

# 短垂直阵“简正波分解矩阵”特征值的 近似解析表达式

高天赋 陈耀明

(中国科学院声学研究所 北京 100080)

1997 年 8 月 14 日收到

1997 年 12 月 5 日定稿

**摘要** 在海面和海底反射系数均为  $-1$  的理想波导条件下, 讨论短垂直阵“简正波分解矩阵”的特性, 给出矩阵特征值  $\lambda_n$  与阵长参数  $D/H$  ( $D$  为阵长,  $H$  为海深) 和  $n$  之间的近似解析表达式。海面矩阵的  $\lambda_n$  正比于参数  $\alpha$  (即  $\pi D/H$ ) 的  $(4n-1)$  次方, 而海中短阵  $\lambda_n$  正比于  $\alpha^{2n-1}$ 。理论推导不仅解释了短垂直阵分解声场简正波或匹配场处理效果差的原因, 同时指出合理选择短阵深度, 将有效提高简正波分解能力和声源定位精度。

PACS 数: 43.30

## An approximate-analytic expression of the eigenvalues of “mode decomposition matrix” for a short vertical array

GAO Tianfu CHEN Yaoming

(Institute of Acoustics, The Chinese Academy of Sciences Beijing 100080)

Received Aug. 14, 1997

Revised Dec. 5, 1997

**Abstract** The characteristics of “mode decomposition matrix” for a short vertical array in an idea waveguide model with the reflective coefficients of both sea-surface and bottom to be equal  $-1$  are discussed, and the approximate-analytic expression of the eigenvalues  $\lambda_n$  with the parameters  $D/H$  ( $D$  is the length of array,  $H$  is the depth of sea water) and  $n$  are obtained. The eigenvalues  $\lambda_n$  for a sea-surface short array is proportional to the  $(4n-1)$  power of  $\alpha(\pi D/H)$ , while the eigenvalues  $\lambda_n$  for a sea-middle short array is proportional to  $\alpha^{2n-1}$ . The theory derivation we have done in this paper can be used to explain why the ability of decomposing mode and matched-field processing are poor, and to improve the quality of mode decomposition and the accuracy of source localization when the depth of array is selected reasonably.

## 引言

声场的简正波分解 (或称过滤) 是被动声源定位匹配简正波处理 (MMP) 的首要条件, 简正波分解是否完全将直接影响声源定位的精度。人们关注适用于垂直阵或水平阵的声场简正波分解方

法<sup>[1-7]</sup>, 也关心影响简正波分解和声源定位性能最直接的接收阵参数的选择(包括阵长、阵元数和阵姿态)。1993 年我们提出一种适用于短垂直阵的简正波分解快速收敛的迭代算法<sup>[8-10]</sup>, 它使场匹配技术对垂直阵阵长的苛刻要求变得宽容。我们还讨论浅海短垂直阵和稀垂直阵的 MMP 声源定位性能<sup>[11,12]</sup>。

究竟垂直阵短到何种程度, 它的声场简正波分解能力会严重下降? 这是一个始终萦绕我们脑际却又必须认真回答的问题。我们知道, 短垂直阵孔径总不可能覆盖全部海洋深度或声道变化范围。若用阵元接收信号构成的声压矢量反推各阶简正波复振幅, 即进行声场简正波分解, 往往受到简正波本征函数在各阵元深度位置组成的系数矩阵的影响。本文试图通过对该系数矩阵(称为“简正波分解矩阵”)的讨论, 给出矩阵特征值  $\lambda_n$  与垂直阵长度海深比参数  $D/H$  和  $n$  之间的近似解析表达式。使我们较直观地了解短阵分解简正波能力的退化, 短阵的匹配简正波处理或匹配场处理效果差的原因, 并从理论上给出 Yang<sup>[3]</sup> 的简正波分解本征矢量法中选择“信号空间”大小的依据。根据海面短阵和海中短阵的  $\lambda_n$  变化的比较, 合理选择短阵深度, 将有利于声场简正波分解, 从而提高声源定位的精度。

## 1 简正波分解矩阵

在声源定位的简正波匹配处理中, 对长的垂直接收阵来说, 声场简正波分解(或称过滤)可利用简正波本征函数的正交性来实现, 并且得到各阶简正波的复振幅。第  $n$  阶简正波估计为

$$\hat{A}_n = \sum_{m=1}^M U_n(z_m) p_m \quad (1)$$

其中  $p_m$  是深度  $z_m$  水听器上的接收信号,  $U_n(z)$  是第  $n$  阶简正波的本征函数。若令

$$E_{nn'} = \sum_{m=1}^M U_n^*(z_m) U_{n'}(z_m) \quad (2)$$

如果垂直阵覆盖声场深度, 而且接收阵元数  $M$  足够多, 那么  $E_{nn'} = \delta_{nn'}$ ,  $\hat{A}_n$  是  $A_n$  的真实估计。这里我们将矩阵  $E$  称作“简正波分解矩阵”。在一般情况下, 垂直阵长度和阵元数不满足上述条件, 简正波复振幅的估计可以通过矩阵求逆而得到改进。这时, 用矩阵形式表示为

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{E}^{-1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^T \quad (4)$$

在这里  $\mathbf{V}_n$  和  $\lambda_n$  是矩阵的特征矢量和特征值,  $T$  表示矩阵转置。显然, 矩阵  $E$  的特征值是反映垂直阵分解简正波能力的一种比较确切的描述。

众所周知, 使得估计  $\tilde{\mathbf{A}}$  偏离真值有两个主要原因: 其一是声场波导模型参数和接收阵状态参数存在偏差, 即参数失配; 其二, 由于垂直阵过短, 使特征值中的高阶特征值非常小, 以致波导模型参数的微小偏差, 甚至计算精度都会严重影响简正波分解, 直至影响声源定位的精度。第二点可见本文附录 A 中有关  $\lambda_n$  的计算精度的讨论

## 2 特征值方程

为了简单起见, 我们讨论海底和海面反射系数都等于  $-1$  的理想均匀海洋情况。声场简正波本征函数可表示为<sup>[13]</sup>

$$U_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{n\pi}{H}z\right) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

