

水中弹性圆柱壳的共振声辐射*

刘 涛 范 军 汤渭霖

(上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室 上海 200030)

2000 年 6 月 1 日收到

2000 年 11 月 17 日定稿

摘要 研究了在内壁简谐波向线力激励下的水中弹性圆柱壳的振动和声辐射问题, 这有助于深入认识水中结构的声辐射机理, 验证水下结构共振声辐射理论。本文从经典 Rayleigh 简正级数解出发导出共振声辐射公式, 然后分别用经典公式和共振声辐射公式计算钢圆柱壳的辐射声功率及壳体表面声压曲线。计算结果表明两者符合良好。

PACS 数: 43.40, 43.30, 43.20

Resonance radiation of elastic cylindrical shell in water

LIU Tao FAN Jun TANG Weilin

(State Key Laboratory of Vibration, Shock & Noise of Shanghai JiaoTong University Shanghai 200030)

Received Jun. 1, 2000

Revised Nov. 17, 2000

Abstract Sound radiation from a submerged elastic cylindrical shell excited by internal harmonic line force is considered. It is useful for understanding the mechanisms of sound radiation from submerged structure and verifying the Resonance Radiation Theory (RRT). Firstly, the resonance radiation formula is derived from classical Rayleigh normal mode solutions, then numerical calculation for a thin steel cylindrical shell is completed by using these two methods. The results of RRT solutions are compared with that of Rayleigh series solutions, which are in good agreement.

引言

水中圆柱壳的振动和声辐射问题一直受到结构声学研究者的关注, 这不仅是由于它具有很多工程应用背景, 而且还因为它是少数简单壳体中可以获得经典解的问题之一。对这些问题的研究有助于深入理解声辐射的机理。Rayleigh 简正级数解法^[1]和 Watson 变换方法^[2]是分析水中壳体的振动与声辐射问题的常用方法。为了深入揭示声辐射的机理, 文献 3 首次提出共振声辐射理论。以水中弹性球壳为例, 从 Rayleigh 简正级数解出发导出共振声辐射公式, 并据此讨论声辐射与球壳共振特性的联系。本文遵循文献 3 的思路, 进一步验证共振声辐射理论对圆柱壳体的适用性。首先导出水中无限长圆柱壳受法向线力激励时振动和声辐射的 Rayleigh 简正级数

解。然后用 Mittag-Leffler 定理将壳体-声耦合系统的导纳函数展开成共振形式从而导出共振声辐射公式。用共振辐射公式计算了声辐射特性并与简正级数解的结果进行了对比。为了将结构振动与声辐射与共振特性联系起来, 本文特别计算了在所讨论的范围内起决定作用的那些复数共振极点。利用这些复数共振极点, 可以对水下圆柱壳体振动和声的耦合过程获得更深入的理解。

1 弹性圆柱壳声辐射的 Rayleigh 简正级数解

设弹性圆柱壳的内外径分别为 b 和 a , 壳体材料的密度为 ρ_2 , 纵、横波速度分别为 c_d 、 c_s , 且材料无损耗。壳体周围水介质的密度及声速分别为 ρ_1

* 国家自然科学基金资助项目

和 c_1 。取柱坐标 (r, θ, z) , 又设圆柱壳内部为真空, 在内壁作用有与 z 无关相对于 θ 对称的法向激励力 $F(\theta)e^{-i\omega t}$, 展开为:

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\theta). \quad (1)$$

当激励力为作用在 $\theta = 0$ 的线力 F_1 时, $F(\theta) = F_1/b\delta(\theta)$, 可以得到:

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos n\theta d\theta = \varepsilon_n F_{1s}, \quad (2)$$

其中 ε_n 是 Neumann 函数, 当 $n = 0$ 时 $\varepsilon_n = 1$, $n \geq 1$ 时 $\varepsilon_n = 2$; $F_{1s} = F_1/(2\pi b)$ 是单位长度的圆柱壳内壁上的激励压力。

本文讨论任意壳厚的情况, 因此采用严格弹性理论。在壳体中引入两个势函数 ϕ 和 ψ , 周围水介质中声场用声压 p 描述, 则满足波动方程的解是(省略 $e^{-j\omega t}$):

