

复杂形状封闭薄壳内部存在散射体时的内部散射声场计算^{*}

吴九汇 陈花玲 黄协清

(西安交通大学振动与噪声控制工程研究所 西安 710049)

1999 年 12 月 27 日收到

2000 年 2 月 25 日定稿

摘要 基于覆盖域的思想和方法, 本文给出了复杂形状封闭薄壳在内部存在散射体时的内部散射声场计算表达式。研究结果表明, 该内部散射声场可表示为封闭薄壳的内部散射声场和这些散射体的外部散射声场之和的形式。最后用数值分析验证了该结论的正确性。

PACS 数: 43.20

A method for calculating interior scattered sound field by shell and its interior scatterers

WU Jiuhui CHEN Hualing HUANG Xieqing

(Institute of Vibration & Noise Control Engineering Xi'an JiaoTong University Xi'an 710049)

Received Dec. 27, 1999

Revised Feb. 25, 2000

Abstract Based on the covering-domain method, an expression for calculating the interior scattering sound field of an arbitrary-shaped closed thin shell in which there are some scatterers. The conclusion can be obtained that the interior scattering sound field can be expressed as the superposition of the interior scattering sound field of the arbitrary-shaped closed thin shell and the external scattering sound fields of these scatterers. At last the conclusion is verified by the corresponding numerical calculations.

引言

在现代车身设计中, 车内声学 and 振动舒适性已成为重要设计指标之一。对结构振动与内腔噪声耦合的研究是降低汽车内腔噪声, 特别是低频噪声的重要手段, 它是声场优化、车身结构动力修改和声学 CAD 的基础。

在文献 1 中作者提出一种新的求解任意形状封闭薄壳内部散射声场方法, 即覆盖域法。应用该方法可以求出如汽车车身等这类复杂形状封闭薄壳的内部散射声场。

散射声场的求解在声学互易原理的应用中是很

关键的。如果已知弹性物体表面的散射声场, 那么就可以根据声学互易原理求出弹性物体在外力作用下的辐射声场, 从而可以解决声振耦合问题。

为了更好地研究汽车内腔噪声, 有必要进一步对汽车驾驶室内座位和人对汽车内腔噪声分布的影响加以研究。为此本文研究了复杂形状封闭薄壳在内部存在散射体时的内部散射声场计算问题, 为车身低频声振设计奠定了理论基础。

1 覆盖域方法的基本原理

覆盖的定义是这样的: 设弹性体 A 和 B 分别与一坐标系固结, 当两个坐标系重合时, 若任一点 $M \in A$, 均有 $M \in B$, 则称 B 覆盖 A。

^{*} 国家自然科学基金和西安交通大学研究生院博士学位论文基金资助

一般情况下, 对于复杂形状封闭壳体, 其边界 C 总可以由 n 片球面 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 来拟合。为了求封闭壳体 A 内部声场, 作 n 个 A 的覆盖球壳 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$, 其中 A_k 覆盖 A 且仅有部分边界与 C_k 重合。球壳 A_k 壁厚与球面 C_k 壁厚相同。显然, A_k 的共同区域即是封闭壳体所占区域。

尽管复杂形状封闭薄壳内部声场难以直接求得, 但简单球壳内部声场容易求得。覆盖域方法的基本思想是将复杂形状封闭薄壳内部散射声场的求解问题转化为一列简单球壳内部散射声场的迭加问题, 即封闭壳体的内部散射声场可表达为:

$$P_S(r) = \sum_{k=1}^n P_S^{(k)}(r), \quad (1)$$

式中, $P_S^{(k)}(r)$ 为第 k 个覆盖球壳在内部一点 r 处的散射声场。

由文献 1, 当在封闭薄球壳内部点 $r_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 处存在一单位强度点声源时, 其内部任一点 $r(r, \theta, \varphi)$ 处的散射声压可表示为:

$$P_S(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

其中:

$$C_n = \frac{b_{n1}}{a_{n2}} \frac{i\omega}{4\pi c} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$P_n^m(\cos \theta_0) e^{-im\varphi_0} j_n(kr_0),$$

