

声辐射计算的改进体积源边界点法*

王秀峰 陈心昭

(合肥工业大学机械与汽车工程学院 合肥 230009)

王有成

(合肥工业大学土木建筑工程学院 合肥 230009)

2000 年 12 月 4 日收到

2001 年 2 月 21 日定稿

摘要 对体积源边界点法做了较大的改进,提出了在加权余量意义下,通过在边界结点法线方向(背离分析域)构作的四面体上对 Helmholtz 方程的基本解进行积分,来对偶地表达系统方程中的系数矩阵,从而求解结构振动声辐射问题。对大量算例和模拟车床主轴箱辐射声场的改进体积源边界点法分析表明:改进的方法在计算速度较原体积源边界点法提高了 10 余倍的情况下,在计算精度、计算稳定性、对振动体任意表面几何形状的适应性以及克服解的非唯一性等方面,表现出了良好的性能。
PACS 数: 43.40,43.50

The Enhanced Volume Source Boundary Point Method (EVSBP) for the calculation of acoustic radiation problem

WANG Xiufeng CHEN Xinzhaoh

(School of Mechanical and Automobile Engineering, Hefei University of Technology Hefei 230009)

WANG Youcheng

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology Hefei 230009)

Received Dec. 4, 2000

Revised Feb. 21, 2001

Abstract The volume source boundary point method (VSBPM) put forward is greatly improved so that it will speed up the VSBPM solution of the acoustic radiation problem caused by the vibrating body. The fundamental solution provided by Helmholtz equation is enforced in a weighted residual sense over a tetrahedron located on the normal line of the boundary node (directed away from the field under research) to replace the coefficient matrices of the system equation. Through the enhanced volume source boundary point analysis of various examples and the sound field of a simulated axial box of the lathe tool, it has revealed that the EVSBPM works on the aspects of its calculating precision and stability, adaptation to arbitrary shape of vibrating body, its ability to overcome the non-uniqueness problem as well as its calculating velocity more than 10 times higher than the VSBPM's.

引言

利用边界元法 (BEM) 计算振动体声辐射是国内 外 30 余年来致力研究的一个课题,然而尽管边界元法具有使分析问题降维、计算精度高以及适应于无

限域问题等特点,但也有其不足之处,主要反映在:

(1) 计算量大, (2) 奇异积分的处理, (3) 在特征频率处,其解存在非唯一性等。

边界点法(又名全特解场边界元法)^[4-9]是通过在振动体边界结点法线方向上构作特解点源,利用基本解形成满足系统方程的特解矩阵,从而对偶地

* 本文研究获国家自然科学基金 (59575017) 和机械工业技术发展基金 (97JA0104) 资助。

表达出系数矩阵。与边界元法相比，边界点法具有计算量小、避免了奇异积分的处理、能有效克服特征频率处解的非唯一性和适用于近边界声场计算等特点，但是，边界点法仅适用于非常简单的三维声辐射问题，而对于振动体几何表面稍复杂的声辐射问题，边界点法中点源的位置往往很难确定，乃至无法计算。因而难以应用于工程实际问题中。

体积源边界点法^[1-3]，对偶的系数矩阵是通过逐地将单位均匀分布的点声源在位于振动体边界结点法线方向的立方体上进行积分获得。与边界点法相比，体积源边界点法在适用范围、计算稳定性等方面都有十分显著的提高，但由于在对偶地形成系数矩阵的每一个元素时，都要进行一次三重积分，大大地增加了计算工作量，以至于在计算速度上较边界元方法没有明显改善，使该方法向工程推广应用受到了很大限制。

本文提出的改进体积源边界点法，在加权余量意义下，通过在振动体边界结点法线方向所作的四面体上对点声源进行积分，来对偶地表达系统方程中的系数矩阵，从而求解结构振动声辐射问题，达到了与边界点法相当的计算速度，而在计算精度、计算稳定性、对振动体任意表面几何形状的适应性等方面，保留了体积源边界点法的良好性态。