壳体内 $b \leq r \leq a$:

$$\phi(\theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n [g_n J_n(k_d r) + h_n Y_n(k_d r)] \cos n\theta, \quad (3)$$

$$\psi(\theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n [l_n J_n(k_s r) + m_n Y_n(k_s r)] \sin n\theta, \quad (4)$$

壳体外 $r > a$:

$$p(\theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n b_n H_n^{(1)}(k_1 r) \cos n\theta, \quad (5)$$

其中 J_n 、 Y_n 和 $H_n^{(1)}$ 分别是第一类柱贝塞尔函数、第二类柱贝塞尔函数和第一类汉克尔函数, 并且:

$$k_d = \frac{\omega}{c_d}, \quad k_s = \frac{\omega}{c_s}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}. \quad (6)$$

边界条件:

$r = a$:

$$\tau_{rr}(\theta) = -p(\theta), \quad u_r^{(2)}(\theta) = u_r^{(1)}(\theta), \quad \tau_{r\theta}(\theta) = 0 \quad (7)$$

$r = b$:

$$\tau_{rr}(\theta) = -F(\theta), \quad \tau_{r\theta}(\theta) = 0$$

由边界条件得到确定系数 g_n 、 h_n 、 l_n 、 m_n 和 b_n 的方程组:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) k_s^2 a^2 H_n^{(1)}(k_1 a) & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ -k_1 a H_n^{(1)}(k_1 a) & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ 0 & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n/\rho_1 \omega^2 \\ g_n \\ h_n \\ l_n \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{b^2}{\rho_2 c_s^2} A_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

令 D_n 为 (8) 式中的系数行列式 (5×5 阶), D_n^{ij} 为 D_n 中元素 d_{ij} 的代数余子式。系数行列式的元素与平面波在圆柱面上散射问题中的元素相同^[5]。

令 $x = k_1 a$, 则外壁上的法向位移:

$$u_r|_a = \frac{1}{\rho_1 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial r}|_a = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{b_n}{\rho_1 c_1 \omega} H_n^{(1)'}(x) \cos n\theta, \quad (9)$$

其中的 b_n 由 (8) 式解出:

$$b_n = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) k_s^2 b^2 \frac{D_n^{41}}{D_n} A_n. \quad (10)$$

在内壁线力激励下, 定义 n 阶模式力 F_n 与外壁 n 阶模式的法向振速之比为内激励阻抗:

$$Z_n^i(x) = \frac{F_n}{-i\omega u_{rn}|_a} = Z_n^{Mi}(x) + \zeta_n Z_n^A(x), \quad (11)$$

其中:

$$Z_n^{Mi}(x) = i \frac{\rho_2 c_s^2 a}{\omega b^2} \frac{D_n^{21}}{D_n^{41}} \quad (12)$$

是不存在水介质负荷时 n 阶模式的内激励机械阻抗,

$$Z_n^A(x) = \frac{i\rho_1 c_1 H_n^{(1)}(x)}{H_n^{(1)'}(x)} \quad (13)$$

是圆柱面 n 阶振动模式的辐射声阻抗。其中 $H_n^{(1)'}(x)$ 是汉克尔函数的导数, 即 $\partial H_n^{(1)}(x)/\partial x$ 。

$$\zeta_n = \frac{a^2}{b^2} \frac{D_n^{11}}{D_n^{41}} \quad (14)$$

反映了圆柱壳厚度的作用。进一步定义:

$$Z_n^M(x) = \frac{Z_n^{Mi}(x)}{\zeta_n} = i \frac{\rho_2 c_s^2}{\omega a} \frac{D_n^{21}}{D_n^{41}}, \quad (15)$$

就有:

$$Z_n^i(x) = \zeta_n [Z_n^M(x) + Z_n^A(x)] = \zeta_n Z_n(x). \quad (16)$$

对应于文献 3, Z_n 为外激励阻抗, $Z_n^M(x)$ 为外激励机械阻抗。

这样, 外壁的法向振速和介质中的辐射声压可以表示为:

$$V_r(a, \theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{rn}(a, \theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{A_n \cos n\theta}{Z_n^i(x)}, \quad (17)$$

$$p(r, \theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, \theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{A_n}{Z_n^i(x)} \frac{Z_n^A(x)}{H_n^{(1)}(x)} H_n^{(1)}(k_1 r) \cos n\theta. \quad (18)$$

