泥层中用抽水泵吸取。通过土质和颗粒分析后得知,长江口泥样为亚粘土,平均粒径为 0.043 mm,杭州湾的泥样为亚砂土(含有亚粘土),平均粒径较小,为 0.013 mm。

根据浮泥重度  $\rho$  (kN/m<sup>3</sup>) 和浮泥中的干泥含量  $M$ (kg/m<sup>3</sup>) 的关系式(见附录):

$$\rho = 1.01 + \frac{M}{159} \quad (1)$$

\* 重度以千牛顿每立方米(kN/m<sup>3</sup>)为单位,清水重度为 10.0,长江口和杭州湾海域水的重度取为 10.1。

在水槽中配制不同重度的浮泥并搅拌均匀后, 采用“一发二收”的方式进行声速和声衰减的测量<sup>[15]</sup>。实验中所用的声脉冲的频率分别为 100 kHz、150 kHz、500 kHz、1500 kHz, 脉冲宽度为 100  $\mu\text{s}$ , 发射和接收换能器之间的距离适当选定, 使得直达声信号与从其它途径到达的声信号能够明显分开。测量过程中浮泥中所含有的气泡应尽可能地排除。实验证明, 浮泥重度愈低, 气泡对测量精度的影响愈大, 但重度大于 10.5  $\text{kN}/\text{m}^3$  后, 气泡的影响相对就较小, 声学参数测量的重复性也就较好。

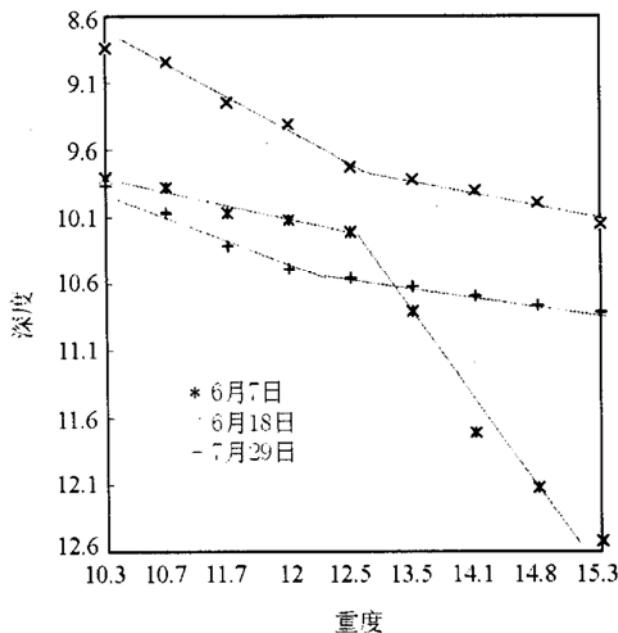


图 1 杭州湾水底浮泥重度随深度变化的典型记录  
(站位: 东试挖槽)

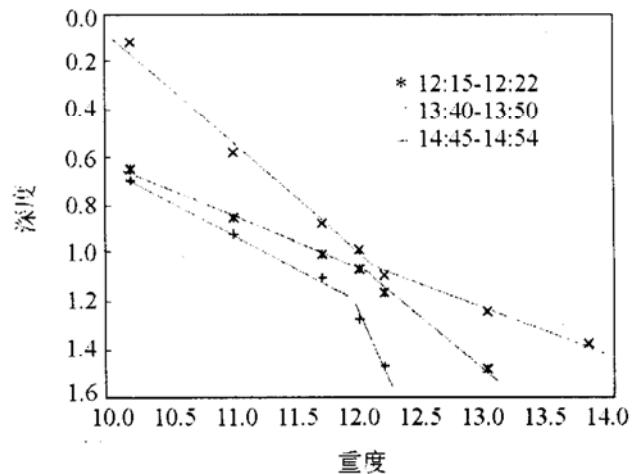


图 2 长江口水底浮泥重度随深度变化的典型记录  
(站位: 南槽, 日期: 1978 年 8 月 29 日)