$$a_{n2} = -a_{n1} \frac{j_n'(kR)}{\rho c \omega} + b_n j_n(kR),$$

$$a_{n1} = a_n + b_n \frac{h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} \omega \rho c,$$

$$b_{n1} = \frac{a_{n1}}{c} h_n^{(1)'}(kR) - b_n \omega \rho h_n^{(1)}(kR),$$

$$a_n = -\varepsilon n^3(n+1)^3 + \gamma_1 n^2(n+1)^2 - \gamma_2 n(n+1) + \gamma_3,$$

$$b_n = \frac{(1-\mu^2)R^2}{Eh} [-n(n+1) + (1-\mu) + k_t(kR)^2] [1 - \varepsilon K_S(-n(n+1) + (1-\mu) + k_r(kR)^2)],$$

$$\varepsilon = \frac{h^2}{12R^2}, \quad k_t = 1 + \varepsilon,$$

$$k_r = 1 + \frac{3h^2}{20R^2}, \quad K_S = \frac{2k_s}{1-\mu},$$

$$\gamma_1 = \varepsilon[3-\mu-2(1+\mu)k_s] + \varepsilon[k_t + k_r + k_t K_S](kR)^2,$$

$$\gamma_2 = 1 - \mu^2 - k_t(kR)^2 + 2\varepsilon[1-\mu-(3+2\mu-\mu^2)k_s] + \varepsilon[(1-\mu)k_t + 2k_r - 2(1+\mu)k_r k_s - 4\mu k_t K_S](kR)^2 + \varepsilon k_t[k_r + (k_t + k_r)K_S](kR)^2 \omega^2,$$

$$\gamma_3 = [2(1-\mu^2) + (1+3\mu)k_t(kR)^2 - k_t^2(kR)^2 \omega^2] - 4\varepsilon(1-\mu^2)k_s - 2\varepsilon k_s[(1+3\mu)k_t + 2(1+\mu)k_r](kR)^2 + \varepsilon k_t[2k_t k_s - (1+3\mu)k_r K_S](kR)^2 \omega^2 + \varepsilon k_t^2 k_r K_S(kR)^2 \omega^4,$$

$$W = -[1 - \varepsilon K_S(\nabla^2 + 1 - \mu + k_r(kR)^2)]H,$$

$$H = \frac{(1-\mu^2)R^2}{Eh} (\nabla^2 + 1 - \mu + k_t(kR)^2)(P_1 - P_2),$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

式中, 波数 $k = \omega/c$, c 为声速, $j_n(\cdot)$ 为球 Bessel 函数; $P_n^m(\cdot)$ 为第一类连带 Legendre 函数, ' 表示求导数, h 为球壳厚度, R 为封闭球壳半径, μ 为泊松比, k_s 为平均剪切系数, i 为虚数单位; ω 为圆频率, ρ 为空气介质密度。

2 复杂形状封闭薄壳内存在散射体时的内部散射声场分析

如图 1 所示, 复杂形状封闭薄壳的边界曲面为 S , 其内部存在 n 个散射体 $B_1, B_2, \dots, B_n$, 图中 B 为除去这 n 个散射体所占区域后的封闭薄壳内部区域。现在需要计算区域 B 内的散射声场。

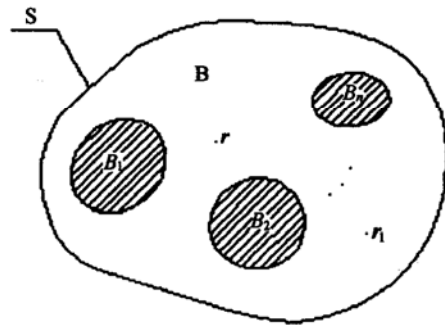


图 1 封闭壳体内部存在散射体时的内部散射声场计算

设曲面 S 可由 m 片球面 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 来拟合, 相应的 m 个覆盖球壳将覆盖整个封闭壳体。当内部存在几个散射体时, 我们可以认为区域 B 是封闭薄壳 S 的内部区域和这 n 个散射体的外部区域的交集。因而当在区域 B 内点 r_1 处存在一单位强度点声源时, 其内部任一点 r 处的散射声压可表示为:

$$P_S^{(B)}(r, r_1) = \sum_{j=1}^m P_S^{(j)}(r, r_1) + \sum_{i=1}^n P_{Si}(r, r_1), \quad (3)$$