若垂直阵 (阵长为  $D$ ) 的上端固定在海面, 称它为海面矩阵, 同时阵元间距足够小时, 简正波分解矩阵的元素  $E_{nn'}$  为

$$\begin{aligned} E_{nn'} &= \int_0^D U_n(z) U_{n'}(z) dz \\ &= \frac{D}{H} \left\{ \frac{\sin[(n-n')\pi D/H]}{(n-n')\pi D/H} - \frac{\sin[(n+n')\pi D/H]}{(n+n')\pi D/H} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

特征值方程是令特征多项式  $\varphi(\lambda) = |\mathbf{E} - \lambda \mathbf{I}|$  等于零的代数方程。而矩阵  $\mathbf{E}$  的阶数为  $N$ , 它是对声场产生影响的有效简正波数目。多项式  $\varphi(\lambda)$  的显式表示为

$$\varphi(\lambda) = \lambda^N - a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} \dots - (-1)^N a_N = 0 \quad (7)$$

其中系数是总数等于  $\binom{N}{n}$  的阶数为  $n$  的 (行列式  $\text{Det}(\mathbf{E})$  的) 子行列式之和,  $a_1$  和  $a_N$  分别为

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{n=1}^N E_{nn} = \sum_{n=1}^N \lambda_n \\ a_N &= \text{Det}(\mathbf{E}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N \end{aligned}$$

不仅很容易计算, 而且它们与特征值之间有意义十分明确的关系。

在具体计算系数  $a_n$  之前, 先把子行列式的元素  $E_{n_i n_j}$  化成便于求解的形式。元素  $E_{n_i n_j}$  表明它是子行列式第  $i$  行和第  $j$  列的元素, 而下标  $n_i$  和  $n_j$  是表示它在原先矩阵中所处的行数和列数。利用展开式

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (8)$$

和

$$(n_i + n_j)^{2k} - (n_j - n_i)^{2k} = 2n_i n_j \sum_{t=0}^{k-1} \binom{2k}{2t+1} n_j^{2(k-1-t)} n_i^{2t} \quad (9)$$

可给出  $E_{n_i n_j}$  有关参数  $\alpha$  的级数展开式

$$E_{n_i n_j} = \frac{2\alpha^3}{\pi} B_{n_i n_j} \quad (10)$$

$$B_{n_i n_j} = n_i n_j \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^k \frac{1}{(2k+3)!} \left[ \sum_{t=0}^{k-1} \binom{2k+2}{2t+1} n_j^{2(k-t)} n_i^{2t} \right] \alpha^{2k} \quad (11)$$

$$\alpha = \pi D/H \quad (12)$$

现在, 考虑到参数  $\alpha$  正比于  $D/H$ , 在短阵情况  $D/H \ll 1$ , 忽略展开式 (11) 中所有关于  $\alpha$  的高幂次项, 只取  $k=0$  得项。最后, 在海底和海面反射系数均为  $-1$  的均匀波导条件下, 系数  $a_n$  为

$$\begin{aligned} a_n &= \left( \frac{2\alpha^3}{\pi} \right) \alpha^{2n(n-1)} \frac{1}{2^{3n}} \frac{1}{[1! 3! 5! \dots (2n-1)!]^2} \times \\ &\quad [1! 2! 3! \dots (n-1)!]^4 \left[ \frac{1!! 3!! 5!! \dots (2n-1)!!}{(2n+1)!! (2n+3)!! \dots (4n-1)!!} \right]^2 \times \\ &\quad \frac{(2N+2n)!(2N+2n-2)! \dots (2N+4)!(2N+2)!}{(2N-2n+1)!(2N-2n+3)! \dots (2N-3)!(2N-1)!} \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 特征值近似解

当参数  $\alpha = \pi D/H$  趋近于零时,  $a_n$  随着  $n$  迅速减小。这样, 由 (7) 式确定的特征值有下列近似解:

$$\lambda_1 = \alpha_1 \quad (14)$$

$$\lambda_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (15)$$

依据 (13) 式, 则特征值的近似解析表达式为

$$\lambda_1 = \frac{2\alpha^3}{\pi} \frac{1}{9} N(N+1) \left( N + \frac{1}{2} \right) \quad (16)$$

$$\lambda_n = \frac{2\alpha^3}{\pi} \frac{\alpha^{4(n-1)}}{2^3} \left[ \frac{(n-1)!^2 (2n-1)!!^2}{(2n-1)!(4n-3)!!(4n-1)!!} \right]^2 \frac{(2N+2n)!}{(2N-2n+1)!} \quad (17)$$

值得我们注意的是, (16) 和 (17) 式预言了两个有意思的结果:

(1)  $\lambda_n \propto \alpha^{4n-1}$ ,  $\alpha = \pi D/H$ , 它给出了特征值随参数  $D/H$  急剧下降的幂次关系;

(2)  $\lambda_n \propto \binom{2N+2n}{4n-1} C_n^N = \binom{2N+2n}{4n-1} = \frac{(2N+2n)!}{(2N-2n+1)!}$ , 其中  $C_n^N$  与  $n$  有形状如“山包”的关系。在  $n_M = (1/\sqrt{5})N + 0.4$  时,  $C_n^N$  出现最大值。表 1 给出  $C_n^N / (C_n^N)_{\max}$  的计算结果。特别是  $N$  较大时, 在  $n = n_M$  处, 可以清楚看到有最大的中央峰值, 两边都急剧下降。

事实上, 正是结果 (1) 中  $\lambda_n$  与  $\alpha^{4n-1}$  的幂次关系, 使得特征值阶数越高, 其值随  $\alpha$  幂次增大而急剧变小。这就是为什么短阵的声场简正波过滤不好, 为什么短阵的匹配场处理效果差的原因。另外, Yang<sup>[3]</sup> 提出的简正波分解本征矢量法, 他指出当某阶特征值小于前一阶达二个数量级时, 该阶及以后各阶简正波对声场的贡献可以忽略不计, 且归入“噪声空间”类。如果用结果 (1) 和 (2) 的结合, 我们很容易从理论上解释 Yang 对特征值舍取的缘由了。