长江口和杭州湾的泥样的声速测量结果分别如图 3 和图 4 所示。由此可知: 对取自两个海区的、性质不同的浮泥, 当重度在 10.0  $\text{kN}/\text{m}^3$  到 15.0  $\text{kN}/\text{m}^3$  的范围内, 四个不同频率的声速  $c$  的变化都不明显(在  $\pm 1.5\%$  以内); 对于 100 kHz 和 150 kHz 的较低频率, 可以看出, 杭州湾浮泥在重度为 13.5 时, 声速出现最小值( $c_{\min} = 1440 \text{ m/s}$ ), 长江口浮泥的声速最小值则出现在重度为 14.5 处( $c_{\min} = 1460 \text{ m/s}$ )。在最小值以后, 声速随着重度增大而快速地增大, 这和 Wood 理论预示的结果一致<sup>[16]</sup>。

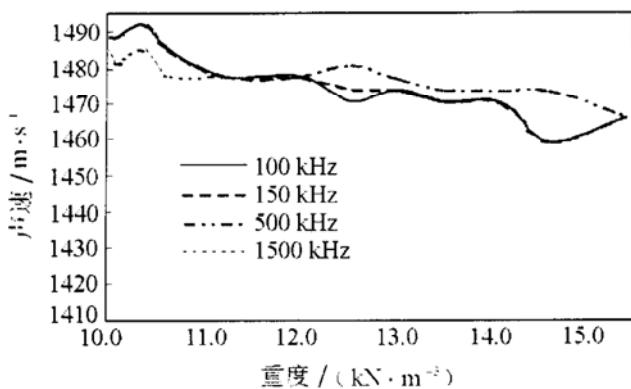


图 3 长江口水底浮泥声速与重度的关系

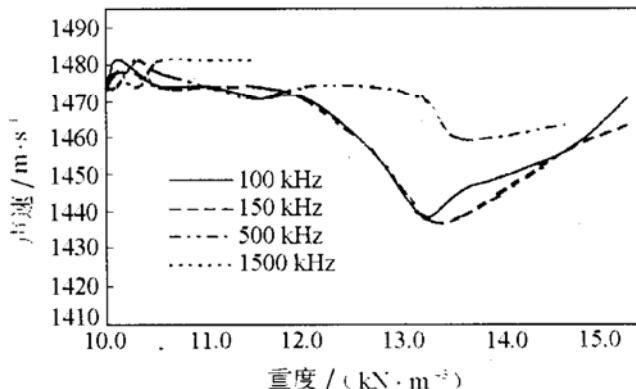


图 4 杭州湾水底浮泥声速与重度的关系

图 5 是长江口和杭州湾泥样的声衰减测量结果。由图看出，在浮泥重度为 10.0 到 15.0 的范围内，声衰减常数随重度的增加而线性增加。同样，对某一给定的浮泥重度，声衰减常数也随频率增加而线性增加。此外，在相同重度和频率的情况下，杭州湾浮泥的声衰减常数要比长江口浮泥的声衰减要大一点。这是因为声波传播过程中的衰减是由粘滞效应和散射效应所引起，在粒径远小于声波波长的情况下，声衰减以粘滞衰减为主，散射衰减要小得多，因而总的衰减随粒径增大而减小<sup>[16]</sup>。经过分析归纳，可以得出浮泥声衰减常数  $\beta$  与其重度  $\rho$  及声波频率  $f$  之间的近似关系式：

$$\begin{aligned} \text{长江口: } \beta &= 0.072 \times (\rho - 10.0) \times f + \beta_w(f) \\ \text{杭州湾: } \beta &= 0.080 \times (\rho - 10.0) \times f + \beta_w(f) \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\beta$  以  $\text{dB}/\text{m}$  为单位， $f$  以  $\text{kHz}$  为单位， $\rho \in (10.0, 15.0)$ ,  $\beta_w(f)$  是频率为  $f$  时水的声衰减系数。