上面这些公式与文献 3 描述的球壳的情况十分相似。单位长度的弹性柱壳辐射声功率可以用近场或远场方法求出。近场方法的公式是:

$$W(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{p(a, \theta, x) V_r^*(a, \theta, x)\} a d\theta dl. \quad (19)$$

利用正交性:

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cdot \cos m\theta d\theta = \frac{2\pi}{\varepsilon_n} \delta_{mn}. \quad (20)$$

同时定义 n 阶模态的辐射功率为 $W_n(x)$, 可得到辐射功率计算公式:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) = \pi a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n |A_n|^2}{|Z_n^i|^2} \operatorname{Re}(Z_n^A). \quad (21)$$

为便于分析, 将其无量纲化, 定义:

$$W^U(x) = \frac{W(x)}{2\pi a F_1^2 / \rho_1 c_1} = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^U(x), \quad (22)$$

这里:

$$W_n^U(x) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n^3}{|Z_n^i|^2} \operatorname{Re}(Z_n^A) \rho_1 c_1. \quad (23)$$

2 水中圆柱壳共振声辐射公式

水中弹性圆柱壳的共振频率方程^[1]是:

$$Z_n^i(x) = Z_n^{Mi}(x) + \zeta_n Z_n^A(x) = 0. \quad (24)$$

表面振速和辐射声压公式中都含有导纳函数 $1/Z_n^i(x)$ 项, 因此它们都具有共振特性。

按照文献 4, 采用奇异点展开法 (SEM), 将亚纯函数 $1/Z_n^i(x)$ 在复 x 平面上极点 $\tilde{x}_{nl}$ 按 Mittag-Leffler 定理展开并忽略非共振项后得到:

$$\frac{1}{Z_n^i(x)} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{nl}}{x - \tilde{x}_{nl}}, \quad (25)$$

其中:

$$a_{nl} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{Z_n^i(x)} dx \quad (26)$$

是亚纯函数 $1/Z_n^i(x)$ 在复极点 $\tilde{x}_{nl}$ 的留数, c 是复平面上只包含极点 $\tilde{x}_{nl}$ 的闭合围线。复极点的计算方法见参考文献 6。

应用式 (25) 式可得外壁的法向振速和介质中的辐射声压为:

$$V_{rn}(a, \theta, x) = i^n \varepsilon_n A_n \cos n\theta \sum_l \frac{a_{nl}}{x - \tilde{x}_{nl}}, \quad (27)$$

$$p_n(a, \theta, x) = i^n \varepsilon_n \cos n\theta \cdot A_n Z_n^A(x) \sum_l \frac{a_{nl}}{x - \tilde{x}_{nl}}. \quad (28)$$

再利用 (19) 式和 20 式可得单位长度圆柱壳辐射功率:

$$W_n(x) = \pi a \varepsilon_n |A_n|^2 \left| \sum_l \frac{a_{nl}}{x - \tilde{x}_{nl}} \right|^2 \operatorname{Re}(Z_n^A). \quad (29)$$

按照 (22) 式将上式无量纲化得到:

$$W_n^U(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_n^3 \left| \sum_l \frac{a_{nl}}{x - \tilde{x}_{nl}} \right|^2 \operatorname{Re}(Z_n^A) \rho_1 c_1. \quad (30)$$

3 共振声辐射特性的数值计算

数值计算中圆柱壳材料为钢, 密度为 7800 kg/m^3 , 纵、横波波速分别为 $c_d = 5800 \text{ m/s}$, $c_s = 3100 \text{ m/s}$; 水的密度 1000 kg/m^3 , 声速 $c_1 = 1500 \text{ m/s}$; 激励力 $F_1 = 1.0$ 。