应该指出, 在获取解析表达式 (16) 和 (17) 式的过程中, 我们作出了两个近似: 首先, 特征值  $\lambda_n$  看作是特征方程 (7) 式的系数  $a_n$  与  $a_{n-1}$  的比值, 这仅当  $a_n \ll a_{n-1}$ , 对  $n = 1, 2, \dots, N$  都成立时才正确。一般地说,  $a_1 \ll 1$  的条件并不满足, 故  $\lambda_1$  的误差最大。不过  $\lambda_1$  的误差大或不正确都是我们不关心的, 因为它总是很大。其次,  $a_n$  中只取它有关参数  $\alpha$  展开式中的最低幂次项, 即对 (11) 式取  $k = 0$  的近似。这时的解析解的适用范围尚有待讨论。表 2 给出  $N = 3$  时,  $\hat{\lambda}_n = a_n/a_{n-1}$  和真值  $\lambda_n$  的比较。从表 2 数据对比来看, 第一种近似至少在  $D/H \leq 0.35$  的范围内成立; 第二种近似情况讨论它产生的影响: 如果这种近似成立的话, 那么  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  分别正比于  $\alpha^3$ 、 $\alpha^7$  和  $\alpha^{11}$ , 而且两者的比值  $\lambda_1/\alpha^3$ 、 $\lambda_2/\alpha^7$  和  $\lambda_3/\alpha^{11}$  与  $\alpha$  无关。现从表 2 数据来看,  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  在整个  $D/H \leq 0.35$  范围内估计值和真值近似程度相当好, 而  $\lambda_1$  在  $D/H$  大值范围变差。实际上, 在许多问题中 (不仅仅是声源定位的简正波分解矩阵), 我们往往最感兴趣的是高阶特征值量级的估计。因为它会随参数  $D/H$  和  $n$  产生一个量级甚至多个量级的跳变, 使我们从  $\lambda_n$  的大小分布中, 估计出“信号空间”的大小, 确定该空间的维数。有关  $\lambda_n$  计算精度的讨论详见附录 A。

表 1  $C_n^N/(C_n^N)_{\max}$  的计算结果

| $n \backslash N$ | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     |
|------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1                | 0.853 | 0.414 | 0.147 | 0.043  | 0.011  | 2.8e-3 | 6.2e-4 | 1.3e-5 | 2.8e-5 | 5.6e-6 | 1.1e-6 |
| 2                | 0.341 | 0.886 | 0.969 | 0.678  | 0.359  | 0.156  | 0.059  | 0.020  | 6.3e-3 | 1.8e-3 | 5.0e-4 |
| 3                |       | 0.089 | 0.445 | 0.863  | 0.998  | 0.826  | 0.539  | 0.294  | 0.140  | 0.059  | 0.023  |
| 4                |       |       | 0.020 | 0.161  | 0.486  | 0.839  | 0.999  | 0.911  | 0.677  | 0.428  | 0.238  |
| 5                |       |       |       | 4.0e-3 | 0.048  | 0.209  | 0.503  | 0.814  | 0.988  | 0.959  | 0.780  |
| 6                |       |       |       |        | 7.5e-4 | 1.3e-2 | 0.075  | 0.024  | 0.507  | 0.790  | 0.971  |
| 7                |       |       |       |        |        | 1.4e-4 | 3.1e-3 | 2.3e-2 | 0.097  | 0.260  | 0.506  |
| 8                |       |       |       |        |        |        | 2.0e-5 | 7.0e-4 | 6.8e-3 | 0.035  | 0.115  |
| 9                |       |       |       |        |        |        |        | 4.2e-6 | 1.5e-4 | 1.8e-3 | 0.011  |
| 10               |       |       |       |        |        |        |        |        | 7.2e-7 | 3.2e-5 | 4.6e-4 |
| 11               |       |       |       |        |        |        |        |        |        | 1.2e-7 | 6.4e-6 |
| 12               |       |       |       |        |        |        |        |        |        |        | 2.0e-8 |

表 2  $N = 3$  时,  $\hat{\lambda}_n = a_n/a_{n-1}$  和真值  $\lambda_n$  的比较

| $D/H$ | $\lambda_1/\alpha^3$ | $\hat{\lambda}_1/\alpha^3$ | $\lambda_2/\alpha^7$ | $\hat{\lambda}_2/\alpha^7$ | $\lambda_3/\alpha^{11}$ | $\hat{\lambda}_3/\alpha^{11}$ |
|-------|----------------------|----------------------------|----------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| 0.000 | 2.970                | 2.970                      | 4.37e-2              | 4.436e-2                   | 2.222e-5                | 2.222e-5                      |
| 0.025 | 2.944                | 2.944                      | 4.37e-2              | 4.436e-2                   | 2.225e-5                | 2.225e-5                      |
| 0.050 | 2.871                | 2.871                      | 4.38e-2              | 4.436e-2                   | 2.231e-5                | 2.231e-5                      |
| 0.075 | 2.747                | 2.747                      | 4.39e-2              | 4.436e-2                   | 2.251e-5                | 2.251e-5                      |
| 0.100 | 2.591                | 2.591                      | 4.41 e-2             | 4.439e-2                   | 2.270e-5                | 2.270e-5                      |
| 0.125 | 2.464                | 2.464                      | 4.43e-2              | 4.430e-2                   | 2.298e-5                | 2.298e-5                      |
| 0.150 | 2.270                | 2.273                      | 4.45e-2              | 4.427e-2                   | 2.333e-5                | 2.333e-5                      |
| 0.175 | 1.964                | 1.967                      | 4.46e-2              | 4.456e-2                   | 2.371e-5                | 2.371e-5                      |
| 0.200 | 1.737                | 1.741                      | 4.47e-2              | 4.456e-2                   | 2.419e-5                | 2.419e-5                      |
| 0.225 | 1.518                | 1.531                      | 4.47e-2              | 4.425e-2                   | 2.473e-5                | 2.473e-5                      |
| 0.250 | 1.311                | 1.331                      | 4.44e-2              | 4.393e-2                   | 2.534e-5                | 2.534e-5                      |
| 0.275 | 1.124                | 1.146                      | 4.39e-2              | 4.297e-2                   | 2.604e-5                | 2.604e-5                      |
| 0.300 | 0.955                | 0.987                      | 4.30e-2              | 4.170e-2                   | 2.681e-5                | 2.681e-5                      |
| 0.325 | 0.805                | 0.850                      | 4.17e-2              | 3.947e-2                   | 2.760e-5                | 2.763e-5                      |
| 0.350 | 0.678                | 0.738                      | 3.99e-2              | 3.692e-2                   | 2.849e-5                | 2.852e-5                      |