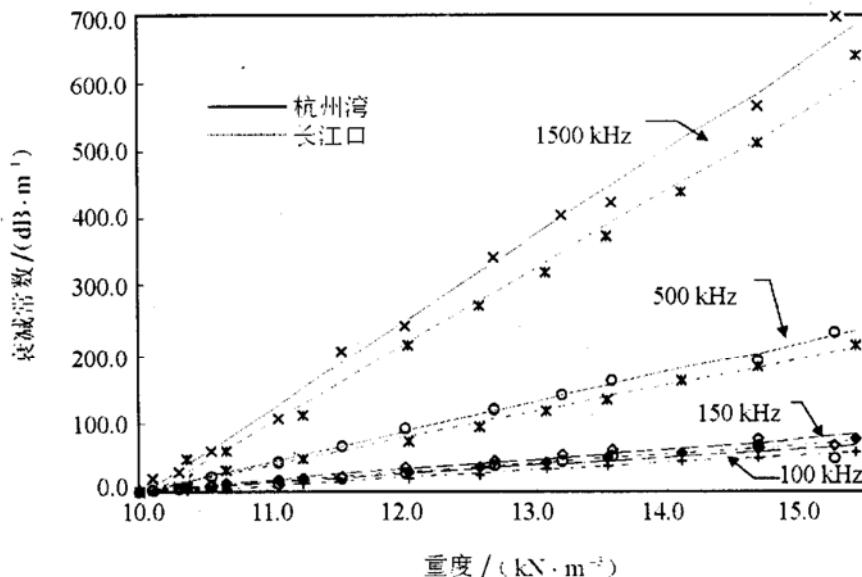


图 5 长江口和杭州湾水底浮泥声衰减与重度的关系

虽然在实验室水槽测量浮泥声学参数的结果与现场情况会有偏差，但是长江口和杭州湾海域水较浅，测量时又注意尽可能的排除气泡，这个偏差不会很大。

根据上述测量结果并收集其它相关资料，可以建立起如图 6 所示的长江口和杭州湾海区水底浮泥层的地声模型。由于在浮泥层中声速的变化很小，在精度允许的范围内，可以认为是常数，声衰减随重度线性变化，因而相应的地声模型（即声阻抗  $\rho c$  和声衰减在深度方向上的分布）实质上是由浮泥重度在深度方向上的分布规律所决定。需要说明的是，尽管浮泥层之下的软泥层对声波传播也有影响，但因为声源的频率很高，穿透的距离很有限，对反射声波起作用的只是软泥层的表层，所以在浮泥的地声模型中可以认为软泥层是参数由其表层参数值决定的均匀介质。可以看出，地声模型的特点是：在浮泥层上下界面和中间拐点（相应于浮泥重度为  $12.0 \sim 13.0 \text{ kN/m}^3$ ）处，声阻抗和声衰减常数随深度的变化率（即梯度）发生变化，而在梯度变化处会产生声反射。下一节的分析和计算将表明，水底浮泥层地声模型参数不同时的声反射特性。

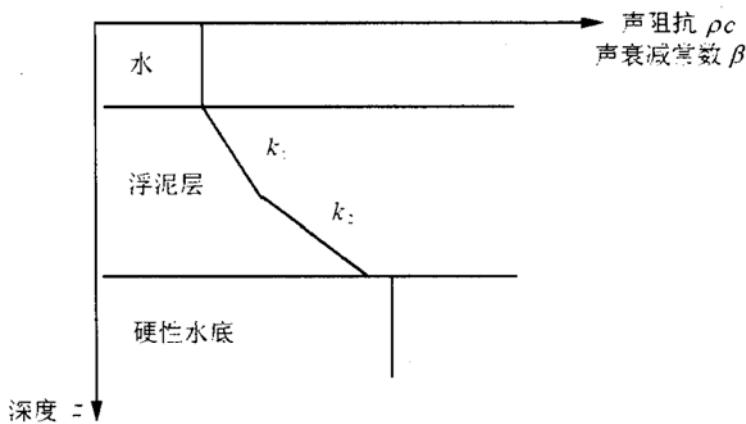


图 6 长江口和杭州湾水底泥层的地声模型  
(声阻抗和声衰减在深度方向上的分布规律)

## 2 声反射特性研究

由已知地声模型通过理论计算来模拟声反射是一个正演问题。对这个问题进行深入的研究, 可以为根据浮泥层反射信号来反演地声模型, 从而提取浮泥层的声学参数提供重要依据<sup>[10,17]</sup>。这一节将采用基于射线理论的正演方法对所建立的长江口和杭州湾海区的浮泥地声模型进行声反射模拟研究。

