

高斯界面背向散射超声散斑复振幅统计特性*

吴艳阳¹ 朱鸿茂¹ 王寅观²

(1 华中科技大学力学系 武汉 430074)

(2 同济大学声学研究所 上海 200092)

2002 年 9 月 9 日收到

2002 年 11 月 18 日定稿

摘要 对超声入射在高斯型弱散射界面上时, 背向散射空间中超声散斑复振幅的一些统计特性进行了理论分析, 根据连续界面条件, 推导出了散斑复振幅实部和虚部的均值和方差的函数表示式。进一步的分析表明, 当高斯界面的粗糙程度逐渐变为很小或很大时, 描述超声散斑复振幅这些特性的函数表示式就分别与光滑界面或强散射界面生成的声场相应特性的表示式完全一致。

PACS 数: 43.35, 43.45

Statistical properties of complex amplitude of ultrasonic speckles back scattered from a Gaussian interface

WU Yanyang¹ ZHU Hongmao¹ WANG Yinguan²

(1 Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology Wuhan 430074)

(2 Institute of Acoustics, Tongji University Shanghai Shanghai 200092)

Received Sept. 9, 2002

Revised Nov. 18, 2002

Abstract Some statistical properties of complex amplitude of the ultrasonic speckles back scattered from a Gaussian interface which is insonified by ultrasound is analyzed theoretically. Based on the condition of continuous interface, the mean functions and the variance functions of the real part and the imaginary part of the complex amplitude of the ultrasonic speckles are deduced. The further analyses show that when the roughness of a Gaussian interface becomes extremely small or extremely large, these functions change to be identical with that deduced from a smooth interface or a strongly scattering interface.

引言

超声入射粗糙界面时, 其折射波和反射波均会在各自介质内相互干涉, 形成超声散斑。长期以来, 人们对超声折射波形成的散斑的统计特性研究较多, 且大多集中在医学超声成像领域内^[1-4]。由于折射波在第二介质, 例如人体器官内不断地散射, 所以, 人们合理地应用随机游走理论^[5]对其形成的散斑的统计特性进行理论分析。当粗糙界面上背向散射的超声波在自由空间中相互干涉时, 应用连续界面条件

对空间散斑场的统计特性进行理论分析将比应用随机游走理论更具合理性。文献 6 应用连续界面条件对强散射界面背向空间散斑场的统计特性进行了理论分析, 并用实验对其结果进行了验证。与此相应, 本文将对一种具有代表性的弱散射界面——界面高度变量服从均值为零、方差为 σ_H^2 高斯分布的弱散射粗糙界面即高斯界面, 其背向散射空间中超声散斑复振幅的统计特性进行理论分析和讨论。

界面背向散射超声散斑的统计特性和运动规律与粗糙界面结构的统计特性和界面变形有着密切的关系, 对它们的研究一方面有助于对各种类型的波,

* 国家自然科学基金资助项目 (10074017)

诸如应力波、电磁波、光波等入射粗糙界面上后所生成的背向散射场共性的研究; 另一方面, 将有助于创建性能优异, 可应用于固体内部变形测量的超声散斑干涉度量^[7]新方法。

1 理论分析

在高斯型弱散射粗糙界面的均值平面上建立直角坐标系 $O_0 - x_0y_0$ 。令界面的高度变量 $H(x_0, y_0)$ 服从 $N(0, \sigma_H^2)$ 分布, 其中 σ_H^2 为界面高度变量的方差。波长为 λ 的超声波辐照在界面上, 辐照区域为 Σ 。区域内任一 P_0 点的坐标设为 (x_0, y_0) 。在散射空间中与界面相平行的某一观察平面上建立直角坐标系 $O - xy$, 其上任一观察点 P 的坐标设为 (x, y) 。两直角坐标系的坐标轴相互平行, 相距为 z , 如图 1 所示。