4 海中短阵

前面我们已给出垂直阵的一端与海面(或海底)重合的情况,本节将讨论垂直阵中点与海深  $H/2$  面重合的另一种情况,称它为海中短阵。这时,简正波分解矩阵的元素  $E_{nn'}$  为

$$E_{nn'} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{n-n'} \left\{ \sin \left[ (n-n')\pi \left( \frac{H}{2} + \frac{D}{2} \right) / H \right] - \sin \left[ (n-n')\pi \left( \frac{H}{2} - \frac{D}{2} \right) / H \right] \right\} - \right. \\ \left. \frac{1}{n+n'} \left\{ \sin \left[ (n+n')\pi \left( \frac{H}{2} + \frac{D}{2} \right) / H \right] - \sin \left[ (n+n')\pi \left( \frac{H}{2} - \frac{D}{2} \right) / H \right] \right\} \right\} \tag{18}$$

或写成

$$E_{nn'} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left\{ (-1)^{\frac{n-n'}{2}} \frac{2}{n-n'} \sin \left[ \frac{(n-n')\pi D}{2H} \right] - (-1)^{\frac{n+n'}{2}} \frac{2}{n+n'} \sin \left[ \frac{(n+n')\pi D}{2H} \right] \right\} & n-n' = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots \\ 0 & n-n' = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \cdots \end{cases} \tag{19}$$

由 (19) 式可知，行列差为奇数的元素都等于零。通过列与列之间互换，简正波分解矩阵可变成分块对角行列式，它的特征值方程变为两个方程，两组特征值（详见附录 B）为：

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\alpha}{\pi} \alpha^{4(n-1)} 2^{-2(n-1)} \left[ \frac{(2n-3)!!(n-1)!}{(4n-5)!!(4n-3)!!} \right]^2 \frac{(2N_1+2n-2)!}{(2N_1-2n+1)!}$$

(20)

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\alpha^3}{\pi} \alpha^{4(n-1)} 2^{-2n} \left[ \frac{(2n-1)!!(n-1)!}{(4n-3)!!(4n-1)!!} \right]^2 \frac{(2N_2+2n)!}{(2N_2-2n+1)!}$$

(21)

其中当  $N$  为偶数时， $N_1 = N_2 = N/2$ ；而当  $N$  为奇数时， $N_1 = (N+1)/2$ ,  $N_2 = (N-1)/2$ 。若我们按特征值序次重新排列（ $\alpha$  取小值）时，有  $\lambda_{2n-1} = \lambda_n^{(1)}$ ,  $\lambda_{2n} = \lambda_n^{(2)}$ 。并统一为一个表达式，

$$\lambda_k = \frac{\alpha^{2k-1}}{\pi} 2^{-2k+2} \left[ \frac{(k-1)!}{(2k-3)!!(2k-1)!!} \right]^2 \frac{(N_k^*+k)!}{(N_k^*-k+1)!}$$

(22)

其中

$$N_k^* = N - \frac{1}{2} [1 - (-1)^{N+k}]$$

(23)

注意 (22) 式和 (17) 式的比较，它反映了海中短阵和海面短阵的差异：

- (1) 与  $\alpha$  的关系，由海面短阵  $\lambda_n \propto \alpha^{4n-1}$  变到海中短阵  $\lambda_n \propto \alpha^{2n-1}$ ；
- (2) 特征值系数关系，大致服从海面短阵的  $N$  和  $n$  变为海中短阵的  $2N$  和  $2n$ 。

这种差异，特别是 (1)，能用来解释海中短阵过滤声场简正波的效果将优于海面短阵。表 3 是海中短阵特征值近似解；而表 4 是海面短阵特征值近似解。图 1 和图 2 分别是两种短阵特征值与阵长海深比  $D/H$  的关系，取  $N = 3, 5, 8$ 。同样说明海中短阵分解简正波的潜在优势。

表 3 海中短阵特征值近似解

| $N$ | $\lambda_1/\alpha$ | $\lambda_2/\alpha^3$ | $\lambda_3/\alpha^5$ | $\lambda_4/\alpha^7$ | $\lambda_5/\alpha^9$ | $\lambda_6/\alpha^{11}$ | $\lambda_7/\alpha^{13}$ | $\lambda_8/\alpha^{15}$ | $\lambda_9/\alpha^{17}$ | $\lambda_{10}/\alpha^{19}$ |
|-----|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1   | 0.637              |                      |                      |                      |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 2   | 0.637              | 0.212                |                      |                      |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 3   | 1.273              | 0.212                | 0.0283               |                      |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 4   | 1.273              | 1.061                | 0.0283               | 2.91e-3              |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 5   | 1.910              | 1.061                | 0.264                | 2.91e-3              | 2.64e-4              |                         |                         |                         |                         |                            |
| 6   | 1.910              | 2.971                | 0.264                | 4.37e-2              | 2.64e-4              | 2.22e-5                 |                         |                         |                         |                            |
| 7   | 2.546              | 2.971                | 1.188                | 4.37e-2              | 5.81e-3              | 2.22e-5                 | 1.78e-6                 |                         |                         |                            |
| 8   | 2.546              | 6.366                | 1.188                | 0.288                | 5.81e-3              | 6.74e-4                 | 1.78e-6                 | 1.37e-7                 |                         |                            |
| 9   | 3.183              | 6.366                | 3.735                | 0.288                | 5.28e-2              | 6.74e-4                 | 7.12e-5                 | 1.37e-7                 | 1.04e-8                 |                            |
| 10  | 3.183              | 11.67                | 3.735                | 1.250                | 5.28e-2              | 8.09e-3                 | 7.12e-5                 | 7.02e-6                 | 1.04e-8                 | 7.64e-10                   |
| 11  | 3.820              | 11.67                | 9.441                | 1.250                | 0.302                | 8.09e-3                 | 1.09e-3                 | 7.02e-6                 | 6.56e-7                 | 7.64e-10                   |
| 12  | 3.820              | 19.31                | 9.441                | 4.162                | 0.302                | 5.89e-2                 | 1.09e-3                 | 1.33e-4                 | 6.56e-7                 | 5.88e-8                    |
| 13  | 4.456              | 19.31                | 20.60                | 4.162                | 1.283                | 5.89e-2                 | 9.86e-3                 | 1.33e-4                 | 1.52e-5                 | 5.88e-8                    |
| 14  | 4.456              | 29.71                | 20.60                | 11.58                | 1.283                | 0.311                   | 9.86e-3                 | 1.47e-3                 | 1.52e-5                 | 1.62e-6                    |
| 15  | 5.093              | 29.71                | 40.40                | 11.58                | 4.434                | 0.311                   | 0.0632                  | 1.47e-3                 | 1.99e-4                 | 1.62e-6                    |
| 16  | 5.093              | 43.29                | 40.40                | 28.2                 | 4.434                | 1.306                   | 0.0632                  | 0.0112                  | 1.99e-4                 | 2.51e-5                    |