### 2.1 正演算法

图 6 所示的长江口和杭州湾的地声模型中, 浮泥层的声速可以认为是常数, 重度的变化率较小, 而声源的频率却很高(如常用的回声测深仪频率为 100~300 kHz), 所以用射线方法进行分析研究是合适的。声阻抗和声衰减等参量是随深度连续变化的, 为了用射线理论进行计算, 需要把浮泥层分成许多水平薄层, 每层内介质参数  $\rho c$  和  $\beta$  认为是常数, 但各层的参数有微小突变, 整个浮泥层的反射信号就是所有这些薄层反射信号的综合效应。当所分薄层的厚度足够小时,  $\rho c$  和  $\beta$  的微小突变可以看成是连续的, 这时的反射波也可以认为是介质参数连续变化的反射波。经多次模拟计算发现<sup>[18]</sup>, 薄层的厚度  $\Delta z$  小于声源子波波长  $\lambda$  的四分之一以后, 分层介质与相应的连续介质的反射特性就一致了。

根据波的传播理论, 对于水平层状介质, 脉冲声源所产生的格林函数响应可以表示为

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ft} \cdot H(f) df \quad (3)$$

上式中的  $H(f)$  称为特征射线的频域传递函数, 它是到达接收点的各层的反射信号的特征射线的频率响应的叠加, 即:

$$H(f) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n C_j G_j \exp(-i 2\pi f \tau_j) \exp\left[-\frac{\ln 10}{20} A_j f\right] & f \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n C_j^* G_j \exp(-i 2\pi f \tau_j) \exp\left[+\frac{\ln 10}{20} A_j f\right] & f < 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, “\*”表示复共轭, 上式中  $f < 0$  时的表达式是为了使  $H(f)$  满足条件  $H(f) = H^*(-f)$ , 从而保证经富氏变换后脉冲响应是实数;  $\tau_j$  和  $G_j$  分别为第  $j$  个特征射线的传播时间和几何扩

散因子;  $C_j$  表示第  $j$  个特征射线的累积透射损失和界面反射损失的总和, 即:

$$C_j = R_j \cdot \prod_{i=1}^{j-1} T_{i,i+1} T_{i+1,i} \quad (5)$$

其中,  $T_{i,i+1}$  表示从第  $i$  层到第  $i+1$  层的透射系数,  $R_j$  表示第  $j$  层的反射系数, 它们由各个薄层的声阻抗  $(\rho c)_i$  确定。 $A_j$  是第  $j$  个特征射线的衰减因子, 定义如下:

波传播过程中的衰减损失  $L$  (dB) 与波的频率  $f$  (kHz) 及其传播距离  $dz$  (m) (设其传播前后的声压分别为  $p$  和  $p_0$ ) 之间存在关系:

$$L = \int (\beta f) dz = -20 \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (6)$$

这里的  $\beta$  即为频率为 1 kHz 时的声衰减常数 (dB/m/kHz), 它与频率  $f$  成正比。把  $p$  表示成  $p_0$  的形式:

$$p = p_0 \exp \left[ -\frac{\ln 10}{20} Af \right] \quad (7)$$

其中的  $A = \int \beta dz$ , 故 (2) 式中的  $A_j = \sum_{i=1}^j \beta_i \Delta z$ , 式中  $\beta_i$  为第  $i$  层的当  $f = 1$  kHz 时的衰减常数,  $\Delta z$  为薄层厚度。

如果声源信号为  $s(t)$ , 由 (3) 式, 接收到的反射信号  $r(t)$  为:

$$r(t) = F^{-1} \{ F[s(t)] \cdot H(f) \} \quad (8)$$

这里的  $F\{\cdot\}$  和  $F^{-1}\{\cdot\}$  分别表示富氏变换和反富氏变换。

对于图 6 所示的长江口水底浮泥地声模型, 用以上的正演算法对其进行了反射波模拟。声源子波由下式产生:

$$s(t) = P_0 \sin(2\pi ft) \exp \left[ -\zeta \left( t - \frac{b_1}{2f} \right)^2 \right] \quad t \in \left[ 0, \frac{b_2}{2f} \right] \quad (9)$$

其中,  $P_0$ ,  $f$  分别为子波的幅度和主频,  $\zeta$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  为波形控制参数。