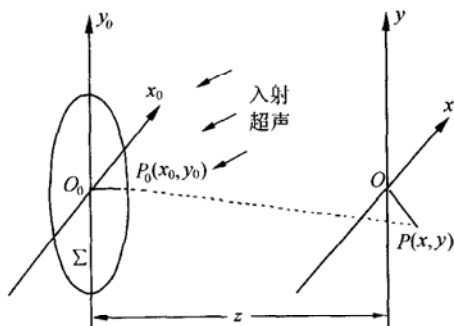


图 1 分析示意图

1.1 基本假设

根据 Kirchhoff 衍射理论来分析观察面上超声散斑复振幅统计特性, 先作假设如下:

(1) 散射界面由大量散射基元 dx_0dy_0 组成, 各散射基元内散射超声的复振幅 $\dot{A}_0(x_0, y_0) = A_0(x_0, y_0)e^{j\phi(x_0, y_0)}$ 具有相同的振幅 $A_0(x_0, y_0)$ 和相位 $\phi(x_0, y_0)$, 而它们在统计上相互独立。此外, 复振幅 $\dot{A}_0(x_0, y_0)$ 可表示为:

$$\dot{A}_0(x_0, y_0) = A_0^R(x_0, y_0) + jA_0^I(x_0, y_0), \quad (1)$$

式中 $A_0^R(x_0, y_0)$ 和 $A_0^I(x_0, y_0)$ 分别表示复振幅 $\dot{A}_0(x_0, y_0)$ 的实部和虚部。并有:

$$\begin{cases} A_0^R(x_0, y_0) = A_0(x_0, y_0) \cos \phi(x_0, y_0), \\ A_0^I(x_0, y_0) = A_0(x_0, y_0) \sin \phi(x_0, y_0). \end{cases} \quad (2)$$

(2) 观察面 $O - xy$ 上任一观测点 P 上超声散斑复振幅 $\dot{A}(x, y)$ 可表示为:

$$\dot{A}(x, y) = A^R(x, y) + jA^I(x, y), \quad (3)$$

式中 $A^R(x, y)$ 和 $A^I(x, y)$ 分别表示复振幅 $\dot{A}(x, y)$ 的实部和虚部。假定 $\dot{A}(x, y)$ 是均方连续的, 因此 $A^R(x, y)$ 和 $A^I(x, y)$ 也是均方连续的, 从而也是均方可积的^[8]。

(3) 在自由空间中, 位于观察面 $O - xy$ 上任一点 $P(x, y)$ 上散斑的复振幅等于:

$$\dot{A}(x, y) = \iint_{\Sigma} \dot{A}_0(x_0, y_0) \dot{h}(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (4)$$

式中 Σ 是超声辐照在界面上的区域, $\dot{h}(x, y; x_0, y_0)$ 是空间传播权函数, 它由超声传播过程确定, 与物面粗糙结构无关。在 Fraunhofer 近似条件下^[9], 有:

$$\dot{h}(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right]. \quad (5)$$

1.2 散射界面上声场复振幅的统计特性

根据相屏近似原理^[10], 超声传播到粗糙界面上时, 界面对入射超声的扰动相当于对其相位进行随机调制, 而不改变振幅。这样当振幅为 A_0 的超声均匀地辐照在高斯粗糙界面上时, 界面上散射声场复振幅的振幅 $A_0(x_0, y_0)$ 和相位 $\phi(x_0, y_0)$ 可表示为:

$$\begin{cases} A_0(x_0, y_0) = A_0, \\ \phi(x_0, y_0) = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + \cos \theta)H(x_0, y_0), \end{cases} \quad (6)$$

式中 θ 是超声入射角。此外, 界面上声场复振幅相位 $\phi(x_0, y_0)$ 的方差 σ_ϕ^2 与界面高度变量的方差 σ_H^2 有以下关系:

$$\sigma_\phi^2 = \left[\frac{2\pi}{\lambda}(1 + \cos \theta)\right]^2 \sigma_H^2. \quad (7)$$