1 改进的体积源边界点法

对于法向振速已知的小振幅简谐振动，其在无限域中引起的外部声辐射问题可用如下离散的系统方程予以描述：

$$A\Phi = B \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (1)$$

其中， Φ 为待求的边界结点上的速度势列向量， $\partial \Phi / \partial n$ 为速度势在边界结点外法向上的法向导数列向量，由振动体边界法向振速决定； A 和 B 为系数矩阵。

如图 1 所示，振动体边界记作 Γ ， Ω_- 和 Ω_+ 分别表示振动体的内域和外域， p 和 q 为 Γ 上全部 m 个结点中任二结点。

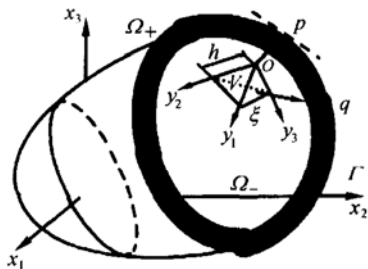


图 1 改进体积源边界点法示意图

如果在 p 结点的法向（背离分析域）、距 p 点一定距离处，构造一个不与分析域交割的、棱长是 h 的四面体 V ，并在四面体上施加分布函数为 $W_0(\xi)$ (o 为四面体的顶点) 的分布源，以此加态四面体作为特解体积源，就可求得其在 q 点的基本解：

$$\begin{cases} \Phi_T^*(p, q) = \frac{1}{\alpha} \int_0^h \int_0^{h-y_1} \int_0^{h-y_1-y_2} W_0(\xi) G(\xi, q) dy_1 dy_2 dy_3 \\ \frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n_q}(p, q) = \frac{1}{\alpha} \int_0^h \int_0^{h-y_1} \int_0^{h-y_1-y_2} W_0(\xi) \frac{\partial G(\xi, q)}{\partial n_q} dy_1 dy_2 dy_3 \end{cases} \quad (2)$$

上式中， α 称为标定因子，如下定义：

$$\alpha = \int_0^h \int_0^{h-y_1} \int_0^{h-y_1-y_2} W_0(\xi) dy_1 dy_2 dy_3, \quad (3)$$

其中：

$$\begin{aligned} G(\xi, q) &= \frac{1}{4\pi r} e^{-jk r}, \\ \frac{\partial G(\xi, q)}{\partial n_q} &= - \left(\frac{1}{r} + jk \right) \frac{\partial r}{\partial n_q} G(\xi, q), \\ r &= (r_i r_i)^{1/2}, \quad r_i = q_i - \xi_i, \quad r_{,i} = \frac{r_i}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial n_q} &= r_{,i} \cdot n_{q_i}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \end{aligned}$$

式中 ξ_i 和 q_i 分别为体积源上变点 ξ 和场点 q 的坐标分量， $i = 1, 2, 3$ ； k 为波数。这里 $\Phi_T^*(p, q)$ 和 $\frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n_q}(p, q)$ 可以通过积分上下限的变换，利用 Hammer 标准四点数值求积^[10] 来确定。有时振动体置于地面上，若将地面简化为无限大的刚硬平面，则只要将公式 (2) 中自由空间 Green 函数用半空间 Green 函数代替即可。

当 q 遍取振动体边界上所有结点时，形成的 m 维列向量 $\Phi_T^*(p)$ ， $\frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n}(p)$ 就是系统方程 (1) 的一个特解，因而满足：

$$A\Phi_T^*(p) = B \frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n}(p). \quad (4)$$

同样，当 p 遍取边界上全部结点时，就形成 m 个特解构成的特解矩阵 Φ_T^* 和 $\frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n}$ ，满足：

$$A\Phi_T^* = B \frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n}. \quad (5)$$

由此得出对偶关系：

$$A^{-1}B = \Phi_T^* \left(\frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n} \right)^{-1} \quad (6)$$

因此，在振动体边界结点法向振速已知的情况下，就可求得结点上的速度势列向量：

$$\Phi = A^{-1}B \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \Phi_T^* \left(\frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \quad (7)$$