进行模拟计算时, 声源参数  $P_0 = 1$ ,  $f = 100$  kHz,  $\zeta$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  分别取 20.0, 0.5 和 2.0。浮泥层以  $\Delta z = \lambda/5$  分层 ( $\lambda = c/f = 1.5$  cm, 在此, 声速  $c$  取 1500 m/s), 每层的  $\rho c$  和  $\beta$  按图 7 所示的五种地声模型中不同的递增规律取值, 模型中的其它参数见图 7 的图注。

## 2.2 正演结果分析

图 7 就是有代表性的几个浮泥层的地声模型及其正演结果, 从中能够看出浮泥层的地声参数对反射波特性的影响规律。

长江口和杭州湾的水底浮泥地声模型的正演结果是形成三个明显的反射波, 它们的传播时间分别与浮泥层的上下界面和重度梯度变化 (拐点) 处的深度相对应。上下界面处形成的反射波的振幅  $P_1$  和  $P_3$  分别取决于重度梯度  $k_1$  和  $k_2$  的大小, 下界面的反射波的振幅还受到衰减效应的影响。图 7 中, 从模型 a 到 e,  $k_1$  保持不变, 所以上界面处形成的反射波的幅度  $P_1$  也保持不变 (若  $k_1$  为每米 0.15 kN/m<sup>3</sup>,  $P_1$  相对于  $P_0$  的分贝数为 -35 dB); 而重度梯度  $k_2$  逐渐增大, 所以下界面处的反射波幅度  $P_3$  也相应地增大, 这一点可以从图 8 看出。

浮泥层的重度梯度拐点处所形成的反射波的特性由两个重度梯度间的关系确定。从图7和图9都可以看出, 当  $k_2/k_1$  大于 1 时, 这一反射波的极性与声源子波一致, 振幅  $P_2$  随着  $k_2/k_1$  的增大而增大; 而当  $k_2/k_1$  小于 1 时, 反射波的极性发生反转, 其振幅  $P_2$  随着  $k_2/k_1$  的减小而增大; 反射波的到达时间又反映了拐点的位置。所以根据这一反射波的特性可以确定浮泥层的重度变化规律。