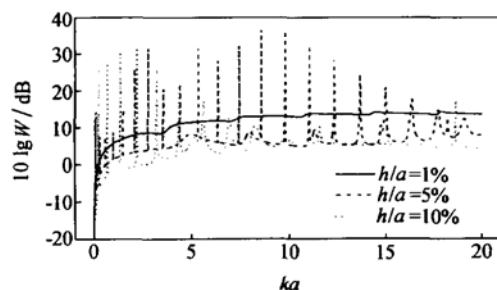


图 1 线力激励下不同壳厚的圆柱壳体单位长度辐射功率

图 1 是根据 Rayleigh 简正级数解 (22 式) 计算的单位长度壳体辐射功率, 分别给出了壳厚半径比为 1%、5% 和 10% 的钢柱壳辐射功率。从图中可以看到不同壳厚比壳体的共振峰位置也不同, 表明壳体的共振特性发生了变化; 另外当壳厚增大时壳体辐射功率的总体水平下降, 这是由于圆柱壳体厚度增大导致其刚度增加, 从而在相同的激励力下振动减弱。当壳厚半径比为 1%, $ka \leq 20$ 时, 图中没有出现尖锐的共振峰 (从后面的讨论可知是由 a_0 -振动模式引起), 但在各阶模态的辐射功率分波曲线计算中, 可以找到这类共振峰, 只是这些共振峰对壳体的总辐射声功率的贡献更小一些, 因而其在计算的频段内表现不明显。

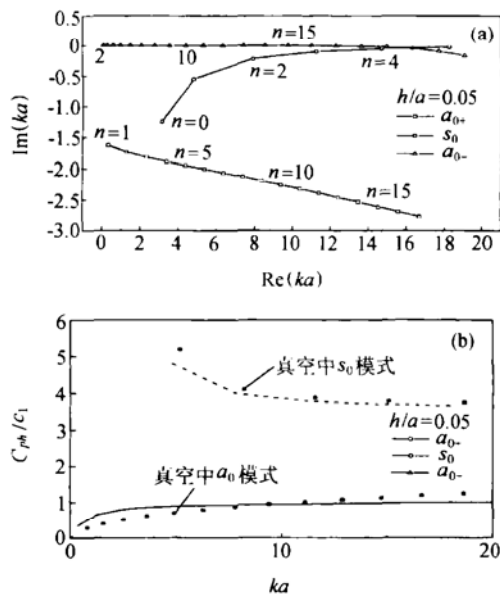


图2 水中柱壳复共振频率的分布 (a) 及相速度频散曲线 (b)

下面以壳厚比 5% 的壳体为例, 首先分析水中壳体的固有振动模式, 即对圆柱壳体的共振频率方程 (24) 式求解, 计算结果如图 2。从图中可知, 在 $ka < 20$ 范围内圆柱壳的振动模式主要包含以下 3 种:

(1) 圆柱壳最低阶反对称模式 a_0 的两个分支 a_{0+} 和 a_{0-} 。圆柱壳处在真空中时最低阶反对称模式 a_0 只有一种模式, 当有水介质负荷时包含两个分支。 a_{0-} 模式是相速度始终小于水中声速的慢波, 其极点非常接近实轴, 由文献 4 知复极点虚部表征共振峰的宽度, 因而 a_{0-} 模式对应的共振峰是非常尖锐的。 a_{0+} 模式的相速度曲线接近于真空中的 a_0 模式, 当 ka 较小时相速度小于水中声速, 但与之对应的复共振频率的虚部很大。

(2) 圆柱壳最低阶对称模式 s_0 。它的相速度始终大于水中声速, 并且在低频发生截止, 是辐射模式, 对应的复极点虚部随频率和阶次增加减小, 因而其共振峰也由平坦变为尖锐。

图 3 是 5% 壳厚比圆柱壳各模态辐射功率分波曲线。从图中可以看出在较低范围内, 声辐射主要由上面讨论的 3 种波和相应的极点决定, 因而在共振区内, 壳体的声辐射可以用计及流体负荷的共振模式来描述。对于 5% 厚度的钢圆柱壳, a_{0-} 模式对应低频段的尖锐窄峰, a_{0+} 模式的贡献体现在由陡峭上升转为平滑的过渡段, s_0 模式对应中频段较为平坦的共振峰。

图 4 是分别用经典解和共振声辐射公式 (30) 式计算的线力激励下钢圆柱壳的声辐射功率和表面声

压曲线。根据上面的讨论, 薄圆柱壳在低频段的辐射主要来自于 s_0 模式、 a_{0+} 及 a_{0-} 模式的贡献, 因此在 $ka < 20$ 内应用共振辐射公式计算时取 s_0 模式 $n = 0 \sim 5$ 的极点, a_{0-} 模式 $n = 2 \sim 22$ 的极点以及 a_{0+} 模式 $n = 1 \sim 18$ 的极点。计算中发现 a_{0+} 模式对于辐射功率的贡献只集中在很低频率范围内。由计算结果可见, 合成曲线与经典计算结果在共振区内符合是良好的, 尤其是由 a_{0-} 和 s_0 模式产生的共振峰, 形状和峰值都十分符合, 这说明了共振辐射理论的适用性。