表 4 海面短阵特征值近似解

| $N$ | $\lambda_1/\alpha$ | $\lambda_2/\alpha^3$ | $\lambda_3/\alpha^5$ | $\lambda_4/\alpha^7$ | $\lambda_5/\alpha^9$ | $\lambda_6/\alpha^{11}$ | $\lambda_7/\alpha^{13}$ | $\lambda_8/\alpha^{15}$ | $\lambda_9/\alpha^{17}$ | $\lambda_{10}/\alpha^{19}$ |
|-----|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1   | 0.637              |                      |                      |                      |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 2   | 0.637              | 0.212                |                      |                      |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 3   | 1.273              | 0.212                | 0.0283               |                      |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 4   | 1.273              | 1.061                | 0.0283               | 2.91e-3              |                      |                         |                         |                         |                         |                            |
| 5   | 1.91               | 1.061                | 0.246                | 2.91e-3              | 2.64e-4              |                         |                         |                         |                         |                            |
| 6   | 1.91               | 2.971                | 0.246                | 4.37e-2              | 2.64e-4              | 2.22e-5                 |                         |                         |                         |                            |
| 7   | 2.546              | 2.971                | 1.188                | 4.37e-2              | 5.81e-3              | 2.22e-5                 | 1.78e-6                 |                         |                         |                            |
| 8   | 2.546              | 6.37                 | 1.188                | 0.288                | 5.81e-3              | 6.74e-4                 | 1.78e-6                 | 1.37e-7                 |                         |                            |
| 9   | 3.183              | 6.37                 | 3.735                | 0.288                | 5.28e-2              | 6.74e-4                 | 7.12e-5                 | 1.37e-7                 | 1.04e-8                 |                            |
| 10  | 3.183              | 11.67                | 3.735                | 1.25                 | 5.28e-2              | 8.09e-3                 | 7.12e-5                 | 7.02e-6                 | 1.04e-8                 | 7.64e-10                   |
| 11  | 3.82               | 11.67                | 9.441                | 1.25                 | 0.302                | 8.09e-3                 | 1.09e-3                 | 7.02e-6                 | 6.56e-7                 | 7.64e-10                   |
| 12  | 3.82               | 19.31                | 9.441                | 4.16                 | 0.302                | 5.89e-2                 | 1.09e-3                 | 1.33e-4                 | 6.56e-7                 | 5.88e-8                    |
| 13  | 4.456              | 19.31                | 20.6                 | 4.16                 | 1.28                 | 5.89e-2                 | 9.86e-3                 | 1.33e-4                 | 1.52e-5                 | 5.88e-8                    |
| 14  | 4.456              | 29.71                | 20.6                 | 11.58                | 1.28                 | 0.311                   | 9.86e-3                 | 1.47e-3                 | 1.52e-5                 | 1.62e-6                    |
| 15  | 5.093              | 29.71                | 40.4                 | 11.58                | 4.43                 | 0.311                   | 0.0632                  | 1.47e-3                 | 1.99e-4                 | 1.62e-6                    |
| 16  | 5.093              | 43.29                | 40.4                 | 28.2                 | 4.43                 | 1.31                    | 0.0632                  | 0.0112                  | 1.99e-4                 | 2.51e-5                    |