在地声模型中, 如果改变衰减常数, 则拐点处和下界面处的反射波的幅度都会受其影响。而且因为声波高频成分吸收损失大, 相应的波形就会展宽。

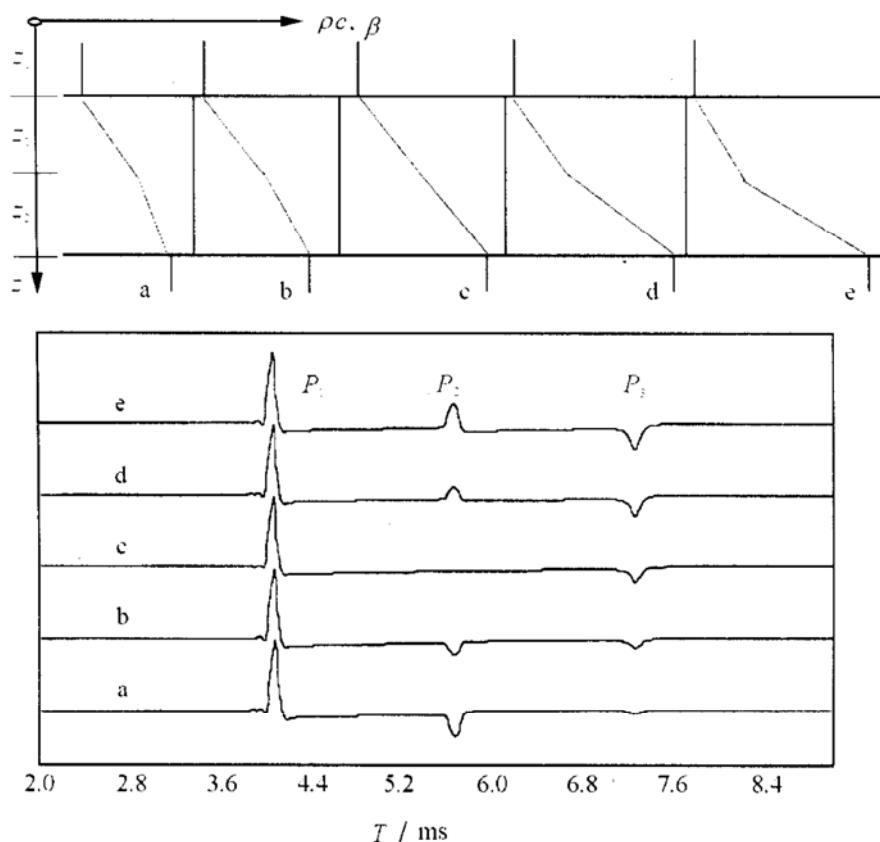


图7 典型浮泥地声模型及其正演结果

(其中, 声源与浮泥层表面距离  $z_0$  为 3 m; 浮泥层 2.4 m, 拐点位于其中间, 即  $z_1 = z_2 = 1.2$  m)

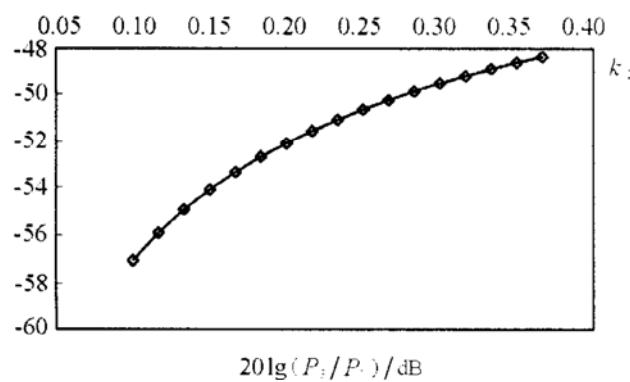


图8 浮泥层下界的幅度  $P_3$  (相对于  $P_0$  的分贝数) 与  $k_2$  间的关系

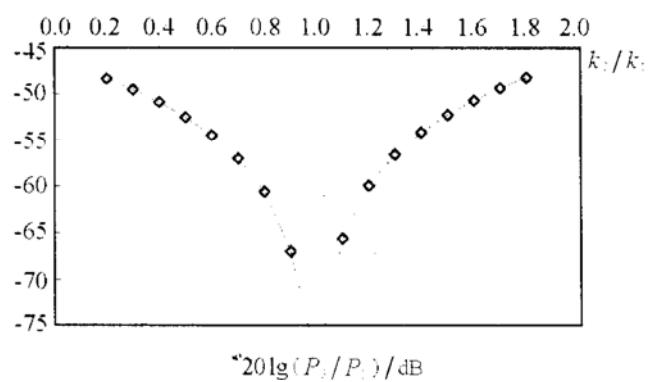


图9 梯度变化处的反射波幅度  $P_2$  (相对于  $P_0$  的分贝数) 与  $k_2/k_1$  间的关系 ( $k_2/k_1 < 1.0$  时, 反射波极性与震源相反)

### 3 结束语

对长江口和杭州湾的浮泥声学参数的实际测量说明，水底浮泥表现出与一般悬浮液相似的地声特性，如：在一定重度范围内，声衰减系数与重度、声波频率呈线性关系；声速随重度变化不明显等。但是，长江口和杭州湾的水底浮泥也存在着区域性的差异，例如，在相同情况下，杭州湾的浮泥声衰减要稍大于长江口浮泥；它们的声速变化规律也略有差异。这些结论对于认识水底浮泥声学特性及建立地声模型是有意义的，而且中国科学院东海研究站已经应用声衰减的测量结果研制了新一代的超声浮泥重度测量仪。

水底浮泥的重度随深度线性增加，而航道适航深度的重度临界值一般为  $12.0 \sim 13.0 \text{ kN/m}^3$ <sup>[12]</sup>。在根据测量数据建立的长江口和杭州湾水底浮泥地声模型中，这一重度值处通常存在着一个重度梯度变化的拐点。反射信号的模拟表明在这个拐点处会形成反射波，并且其幅度和极性由重度梯度的变化规律所确定。从计算结果看出，在拐点处反射信号的幅度很小，一般低于声源级 50 dB 以下，因此，由通常的回声测深仪很难检测到这样低的反射信号。但是本文的分析预示，如果能采用更精确的方法检测到这个反射波，就可以根据其特性，反演求得浮泥的重度分布，从而有望用声遥测方法解决水底浮泥重度的估测和实时地确定航道的适航深度问题。