根据假设 (1) 和式 (6), 并注意到 $\phi(x_0, y_0)$ 服从高斯分布 $N(0, \sigma_\phi^2)$, 可知界面上声场复振幅实部和虚部的系综平均就是:

$$\begin{cases} \langle A_0^R(x_0, y_0) \rangle = \langle A_0(x_0, y_0) \rangle \langle \cos \phi(x_0, y_0) \rangle = A_0 e^{-\sigma_\phi^2/2}, \\ \langle A_0^I(x_0, y_0) \rangle = \langle A_0(x_0, y_0) \rangle \langle \sin \phi(x_0, y_0) \rangle = 0, \end{cases} \quad (8)$$

以及界面上声场复振幅实部和虚部的互相关函数为:

$$\begin{aligned} \langle A_0^R(x_{01}, y_{01}) A_0^I(x_{02}, y_{02}) \rangle &= \\ \langle A_0^2(x_0, y_0) \rangle \langle \cos \phi(x_{01}, y_{01}) \sin \phi(x_{02}, y_{02}) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

式 (8) 和 (9) 表示界面上声场复振幅的实部和虚部的均值互不相同, 且互不相关。这与强散射界面上声场

的统计特性有所不同, 后者的实部和虚部的均值均为零。

1.3 空间观察面上超声散斑复振幅统计特性

1.3.1 散斑复振幅实部和虚部的均值

式 (5) 的自由空间传播权函数 $\dot{h}(x, y; x_0, y_0)$ 又可表示为实部 $h^R(x, y; x_0, y_0)$ 和虚部 $h^I(x, y; x_0, y_0)$ 之和:

$$\dot{h}(x, y; x_0, y_0) = h^R(x, y; x_0, y_0) + j h^I(x, y; x_0, y_0). \quad (10)$$

将式 (1) 和 (10) 代入式 (4), 在空间观察面上散斑复振幅的实部和虚部为:

$$\begin{cases} A^R(x, y) = \iint_{\Sigma} [A_0^R(x_0, y_0) h^R(x, y; x_0, y_0) - \\ A_0^I(x_0, y_0) h^I(x, y; x_0, y_0)] dx_0 dy_0, \\ A^I(x, y) = \iint_{\Sigma} [A_0^R(x_0, y_0) h^I(x, y; x_0, y_0) + \\ A_0^I(x_0, y_0) h^R(x, y; x_0, y_0)] dx_0 dy_0. \end{cases} \quad (11)$$

根据假设 (2), 以及二阶矩随机过程均方可积性质, 交换积分和均值运算顺序, 观察面上散斑复振幅的实部和虚部的均值就是:

$$\begin{cases} \langle A^R(x, y) \rangle = \iint_{\Sigma} [\langle A_0^R(x_0, y_0) \rangle h^R(x, y; x_0, y_0) - \\ \langle A_0^I(x_0, y_0) \rangle h^I(x, y; x_0, y_0)] dx_0 dy_0, \\ \langle A^I(x, y) \rangle = \iint_{\Sigma} [A_0^R(x_0, y_0) h^I(x, y; x_0, y_0) + \\ \langle A_0^I(x_0, y_0) \rangle h^R(x, y; x_0, y_0)] dx_0 dy_0. \end{cases} \quad (12)$$

在一般情况下, 当超声入射角 θ 较小时, 超声辐射在粗糙界面上的区域 Σ 是一个中心对称的矩形域或圆域。令矩形域的边长分别是 L_{x_0} 和 L_{y_0} , 圆域的直径

为 D_0 , 这时在 Fraunhofer 近似条件下有:

$$\begin{cases} \iint_{\Sigma} h^R(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \\ \frac{S}{\lambda z} \sin \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) T(x, y), \\ \iint_{\Sigma} h^I(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \\ - \frac{S}{\lambda z} \cos \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) T(x, y), \end{cases} \quad (13)$$

其中 S 是 Σ 的面积, 而 $T(x, y)$ 等于:

$$T(x, y) = \begin{cases} \sin c \left(\frac{\pi L_{x_0} x}{\lambda z} \right) \sin c \left(\frac{\pi L_{y_0} y}{\lambda z} \right), & \Sigma: \text{矩形域}, \\ 2 \frac{J_1(\pi D_0 \sqrt{x^2 + y^2} / \lambda z)}{\pi D_0 \sqrt{x^2 + y^2} / \lambda z}, & \Sigma: \text{圆形域}, \end{cases} \quad (14)$$