式中, $P_S^{(j)}(r, r_1)$ 为边界曲面 S 的第 j 个覆盖球壳的内部散射声场, $P_{Si}(r, r_1)$ 为第 i 个散射体的外部散射声场。

3 数值验证

为了检验公式 (3) 的正确性, 我们分别用常规理论方法和公式 (3) 计算了封闭薄球壳内部存在两个实心球体时的内部散射声场。

如图 2 所示, 半径为 R 的封闭薄球壳内部存在两个半径分别为 a_1 和 a_2 的实心球体, 其球心位置分别在点 $O_1(r_1, \theta_1, \varepsilon_1)$ 和点 $O_2(r_2, \theta_2, \varepsilon_2)$ 。点 O_1 和 O_2 到球壳内任一点 $r(r, \theta, \varphi)$ 的距离分别为 R_1 和 R_2 。点 O_1 和 O_2 之间的距离为 b 。

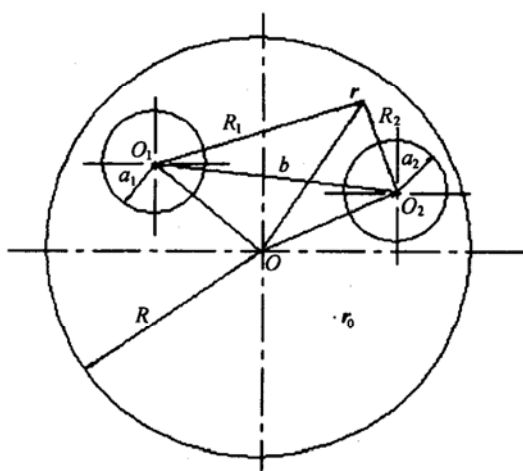


图 2 封闭薄球壳内部存在两个实心球体的情况

3.1 采用常规理论方法

当在球壳内部点 $r_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 处存在一单位强度点声源, 这时设球壳内部声场为 $P_1(r, r_0)$, 球壳外部声场为 $P_2(r, r_0)$ 。其中:

$$P_1(r, r_0) = P_0(r, r_0) + P_S(r, r_0) + P_{S1}(r, r_0) + P_{S2}(r, r_0),$$

式中 $P_S(r, r_0)$ 为由球壳产生的部分散射声场, $P_{S1}(r, r_0)$ 和 $P_{S2}(r, r_0)$ 分别为实心球体 O_1 和 O_2 产生的部分散射声场, $P_0(r, r_0)$ 为单位强度点声源产生的自由声场, 其表达式为:

$$P_0(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i\omega\rho}{4\pi} (2n+1)k \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta_0) e^{im(\varphi-\varphi_0)} j_n(kr_<) h_n^{(1)}(kr_>) e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

其中 $r_>$ 和 $r_<$ 分别表示 r 和 r_0 中的较大者及较小者, $h_n^{(1)}(\cdot)$ 为第一类球 Hankel 函数。

这里可设:

$$P_{S1}(r, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n h_n^{(1)}(kR_1) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

$$P_S(r, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n j_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (6)$$

$$P_{S2}(r, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n h_n^{(1)}(kR_2) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (7)$$

$$P_2(r, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_n h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (8)$$

根据文献 2, 球壳径向位移 w 满足下列 6 阶方程:

$$\varepsilon \nabla^6 w + \gamma_1 \nabla^4 w + \gamma_2 \nabla^2 w + \gamma_3 w + W = 0, \quad (9)$$

式中 ε 、 γ_1 、 γ_2 、 γ_3 和 W 同式 (2)。

因而可设:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_n P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} e^{-i\omega t}. \quad (10)$$

上述等式中的 5 个待定系数 A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n 和 E_n 除了满足式 (9) 外, 还应满足边界条件:

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P_2}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (11a, b)$$

假设两个实心球体是绝对硬的, 则应满足边界条件:

$$\frac{\partial P_1}{\partial R_1} \Big|_{R_1=a_1} = \frac{\partial P_1}{\partial R_2} \Big|_{R_2=a_2} = 0. \quad (12a, b)$$