本项课题得到了同济大学海洋地质开放实验室和上海市自然科学基金的资助，凌鸿烈和孙耀秋做了大量实验室测量工作，交通部上海航道勘察设计院提供了浮泥重度的典型分布记录，对此作者表示深切的谢意。

### 参 考 文 献

- 1 Zhang S Y. Progress in underwater acoustic geo-mapping technology. *Acoustics Australia*, 1996, **24**(2): 47—51
- 2 张叔英, 林亦俊. 声学地层剖面记录的图像识别研究之一(穷举搜索策略的专家系统方法). 声学学报, 1996, **21**(1): 40—48
- 3 张叔英, 曹民. 声学地层剖面记录的图像识别研究之二(基于模糊集理论的专家系统方法). 声学学报, 1996, **21**(2): 150—155
- 4 Zhang S Y. A study of measuring acoustic velocities of thin and hard sea-bed layers. *Chinese Journal of Acoustics*, 1991, **10**(4): 347—358
- 5 Zhang S Y. Acoustic velocity measurements of arbitrarily dipped sediment layers (the  $T^2 - X^2$  approach). *Chinese Journal of Acoustics*, 1988, **7**(2): 108—121
- 6 Williamson A et al. ROXANN—Remote data acquisition and classification of seabed surface material types from echo sounder signal return. International Conference on Underwater Acoustics, 1994, 73—75
- 7 Lambert D N et al. High resolution acoustic seafloor classification system for mine counter measures operations. International Conference on Underwater Acoustics, 1994, 67—69
- 8 Panda S et al. Sediment classification based on impedance and attenuation estimation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994, **96**(5): 3022—3035
- 9 Leblanc L R et al. Sonar attenuation modeling for classification of marine sediments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992, **91**(1): 116—126
- 10 Rajan S D. Determination of geoacoustic parameters of the ocean bottom — data requirements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992, **92**(4): 2126—2140
- 11 Hamilton E L. Geoacoustic modeling of the sea floor. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1980, **68**(5): 1313—1340
- 12 曹更新. 南京水利科学研究院研究报告. 高浓度  $\gamma$  射线测沙仪的研制及在长江口航道疏浚中的应用, 1980
- 13 袁金林. 杭州湾东西试挖漕浮泥勘察技术报告. 交通部上海航道勘察设计研究院, 1994
- 14 金翔龙. 东海海洋地质. 北京: 海洋出版社, 1992
- 15 凌鸿烈, 孙耀秋, 杨挺. 长江口和杭州湾浮泥声参数测量. 声学技术, 1997, **16**(4): 194—197
- 16 孙承维, 魏墨盈. 高浓度悬浮液声学特性的探讨. 声学技术, 1983, **2**(1): 1—6

- 17 Rajan S D, Lynch J F. Perturbative inversion methods for obtaining bottom geoacoustic parameters in shallow water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987, **82**(3): 998—1017
- 18 杨挺. 长江口水底浮泥地声特性研究. 同济大学海洋地质与地球物理系硕士论文, 1997
- 19 布列霍夫斯基赫, (杨训仁译). 分层介质中的波. 北京: 科学出版社, 1985
- 20 Knobles D P, Vidmar P J. Simulation of bottom interacting waveforms, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1986, **79**(6): 1760—1766

## 附录:

浮泥重度与干泥含量的关系式

设  $\rho_w$  — 水的重度, 单位为  $\text{kN/m}^3$  (清水为 10.0, 长江口海水为 10.1);

$\rho_s$  — 干泥的重度, 单位为  $\text{kN/m}^3$  (对长江口泥沙为 27.2);

$\rho$  — 浮泥的重度, 单位为  $\text{kN/m}^3$ ;

$M$  — 浮泥中干泥的含量, 单位为  $\text{kg/m}^3$ ;

因为, 浮泥的重度为单位体积 ( $1 \text{ m}^3$ ) 内的重量 ( $\text{kN}$ ), 注意  $M$  的单位为  $\text{kg/m}^3$ , 则有

$$\rho = \frac{M}{100} + \rho_w \left( 1 - \frac{M}{100\rho_s} \right) = \rho_w + \frac{M}{100k}$$

式中  $k = \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_w} = \frac{27.2}{27.2 - 10.1} = 1.59$ , 得

$$\rho = 10.1 + \frac{M}{159}$$