式中 $\sin c X = \sin \pi X / \pi X$, 而 $J_1(\cdot)$ 是第一类一阶贝塞尔函数。将式 (8) 和 (13) 代入式 (12) 就有:

$$\begin{cases} \langle A^R(x, y) \rangle = \frac{A_0 S}{\lambda Z} e^{-\sigma_\phi^2/2} \\ \sin \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) T(x, y), \\ \langle A^I(x, y) \rangle = \frac{A_0 S}{\lambda Z} e^{-\sigma_\phi^2/2} \\ \left[-\cos \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right] T(x, y). \end{cases} \quad (15)$$

从式 (15) 可见, 背向散射空间超声散斑复振幅的实部和虚部的均值互不相等, 这与强散射条件下的结果不同。

1.3.2 散斑复振幅实部和虚部的方差

根据式 (11), 背向散射空间超声散斑复振幅的实部平方和虚部平方的均值分别是:

$$\begin{aligned} \langle [A^R(x, y)]^2 \rangle &= \langle \iint_{\Sigma} [A_0^R(x_{01}, y_{01}) h^R(x, y; x_{01}, y_{01}) - A_0^I(x_{01}, y_{01}) h^I(x, y; x_{01}, y_{01})] dx_{01} dy_{01} \\ &\iint_{\Sigma} [A_0^R(x_{02}, y_{02}) h^R(x, y; x_{02}, y_{02}) - A_0^I(x_{02}, y_{02}) h^I(x, y; x_{02}, y_{02})] dx_{02} dy_{02} \rangle = \\ &\langle \iiint_{\Sigma} [A_0^R(x_{01}, y_{01}) A_0^R(x_{02}, y_{02}) h^R(x, y; x_{01}, y_{01}) h^R(x, y; x_{02}, y_{02}) - \\ &A_0^R(x_{01}, y_{01}) A_0^I(x_{02}, y_{02}) h^R(x, y; x_{01}, y_{01}) h^I(x, y; x_{02}, y_{02}) - \\ &A_0^I(x_{01}, y_{01}) A_0^R(x_{02}, y_{02}) h^I(x, y; x_{01}, y_{01}) h^R(x, y; x_{02}, y_{02}) + \\ &A_0^I(x_{01}, y_{01}) A_0^I(x_{02}, y_{02}) h^I(x, y; x_{01}, y_{01}) h^I(x, y; x_{02}, y_{02})] dx_{01} dy_{01} dx_{02} dy_{02} \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\langle [A^I(x, y)]^2 \rangle &= \left\langle \iint_{\Sigma} [A_0^R(x_{01}, y_{01}) h^I(x, y; x_{01}, y_{01}) + A_0^I(x_{01}, y_{01}) h^R(x, y; x_{01}, y_{01})] dx_{01} dy_{01} = \right. \\
&\iint_{\Sigma} [A_0^R(x_{02}, y_{02}) h^I(x, y; x_{02}, y_{02}) + A_0^I(x_{02}, y_{02}) h^R(x, y; x_{02}, y_{02})] dx_{02} dy_{02} \rangle = \\
&\left\langle \iiint_{\Sigma} [A_0^R(x_{01}, y_{01}) A_0^R(x_{02}, y_{02}) h^I(x, y; x_{01}, y_{01}) h^I(x, y; x_{02}, y_{02}) + \right. \\
&A_0^R(x_{01}, y_{01}) A_0^I(x_{02}, y_{02}) h^I(x, y; x_{01}, y_{01}) h^R(x, y; x_{02}, y_{02}) + \\
&A_0^I(x_{01}, y_{01}) A_0^R(x_{02}, y_{02}) h^R(x, y; x_{01}, y_{01}) h^I(x, y; x_{02}, y_{02}) + \\
&\left. A_0^I(x_{01}, y_{01}) A_0^I(x_{02}, y_{02}) h^R(x, y; x_{01}, y_{01}) h^R(x, y; x_{02}, y_{02})] dx_{01} dy_{01} dx_{02} dy_{02} \right\rangle. \quad (17)
\end{aligned}$$