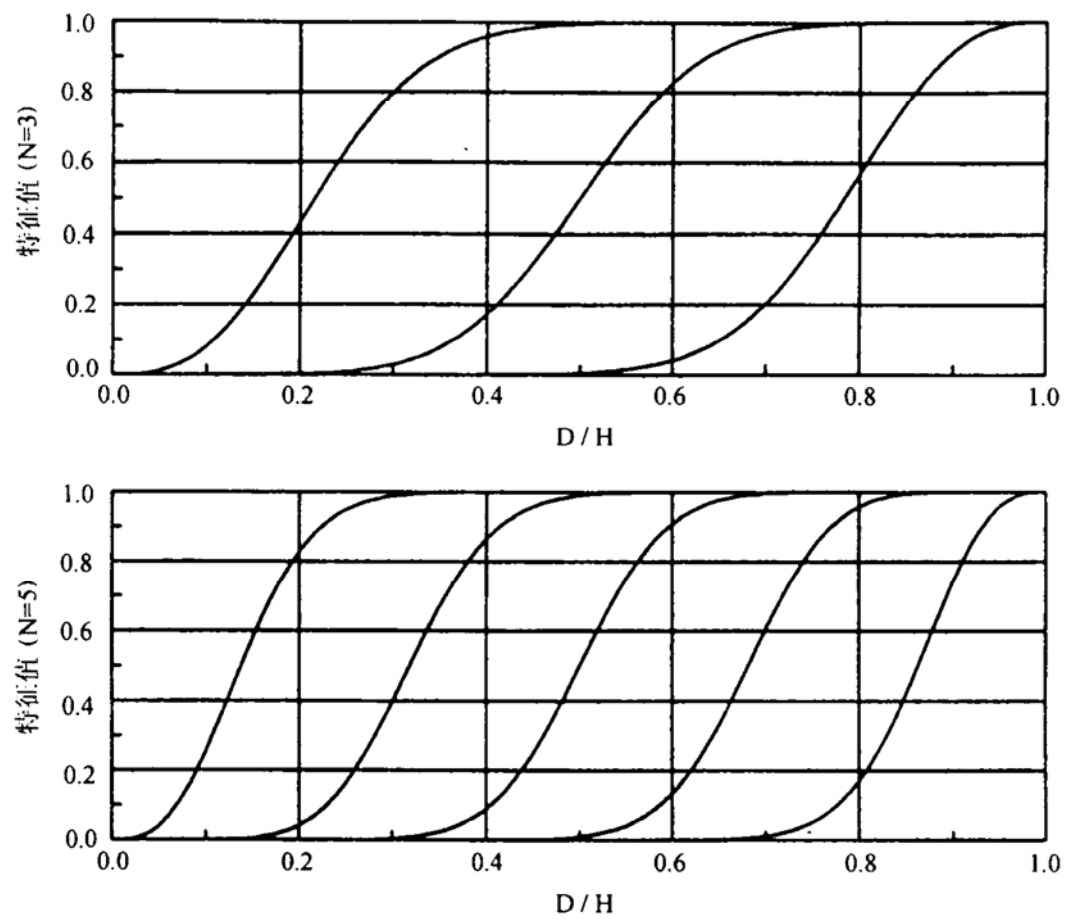


图 1

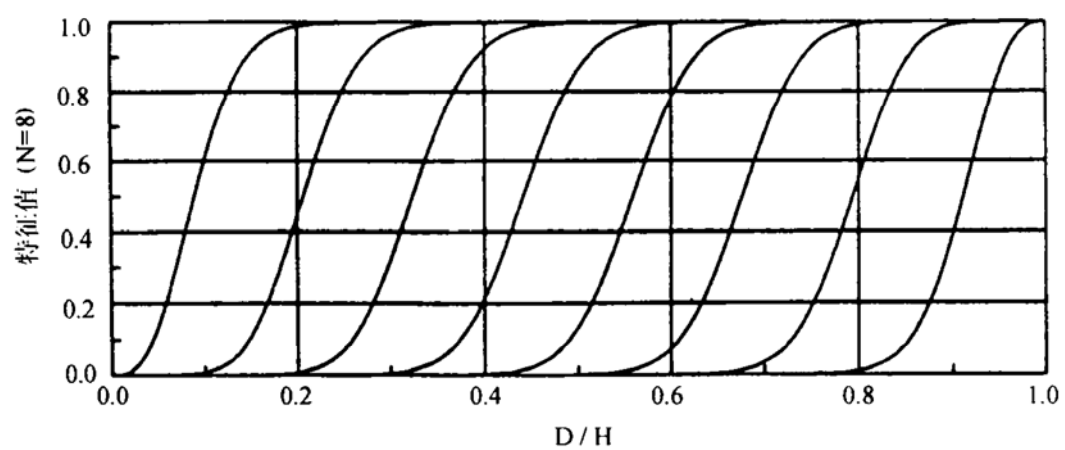


图 1 海面短阵的  $\lambda_n$  和  $D/H$  的关系

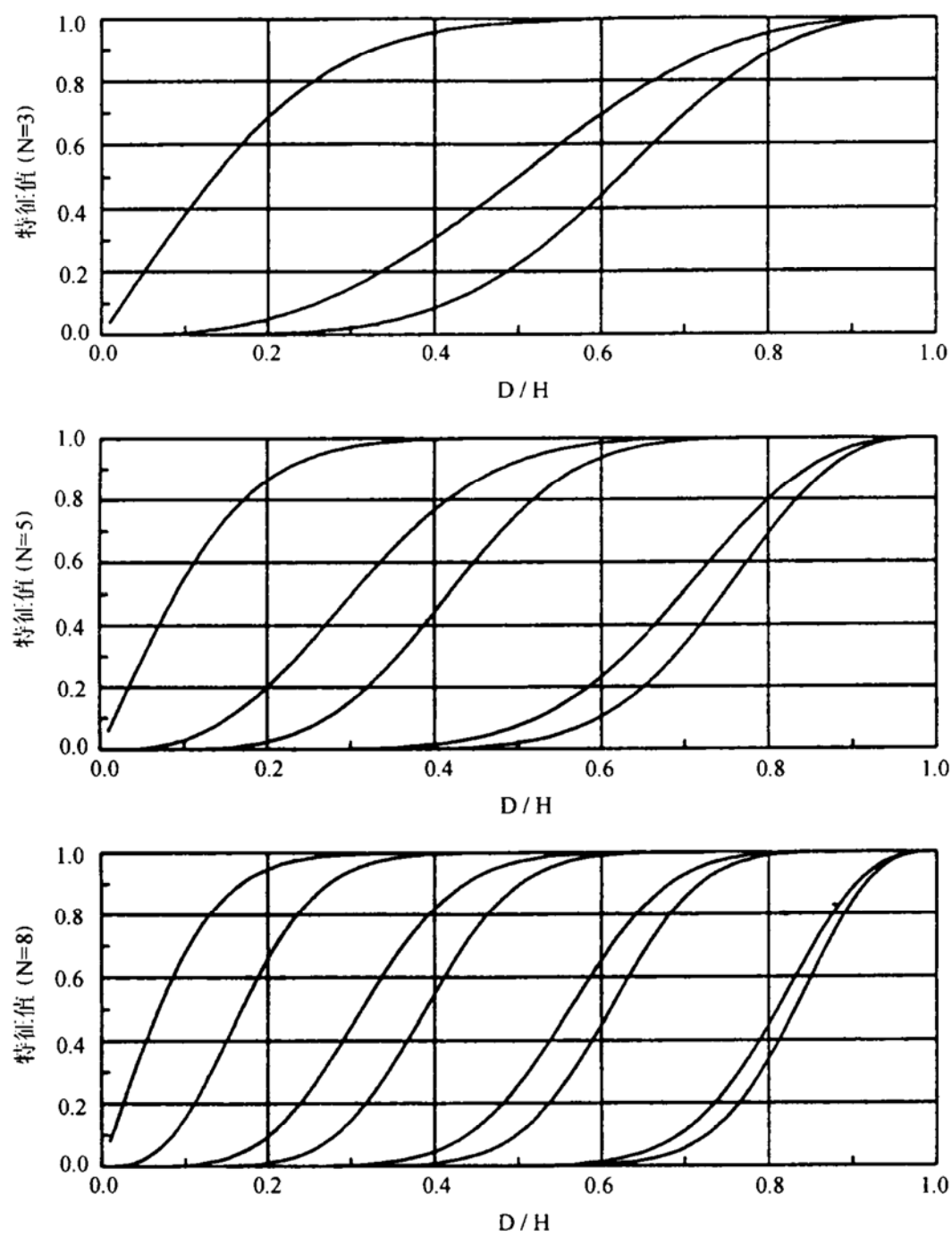


图 2 海中短阵的  $\lambda_n$  和  $D/H$  的关系

## 5 结论

本文的中心问题是求解简正波分解矩阵  $E$  的特征值方程 (7) 式。在  $a_n \ll a_{n-1}$  条件下, 得到  $\lambda_n = a_n/a_{n-1}$  的近似式, 即 (17) 式。事实上, 使我们最感兴趣的是该式的结果及其分析: 它有两个主要特点, 即  $\lambda_n \propto \alpha^{4n-1}$  和  $\lambda_n \propto \left( \frac{2N+2n}{4n-1} \right)$ 。正因为  $\lambda_n$  与  $\alpha$  有如此明确的解析关系,

使我们非常直观地了解短阵垂直阵对声场简正波分解能力的退化, 以及为什么短阵的声源定位场匹配处理效果差的真正原因。另外, 有意思的是, 当我们推导海中短阵情况时, 有  $\lambda_n \propto \alpha^{2n-1}$ ; 比较图 2 和图 1 两种情况说明, 若我们合理选择短阵在海中的吊放深度, 将有可能提高它分解声场简正波的能力, 从而提高声源定位的精度。

(17) 式有两项近似, 第一个近似  $\lambda_n = a_n/a_{n-1}$ , 它对短阵是满足的; 第二个近似是忽略  $\alpha^2$  的高幂次项, 附录 A 指出, 当  $D/H < 0.12$  时, 也不会产生很大的甚至量级的误差。

最后, 尽管本文理论推导的前提是理想波导, 即海底和海面反射系数都等于  $-1$  的均匀声道模型, 对简正波分解矩阵特征值特性的讨论, 将有助于我们建立特征值与声场简正波分解及声源定位精度之间的联系。这种分析特征值特性的方法, 亦可推广应用到自动决策和目标识别等领域。

## 参 考 文 献

- 1 SHANG E C. Source depth estimation in waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1985; **78**: 172—175
- 2 SHANG E C. An efficient high-resolution method of source localization processing in mode space. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989; **86**: 1960—1964
- 3 YANG T C. A method of range and depth estimation by modal decomposition. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987; **82**: 1736—1745
- 4 Wilson G R, Koch R A, Vidmar P J. Matched mode localization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988; **84**(1): 310—320
- 5 Yang T C. Effectiveness of mode filtering: A comparison of matched-field and matched-mode processing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1990; **87**: 2072—2084