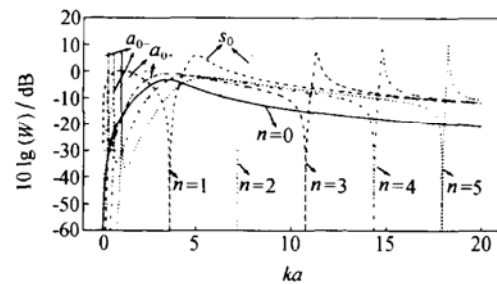


图3 线力激励下 5% 壳厚圆柱壳各模态辐射功率

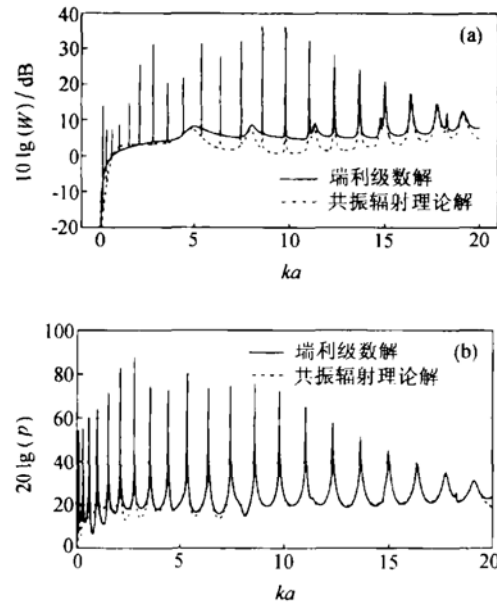


图4 线力激励下 5% 壳厚圆柱壳辐射功率 (a) 和壳体表面声压 (b)

4 结论

本文研究了内壁受简谐线力激励的水中弹性圆柱壳的振动和声辐射问题, 首先用 Rayleigh 简正级数解分析, 然后根据奇点展开法导出水中弹性圆柱壳共振辐射公式, 最后分别用两种方法进行数值计算并加以比较, 得出了以下结论:

(1) 在壳体共振区内, 内部法向线力激励下圆柱壳体的振动和声辐射可以用计及流体负荷的固有共振模式来描述, 即共振声辐射理论具有良好的适用性。

(2) 对于 5% 厚度的钢圆柱壳在低 ka 范围内的数值计算表明: 由 s_0 模式、 a_{0+} 及 a_{0-} 模式的复极点参数按照共振辐射公式合成的辐射声功率曲线与严格理论的计算结果符合良好, 表明共振声辐射公式具有较高的精度。

(3) 此外, 从图 4(a) 中可看出: 在共振峰及其附近, 共振辐射理论结果与严格理论结果符合很好, 而偏离共振峰较远的区域仍有差别。这里主要原因是基于极点展开的共振辐射模型对于极点附近 (共振峰附近) 的辐射特性能够很好的描述, 而对偏离极点较远的区域描述略差。另外从本文关于复共振频率的计算结果可以看出, 随着频率的增加, a_{0+} 振动模式的对应的复共振频率虚部越来越大, 其相应的共振峰的宽度也越来越大, 这样用极点模型描述时, 在远

离共振频率区域就存在一定误差。由于这个原因, 使得在 $ka > 5$ 时, RRT 解在共振峰之间比严格理论解要低一些。因此共振声辐射模型尚待完善和作深入研究。

参 考 文 献

- 1 Junger M C, Feit D. Sound, Structures, and Their Interaction (MIT, Cambridge, MA, 1986). 2nd edition
- 2 Guo Y P. Radiation from cylindrical shells driven by on-surface forces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994; **95**(4): 2014—2021
- 3 汤渭霖, 范 军. 水中球壳的共振辐射理论. *声学学报*, 2000; **25**(4): 308—312
- 4 汤渭霖. 奇异点展开法 (SEM) 与共振散射理论 (RST) 之间的联系. *声学学报*, 1991; **16**(3): 199—208
- 5 Gaunard G C, Brill D. Acoustic spectrogram and complex-frequency poles of a resonantly excited elastic tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984; **75**(6): 1680—1693
- 6 Scott J F M. The free modes of propagation of an infinite fluid-loaded thin cylindrical shell. *Journal of Sound and Vibration*, 1988; **125**(2): 241—280