根据假设 (2), 交换式 (16) 和 (17) 中均值和积分的运算顺序, 注意到式 (9) 和 (13), 这样式 (16) 和 (17) 最后运算结果有:

$$\begin{cases} \langle [A^R(x, y)]^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0 S}{\lambda Z} \right)^2 \\ \left[1 - e^{-2\sigma_\phi^2} \sin^2 \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right] T^2(x, y), \\ \langle [A^I(x, y)]^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0 S}{\lambda Z} \right)^2 \\ \left[1 + e^{-2\sigma_\phi^2} \cos^2 \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right] T^2(x, y). \end{cases} \quad (18)$$

注意到式 (15), 进而有散斑复振幅实部和虚部的方差分别为:

$$\begin{cases} \sigma_{A^R}^2(x, y) = \langle [A^R(x, y)]^2 \rangle - \langle A^R(x, y) \rangle^2 = \left(\frac{A_0 S}{\lambda Z} \right)^2 \\ \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - e^{-2\sigma_\phi^2} \cos \left(2\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right] - \right. \\ \left. e^{-\sigma_\phi^2} \sin^2 \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right\} T^2(x, y), \\ \sigma_{A^I}^2(x, y) = \langle [A^I(x, y)]^2 \rangle - \langle A^I(x, y) \rangle^2 = \left(\frac{A_0 S}{\lambda Z} \right)^2 \\ \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + e^{-2\sigma_\phi^2} \cos \left(2\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right] - \right. \\ \left. e^{-\sigma_\phi^2} \cos^2 \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right\} T^2(x, y) \end{cases} \quad (19)$$

从式 (19) 可见, 散斑复振幅的实部和虚部的方差也互不相等, 这与强散射条件下的结果也不同。

2 讨论

当振幅为 A_0 的超声波均匀地辐照在界面上时, 同样设辐照区域 Σ 是中心对称边长 L_{x_0}, L_{y_0} 的矩形域, 或直径为 D_0 的圆域。

2.1 高斯型弱散射界面变化为光滑界面时空间散射声场复振幅特性的变化

当超声辐照在光滑界面上时, 在 Fraunhofer 近似条件下, 距界面 z 处的平行观察面 $O-xy$ 上的声场复振幅等于^[9]:

$$A_g(x, y) = \frac{\exp \left(j \frac{2\pi}{\lambda} z \right)}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] T(x, y). \quad (20)$$

声场复振幅的实部和虚部的均值分别是:

$$\begin{cases} \langle A_g^R(x, y) \rangle = \frac{A_0 S}{\lambda Z} \sin \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) T(x, y), \\ \langle A_g^I(x, y) \rangle = \frac{A_0 S}{\lambda Z} \left[-\cos \left(\pi \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\lambda z} \right) \right] T(x, y). \end{cases} \quad (21)$$

对于观测面上任一 P 点, 由于其上超声复振幅是一个常量, 而不是随机变量, 因此, 其声场复振幅的实部和虚部的方差均为零, 即有:

$$\sigma_{gA^R}^2(x, y) = \sigma_{gA^I}^2(x, y) = 0. \quad (22)$$

作为对照, 在本文式 (15) 和 (19) 中, 令 $\sigma_\phi^2 \rightarrow 0$, 即高斯弱散射界面变化为平滑界面, 这时式 (15) 和 (19) 就等同于式 (21) 和 (22), 也就是说, 变化后的界面空间散射声场的特性与光滑界面的完全一致。