- 6 Bogart C W, Yang T C. Source localization with horizontal arrays in shallow water: Spatial sampling and effective aperture. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994; **96**: 1677—1786
- 7 马 力. 浅海中水平阵的匹配定位. 声学学报, 1996; **21**(4 增刊): 457—463
- 8 高天赋, 陈耀明, 杨怡青. 一种简正波分解快速迭代新方法. 93 年全国水声学术会议, 1993
- 9 高天赋, 陈耀明, 杨怡青. 短垂直阵简正波匹配的声源定位. 声学学报, 1996; **21**(4 增刊): 493—505
- 10 GAO Tianfu, CHEN Yaoming, YANG Yiqing. Source localization for the matched-mode processing by a short vertical array. *Chinese Journal of Acoustics*, 1996; **15**(2): 157—167
- 11 陈耀明, 高天赋, 杨怡青. 浅海短垂直阵和稀垂直阵声源定位性能. 声学学报, 1996; **21**(6): 912—921
- 12 CHEN Yaoming, GAO Tianfu, YANG Yiqing. Mode decomposition and source localization performance for the short vertical array in shallow water. *Chinese Journal of Acoustics*, 1997; **16**(2): 172—179. 北京国际浅海声学会议, 1997; **8**(2): 110
- 13 尚尔昌, 高天赋. 过滤简正波的若干理论问题. 海洋学报, 1986; **8**(3): 375—386

## 附录 A 关于 $\lambda_n$ 的计算精度

由  $\sin(x)$  的展开

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (\text{A1})$$

如果  $k = 10$ , 那么不会产生大于  $(1/21!)x^{21}$  的误差。在矩阵  $E$  中, 最大的正弦余量是  $x = 2N\alpha$ , 故展开式的最大误差为

$$\varepsilon = \frac{1}{(2N+1)!} (2N)^{2N+1} \alpha^{2N+1} \quad (\text{A2})$$

由斯特令渐近展开  $(2N+1)! = \sqrt{2\pi}(2N+1)^{2N+\frac{1}{2}} e^{-(2N+1)}$ , 有

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2N+1)} e^{2N} \alpha^{2N+1} \quad (\text{A3})$$

当  $e\alpha < 1$ , 即当  $D/H < (1/\pi e) = 0.12$  时, 不会使最终结果产生大的误差。

另外, 当  $N$  取很大数, 同时  $\alpha$  取小值, 由于矩阵行与行之间相关性很强的行列式接近零, 使得对计算机的精度要求很高。例如  $N = 50$ ,  $\alpha = \pi D/H = 0.2$ , 则矩阵  $E$  给出的行列式 (13) 式有

$$a_N = e^{C/12} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{4}} N^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{N(2N+1)} 2^{2N} \quad (\text{A4})$$