该法还可以跳过边界量的解算, 直接求取辐射声场中任一点 ζ 的速度势 $\Phi(\zeta)$

$$\Phi(\zeta) = [\Phi_T^*(\zeta)]^T \left[\frac{\partial \Phi_T^*}{\partial n} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (8)$$

其中是 $\Phi_T^*(\zeta)$ 上述 m 个特解体积源在 ζ 处产生的特解构成的 m 维列向量。

有了边界上和辐射声场内的速度势, 进而可以利用声学理论, 计算简谐辐射体辐射场的声压 P 、声强 I 和声功率 W 等声场参数。

至于体积块, 当然还可以取作圆锥体、立方体、球缺体等等, 但采用四面体计算最简单。如图 1 中, 四面体可以通过棱长 h 和质心坐标两个参数予以确定。关于棱长 h , 只要整个体积块能够完全位于 Ω_- 内, 它的选择可以任意。只是 h 太小时, 特解体积源会蜕化为特解点源; 但若取得过大, 计算加权余量公式的体积分时, 就需要采用太多的积分点, 增加了计算量。较适宜的 h 尺寸选取应接近表面单元格的特征尺寸或与形体半径的 10% 相当。关于质心位置的选取, 参见文献 3。此外, 权函数 $W_0(\xi)$ 的选取也具有任意性, 最方便的还是选择四面体的顶点 o 处线性形函数^[10]。

2 计算实例

2.1 脉动球、摆动球声辐射

对于半径为 a 、均匀径向速度是 V 的脉动球和半径为 a 、径向速度是 $V \cos \theta$ (θ 是结点处外法线与摆动方向之间的夹角) 的摆动球, 其产生的表面声压见文献 3。如图 2 所示, 对 $a = 0.1 \text{ m}$ 、 $V = 0.1 \text{ m/s}$ 球表面进行剖分, 结点数为 20。

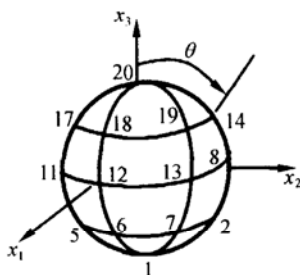


图 2 球表面的剖分

表 1 给出了利用体积源边界点法、改进的方法求得的脉动球表面声压数值解与精确解之间的比较。表 2 给出了利用体积源边界点法、改进的方法求得的摆动球表面 (以结点 14 为例) 声压数值解与精确解之间的比较。

作者还对该二算例利用 3 次 B 样条函数作为插值函数的一般边界元法^[11], 计算其表面声压, 在

Pentium 133 计算机上 (下同) 计算, 占用 CPU 时间为 1.75 s, 而体积源边界点法 4.444 s, 改进的方法 0.324 s。结果表明, 改进的方法在得到了与体积源边界点法相当的计算精度的情况下, 计算速度提高了 10 倍多, 比传统的边界元方法算效提高了 5 倍, 且能在脉动球的特征波数满足 $ka = \pi, 2\pi, \dots$ 处和摆动球的特征波数满足 $ka = 4.4934, 7.7252, \dots$ 处^[3], 都能给出满意的计算结果。

表 1 脉动球表面声压计算结果 (* 对应特征波数) (Pa)

ka	体积源边界点法	改进的方法	精确解
1	20.4706+j20.4600	20.4704+j20.4600	20.4706+j20.4600
2	32.7308+j16.3722	32.7425+j16.3632	32.7307+j16.3720
3	36.8277+j12.2771	36.8316+j12.2713	36.8273+j12.2770
*3.14	37.1551+j11.8267	37.1551+j11.8273	37.1554+j11.8269
4	38.5130+j9.6278	38.5150+j9.6241	38.5132+j9.6277
5	39.3472+j7.8685	39.3473+j7.8656	39.3466+j7.8681
6	39.8140+j6.6362	39.8145+j6.6323	39.8139+j6.6363
*6.28	39.9096+j6.3515	39.9084+j6.3515	39.9091+j6.3517
7	40.1007+j5.7287	40.1016+j5.7255	40.1016+j5.7288
8	40.2906+j5.0357	40.2901+j5.0327	40.2905+j5.0360