2.2 高斯型弱散射界面变化为强散射界面时空间散斑复振幅特性的变化

当超声辐照在强散射界面上时, 根据文献 6, 强散射界面空间散斑复振幅的实部和虚部的均值恒为零, 即有:

$$\langle A_q^R(x, y) \rangle = \langle A_q^I(x, y) \rangle = 0. \quad (23)$$

而它们的方差相等, 如文献 6 中的式 (4) 所示为:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, y) = & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \langle [A_0(x_0, y_0)]^2 \rangle |h(x, y; x_0, y_0)|^2 dx_0 dy_0 = \\ & \frac{1}{2} \langle \iint_{\Sigma} A_0(x_{01}, y_{01}) h^R(x, y; x_{01}, y_{01}) dx_{01} dy_{01} \iint_{\Sigma} A_0(x_{02}, y_{02}) h^R(x, y; x_{02}, y_{02}) dx_{02} dy_{02} + \\ & \iint_{\Sigma} A_0(x_{01}, y_{01}) h^I(x, y; x_{01}, y_{01}) dx_{01} dy_{01} \iint_{\Sigma} A_0(x_{02}, y_{02}) h^I(x, y; x_{02}, y_{02}) dx_{02} dy_{02} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0 S}{\lambda Z} \right)^2 T^2(x, y). \end{aligned} \quad (24)$$

作为对照, 在本文式 (15) 和 (19) 中, 令 $\sigma_\phi^2 \rightarrow \infty$, 即高斯型弱散射界面变化为强散射界面, 这时式 (15) 和 (19) 就等同于式 (23) 和 (24), 也就是说, 变化后的界面空间散斑的特性与强散射界面的完全一致。

3 结论

超声入射在不同结构的界面上时, 其背向散射空间中散斑复振幅的统计特性也不同。根据连续界面条件, 本文的理论分析和推导得出了, 当超声入射到高斯型弱散射界面上时, 其背向散射超声散斑复振幅实部和虚部的均值和方差的函数表示式。进一步的分析表明, 当高斯界面的粗糙程度逐渐变小成光滑界面, 这时背向散射声场复振幅实部和虚部的均值和方差的表示式与光滑界面反射条件下的完全一致。而当高斯界面的粗糙程度逐渐变大成强散射界面, 这时背向散射超声散斑复振幅实部和虚部的均值和方差的表示式与强散射界面散射条件下的完全吻合。

由于设备和工艺的原因, 无法制作成表面高度为高斯分布的弱散射粗糙界面的实验模型, 因此无法对本文的理论分析结果进行直接的实验验证, 但文中第三部分的讨论结果间接地证实了本文理论分析结果的合理性。另外, 在自然界中, 一些界面, 如某些沙漠地区、某些特定的海面, 它们相对电磁波或声波, 可近似看作为高斯型弱散射界面。因此, 本文

的研究具有一定的现实意义。

参 考 文 献

- 1 Dickinson R J. Reflection and scattering. In: Physical principle of medical ultrasonics. Hill C R editor, Ellis Horwood, 1986
- 2 Wagner R F, Insana M F, Brown D G. Statistical properties of radio-frequency and envelope-detected signals with applications to medical ultrasound. *J. Opt. Soc. Amer.*, 1987; 4(2): 910—922
- 3 Li W, John M R, Shankar P M, Kawan S, Lu X M. Nonuniform phase distribution in ultrasound speckle analysis—part 1: background and experimental demonstration. *IEEE. Trans. on UFFC.*, 1992; 39(3): 352—365
- 4 Georgiou G, Cohen F. Statistical characterization of diffuse scattering in ultrasound images. *IEEE. Trans. on UFFC.*, 1998; 45(1): 57—64
- 5 Goodman J W. Statistical properties of laser speckle patterns. In: Laser speckle and related phenomena, Dainty J C editor, Springer-Verlag, 1975
- 6 朱鸿茂, 刘永辉, 胡 鹏, 刘 纯. 界面反射超声散斑统计特性. *声学学报*, 2002; 27(3): 211—217
- 7 Hong Z K, Han J B. Consideration on speckle pattern interferometry of ultrasonic speckles. *Ultrasonics*, 1997; 35(4): 329—332
- 8 刘次华. 随机过程. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000
- 9 Goodman J W. Introduction to Fourier optics. McGraw-Hill, 1968
- 10 Eckhart J H. The scattering of sound from the sea surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1953; 25(3): 556—563