其中  $C = 0.5722$ , 为欧勒数。最后有  $a_{50} = 5 \times 10^{-5021}$ 。这要求计算机的位数为 16677 时才能得到有用的结果。因为行列式的计算中出现相减运算, 在行列式每个元素接近 1, 而终值都是极小数时, 对计算机的精度要求极高。一般情况下, 不能得到短阵高阶特征值的正确结果。

## 附录 B 海中短阵的 $\lambda_n^{(1)}$ 和 $\lambda_n^{(2)}$

由 (18) 或 (19) 式可知, 简正波分解矩阵的元素的行列差为奇数时, 该元素为零。特征值方程变成如下形式 (取  $N = 5$ ):

$$\begin{vmatrix} E_{11} - \lambda & 0 & E_{13} & 0 & E_{15} \\ 0 & E_{22} - \lambda & 0 & E_{24} & 0 \\ E_{31} & 0 & E_{33} - \lambda & 0 & E_{35} \\ 0 & E_{42} & 0 & E_{44} - \lambda & 0 \\ E_{51} & 0 & E_{53} & 0 & E_{55} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B1})$$

通过列与列之间的互换, 上式矩阵变为分块对角行列式

$$\begin{vmatrix} E_{11} - \lambda & E_{13} & E_{15} & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{33} - \lambda & E_{35} & 0 & 0 \\ E_{51} & E_{53} & E_{55} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{22} - \lambda & E_{24} \\ 0 & 0 & 0 & E_{42} & E_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B2})$$

于是, 特征值方程分成两个方程:

$$\begin{vmatrix} E_{11} - \lambda & E_{13} & E_{15} \\ E_{31} & E_{33} - \lambda & E_{35} \\ E_{51} & E_{53} & E_{55} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B3})$$

和

$$\begin{vmatrix} E_{22} - \lambda & E_{24} \\ E_{42} & E_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B4})$$

分别得到两组特征值  $\lambda_n^{(1)}$  和  $\lambda_n^{(2)}$ 。注意, 当 (B1) 中行列式阶数  $N$  为偶数时, (B3) 和 (B4) 的阶数相等; 而  $N$  为奇数时, 前者比后者高一阶。 (B4) 式中的元素  $E_{ij}^{(2)}$ ,  $i = n/2, j = n'/2$ , 有

$$E_{ij}^{(2)} = (-1)^{i-j} \frac{D}{H} \left\{ \frac{\sin[(i-j)\pi D/H]}{(i-j)\pi D/H} - \frac{\sin[(i+j)\pi D/H]}{(i+j)\pi D/H} \right\} \quad (\text{B5})$$

与正文 (6) 式相比, 仅差因子  $(-1)^{i-j}$ 。事实上, 该因子不改变特征值方程和特征值。 (B5) 式的特征值  $\lambda_n^{(2)}$  与 (17) 式有相似的结果, 仅把式中的  $N$  换成  $N_2$ 。当  $N$  为偶数时,  $N_2 = N/2$ ; 当  $N$  为奇数时,  $N_2 = (N-1)/2$ 。

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\alpha^3}{\pi} \alpha^{4(n-1)} 2^{-2n} \left[ \frac{(2n-1)!!(n-1)!}{(4n-3)!!(4n-1)!!} \right]^2 \frac{(2N_2+2n)!}{(2N_2-2n+1)!} \quad (\text{B6})$$

同样, 由 (18) 式得到 (B3) 式中的元素  $E_{ij}^{(1)}$ ,  $i = (n+1)/2, j = (n'+1)/2$ , 有

$$E_{ij}^{(1)} = (-1)^{i-j} \frac{D}{H} \left\{ \frac{\sin[(i-j)\pi D/H]}{(i-j)\pi D/H} - \frac{\sin[(i+j-1)\pi D/H]}{(i+j-1)\pi D/H} \right\} \quad (\text{B7})$$

利用  $\sin x$  的展开式, 写成与 (10) 和 (12) 式略有不同的形式:

$$E_{n_i n_j}^{(1)} = \frac{2\alpha}{\pi} C_{n_i n_j} \quad (\text{B8})$$

$$C_{n_i n_j} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \left[ \sum_{t=0}^k \binom{2k}{2t} \left(n_j - \frac{1}{2}\right)^{2k-2t} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{2t} \right] \alpha^{2k} \quad (\text{B9})$$

由于  $(-1)^{i-j}$  因子对特征值没有影响, 在上式中已去掉。利用展开式

$$(n_i - n_j)^{2k} + (n_i + n_j - 1)^{2k} = 2 \sum_{t=0}^k \binom{2k}{2t} \left(n_j - \frac{1}{2}\right)^{2k-2t} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{2t} \quad (\text{B10})$$

经运算得到特征值方程中的系数  $a_n$

$$a_n = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^n \alpha^{2n(n-1)} \frac{1}{2^{n(2n-1)}} \left[ \frac{1!2!3!\cdots(n-1)!}{(2n-1)!!(2n-2)!!\cdots(4n-3)!!} \right]^2 \times \frac{(2N_1)!(2N_1+2)!\cdots(2N_1+2n-2)!}{(2N_1-1)!(2N_1-3)!\cdots(2N_1-2n+1)!} \quad (\text{B11})$$

再作 (15) 式近似, 特征值的近似解为

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\alpha}{\pi} \alpha^{4(n-1)} 2^{-2(n-1)} \left[ \frac{(2n-3)!!(n-1)!}{(4n-5)!!(4n-3)!!} \right]^2 \frac{(2N_2+2n-2)!}{(2N_2-2n+1)!} \quad (\text{B12})$$

其中  $N_1$  是 (B3) 式行列式的阶数, 与 (B1) 矩阵阶数  $N$  的关系是: 当  $N$  为偶数时,  $N_1 = N/2$ ; 而当  $N$  为奇数时,  $N_1 = (N+1)/2$ 。