表 2 摆动球表面声压计算结果 (* 对应特征波数) (Pa)

ka	体积源边界点法	改进的方法	精确解
1	5.7947+j17.3649	5.7957+j17.3670	5.7966+j17.3687
2	23.1368+j17.3632	23.1558+j17.3520	23.1404+j17.3669
3	27.5699+j11.2320	27.5746+j11.2254	27.5727+j11.2348
4	28.4873+j8.0089	28.4894+j8.0065	28.4898+j8.0122
*4.49	28.6512+j7.0070	28.6524+j7.0091	28.6534+j7.0106
5	28.7492+j6.2053	28.7504+j6.2048	28.7509+j6.2091
6	28.8450+j5.0706	28.8457+j5.0697	28.8458+j5.0752
7	28.8870+j4.2895	28.8869+j4.2902	28.8867+j4.2951
*7.73	28.9037+j3.8600	28.9030+j3.8593	28.9025+j3.8624
8	28.9082+j3.7193	28.9074+j3.7213	28.9066+j3.7260

2.2 立方体的辐射声功率

图 3 是一 $0.2 \times 0.2 \times 0.2 \text{ m}$ 的振动立方体, 边界剖分后结点数为 74。

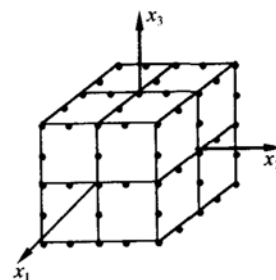


图 3 振动立方体

其结点上的法向振速是利用“替代法”^[12]由位于正方体中心的点源所产生,对于单位强度的点源,其辐射声功率为 $k^2\rho c/8\pi$,所以对于强度为 $8\pi/k^2\rho c$ 的点源,其辐射声功率为 1。表 3 是利用体积源边界点法、改进的方法对应于强度为 $8\pi/k^2\rho c$ 的点源所计算的立方体辐射声功率,可见两种方法的计算结果均与精确解良好吻合,改进的方法甚至略好于体积源边界点法,而每一波数的计算时间,改进的方法为 3.388 s,远少于 VSBPM 的 66.400 s。

表 3 振动立方体辐射声功率的计算结果 (* 对应特征波数)

ka	体积源边界点法	改进的方法	精确解
1	0.9999	0.9999	1
2	0.9998	0.9998	1
3	0.9998	1.0000	1
4	0.9997	0.9998	1
5	0.9997	0.9998	1
$\sqrt{3}\pi$	0.9996	0.9998	1
6	0.9996	0.9998	1
7	0.9995	0.9997	1
*	0.9994	0.9997	1
8	0.9994	0.9997	1
9	0.9992	0.9997	1
3π	0.9991	0.9998	1
10	0.9991	0.9998	1
$2\sqrt{3}\pi$	0.9993	1.0000	1

2.3 长方体的辐射声功率

为考核体积源边界点法和改进的方法处理具有棱边和角点的三维尺寸不等、边界条件分布不对称的振动体声辐射问题的有效性,又对如图 4— $0.3 \times 0.4 \times 0.2$ m 的振动长方体辐射声功率进行计算,边界剖分后结点数为 158。

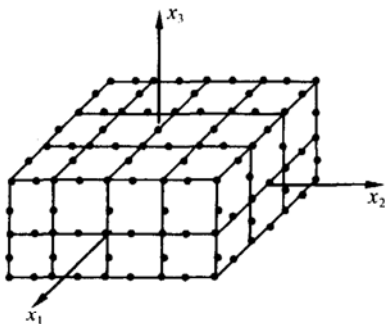


图 4 振动长方体

其结点上的法向振速仍是利用“替代法”由位于长方体内点 (0.05,0.02,0.03) 处的一强度为 $8\pi/k^2\rho c$

的点源所产生,其辐射声功率为 1。表 4 中列出了利用体积源边界点法和改进的方法所计算的上述长方体的辐射声功率,最大误差分别为 2.30% 和 2.16%,相应的 CPU 耗时为 230.46 s 和 15.39 s。