由上面 5 个边界条件可以确定出这 5 个待定系数 A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n 和 E_n , 因而可以得到当其内部存在这两个实心球体时封闭薄球壳的内部散射声场为:

$$P_{SS}(r, r_0) = P_S(r, r_0) + P_{S1}(r, r_0) + P_{S2}(r, r_0). \quad (13)$$

3.2 利用本文公式 (3) 计算

由式 (3) 可得到当封闭薄球壳内部存在两个实心球体时的内部散射声场为:

$$P_{SS}^{(o)}(r, r_0) = P_S^{(o)}(r, r_0) + P_{S1}^{(o)}(r, r_0) + P_{S2}^{(o)}(r, r_0). \quad (14)$$

式中, $P_S^{(o)}(r, r_0)$ 表示封闭薄球壳的内部散射声场, 可由式 (2) 计算得到, $P_{S1}^{(o)}(r, r_0)$ 表示实心球体 O_1 的外部散射声场, $P_{S2}^{(o)}(r, r_0)$ 表示实心球体 O_2 的外部散射声场, 对于实心球体, 其外部散射声场是很容易得到的。

如图 3 所示, 由式 (14) 和式 (13) 计算出的结果是非常接近的, 这说明了本文公式 (3) 的正确性。这里

取 $a_1 = 0.085 \text{ m}$, $(r_1, \theta_1, \varphi_1) = (0.15, \pi/6, 2\pi/3)$, $a_2 = 0.105$, $(r, \theta, \varphi) = (0.24, 2\pi/3, -\pi/10)$, $R = 0.4 \text{ m}$, $(r_0, \theta_0, \varphi_0) = (0.27, 2\pi/3, \pi/4)$, $(r_2, \theta_2, \varphi_2) = (0.2, \pi/3, \pi/4)$, 球壳厚度 $h = 0.002 \text{ m}$ 。另外, 我们注意到图 3 中在 ω 约等于 1800 rad/s 时用两种方法计算的结果有较大差别, 作者认为, 这是因为用常规理论方法进行计算时, 和积分方程法一样, 当波数为目标内部问题的特征值时, 将产生非唯一解或奇异解^[3]。

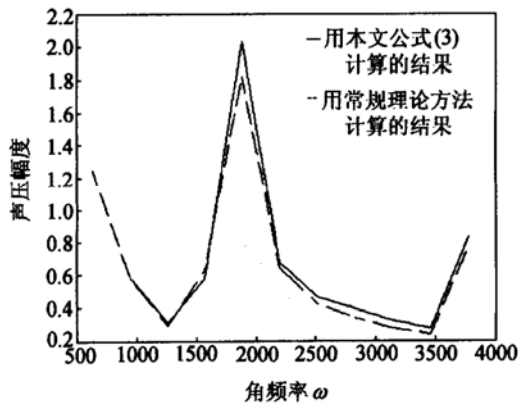


图 3 两种计算方法的比较

另外, 当半径为 R_1 的封闭薄球壳内部存在一个半径为 R_2 的同心小封闭薄球壳时, 用本文公式 (3)

和常规理论方法分别计算了大球壳和小球壳之间的散射声场。其结果也是非常相近的。这也说明了本文公式 (3) 的正确性。

4 结论

从上面的计算过程可以看出, 相对于常规理论方法, 本文的方法更简单。而且, 常规理论方法只能应用于计算一些规则形状物体的内部散射声场, 其计算量随着散射体数量的增加而成比例增加。而本文的方法可以应用于计算任意形状封闭薄壳内存在多个不规则散射体时的内部散射声场, 由于可以把各个散射体的散射声场分开计算, 其计算量较小。因而本文的计算方法具有更大的普遍性。

参 考 文 献

- 1 WU Jiuhui, CHEN Hualing, HU Xuanli. Method to calculate interior sound field of arbitrary-shaped closed thin shell. *Chinese Journal of Acoustics*, 2001; 20(1): 81—87
- 2 Prasad C. On vibration of spherical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1964; 36(3): 489—494
- 3 徐海亭, 涂哲民. 积分方程法与求解谐振频率的声散射. *声学学报*, 1995; 20(1): 26—32