表 4 振动长方体辐射声功率的计算结果

f/Hz	体积源边界点法	改进的方法	精确解
200	1.0212	1.0203	1
500	1.0211	1.0209	1
800	1.0210	1.0209	1
1000	1.0209	1.0208	1
1300	1.0209	1.0210	1
1500	1.0211	1.0209	1
1800	1.0208	1.0216	1
2000	1.0204	1.0205	1
2300	1.0230	1.0199	1
2500	1.0228	1.0174	1
2800	1.0218	1.0215	1
3000	1.0208	1.0210	1

3 模拟车床主轴箱的辐射声场计算

为进一步检验本文所提出方法的有效性和可靠性,特设计制造了一长 0.28 m、宽 0.27 m、高 0.26 m 的模拟车床主轴箱实验装置(如图 6 所示)。实验在半消声室中进行,在箱体的每个振动面(除底部安装面外)上均匀布置 25 个测点,以 824.4 Hz(共振频率)

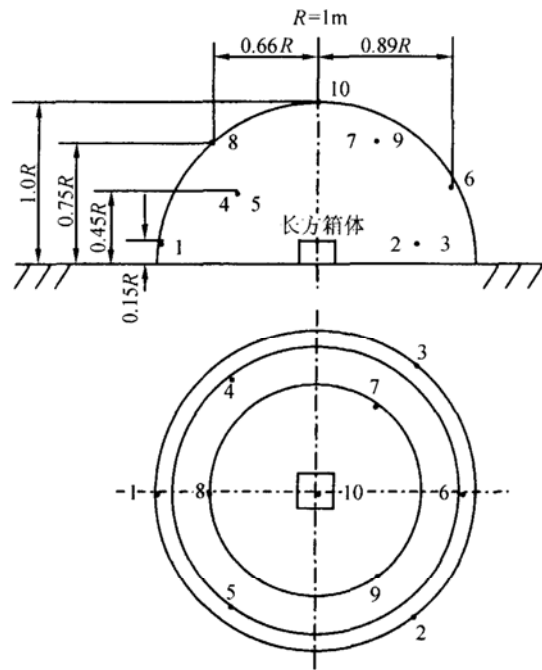


图 5 声压测点布置图

表 5 声压的计算结果与实测值之间的比较 ($f = 824.4 \text{ Hz}$)(dB)

声压测点	体积源边界点法 (方法 1)	改进的方法 (方法 2)	实测值	方法 1 的误差	方法 2 的误差
1	77.6508	75.3593	75.8	1.9	0.4
2	69.8739	70.3106	69.2	0.7	1.1
3	69.3540	71.0827	70.8	1.4	0.3
4	70.8029	69.4776	69.0	1.8	0.5
5	64.7401	67.2590	67.0	2.3	0.3
6	75.2897	73.2386	73.5	1.8	0.3
7	70.5954	70.9469	70.7	0.1	0.2
8	73.9264	74.4641	74.3	0.4	0.2
9	70.0931	72.6460	71.8	1.7	0.8
10	73.6252	78.2580	77.6	4.0	0.7

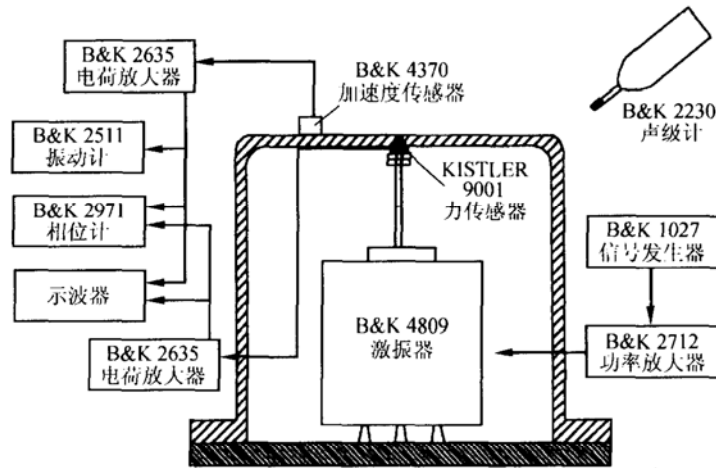


图 6 模拟车床主轴箱实验装置示意图

的简谐频率激振, 测得箱体表面共计 125 个结点处的振动速度 (包含幅值和相位) 和如图 5 所示的半球面上 10 个测点处的声压值。

由实测出的箱体表面振速作为已知边界条件, 经改进体积源边界点法计算出如上 10 点处的声压值, 再与声压实测值相比较 (见表 5), 并列出了文献 3 中体积源边界点法的计算结果。可见: 声场的实测值与本文方法的计算值之间的误差除在一个测点处达到 1.1 dB 外, 其余的误差都小于 1 dB, 总体上明显优于体积源边界点法的计算结果, 计算精度满足工程应用的要求。此外, 体积源边界点法计算所需的 CPU 时间为 159.17 s, 而改进的方法仅需 7.30 s。

4 结束语

改进的体积源边界点法, 通过在加权余量意义下, 在边界结点法线方向 (背离分析域) 构作的四面体上对点声源进行积分, 来对偶地表达系统方程中的系数矩阵。与一般边界元法相比, 该方法具有计算

量小、避免了奇异积分的处理以及能够克服在特征频率处解的非唯一性等特点; 而与边界点法相比, 其在计算精度、计算稳定性、对振动体任意表面几何形状的适应性等方面性能良好; 是对体积源边界点法的较大改进, 计算速度提高了 10 余倍, 有利于向工程界推广。

参 考 文 献

- 1 张胜勇, 陈心昭. 体积源边界点法及其在声辐射计算中的应用. 振动工程学报, 1998; 11(4): 395—401
- 2 Zhang S Y, Chen X Z. The boundary point method for the calculation of exterior acoustic radiation problem. *Journal of Sound and Vibration*, 1999; 228(4): 761—772
- 3 张胜勇. 机器声辐射计算的新型数值方法的研究. 博士学位论文. 合肥: 合肥工业大学, 1998
- 4 刘 钊, 陈心昭. 结构声辐射分析的全解场边界元法. 振动工程学报, 1996; 9(4): 341—347
- 5 刘 钊, 陈心昭. 模拟齿轮箱辐射声场的边界元分析和实验研究. 机械工程学报, 1997; 33(6): 1—7
- 6 王有成. 边界元技术新探—边界点法. 力学与实践, 1995; 19(4): 12—16, 11

- 7 王秀峰, 陈心昭. 利用边界点法计算结构振动声辐射的近边界声场. 合肥工业大学学报, 2000; **235**(5): 607—610
- 8 张胜勇, 陈心昭. 利用边界点法克服振动声辐射计算中解的非唯一性. 合肥工业大学学报, 1998; **21**(1): 9—13
- 9 王有成. 工程中的边界元方法. 北京: 中国水利水电出版社, 1996
- 10 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法. 北京: 清华大学出版社, 1998
- 11 张胜勇, 陈心昭. 应用三次 B 样条函数插值的边界元法计算结构振动声辐射. 声学技术, 1998; **17**(1): 20—23
- 12 Kirkup S M, Henwood D J. Methods for speeding up the boundary element solution of acoustic radiation problems. *Journal of Vibration and Acoustics*, Transaction of the ASME, 1992; **114**(7): 374—380
- 13 Schenck H A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1968; **44**(1): 41—58
- 14 Wu T W, Seybert A F. A weighted residual formulation for the CHIEF method in acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991; **90**(3): 1608—1614
- 15 Koopmann G H, Benner H. Method for computing the sound power of machines based on the Helmholtz integral. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1982; **71**(1): 78—89
- 16 赵键, 汪鸿振, 朱物华. 边界元法计算已知振速封闭面的声辐射. 声学学报, 1989; **14**(4): 250—257
- 17 Piaszczyk C M, Klosner J M. Acoustic radiation from vibrating surface at characteristic frequencies. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984; **75**(2): 363—375