

声学学报创刊 40 周年纪念论文

运动声源与接收器的脉冲简正波传播^{*}

张仁和 黄晓砥 宫在晓

(中国科学院声学研究所声场声信息国家重点实验室 北京 100080)

2004 年 3 月 19 日收到

2004 年 4 月 16 日定稿

摘要 基于简正波声场理论, 导出了声源和接收器运动情况下窄带脉冲声传播的表式。分析了窄带脉冲声的单个简正波 Doppler 频移特性。通过研究接收与发射脉冲信号的相关, 给出了窄带脉冲信号的 Doppler 匹配条件以及 Doppler 频移补偿间隔的一般表式。浅海 55 km 的 Doppler 频移补偿实验验证了理论结果。

PACS 数: 43.30

Normal mode propagation of impulsive sound with the moving source and receiver

ZHANG Renhe HUANG Xiaodi GONG Zaixiao

(National Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, The Chinese Academy of Sciences Beijing 100080)

Received Mar. 19, 2004

Revised Apr. 16, 2004

Abstract A representation of impulsive sound propagation with the moving source and receiver in ocean waveguides is derived based on the normal mode theory. The Doppler frequency shift of individual normal mode of narrow-band pulse is analyzed. By studying the correlation between emitted and received signals, the Doppler matched condition and the Doppler compensation interval are obtained. An experiment of long-range impulse propagation at 55 km in shallow water is to verify for testing the theoretical results of the Doppler shift compensation.

引言

脉冲声在有源探测和水声通信等许多领域有广泛的应用。声源与接收器运动的情况下, 有源声纳和水声移动通信系统首先需要考虑克服脉冲声 Doppler 效应的不利影响, 以便获取更多有用信息。现有的脉冲声 Doppler 频移分析方法是均以均匀介质的声传播理论为基础, 一般只考虑声源和接收器相对运动的频移效应。而分层介质中的多简正波传播及色散效应使得脉冲声信号的 Doppler 频移比均匀介质中复杂得多。在 Doppler 频移声场理论方面, Guthrie^[1] 等和 Hawker^[2] 提出了运动声源的 Doppler 效应的简正波模型, 但这个模型中没有考虑接收器运动的影响。在此基础上, Schmidt & Kuperman^[3] 提出了更为完善的 Doppler 频移简正波声场模型。与简谐波的声场理论相比, 对脉冲声传播 Doppler 频移规律的深入研究

相对较少。掌握脉冲声传播 Doppler 频移规律, 有助于理解波导中脉冲声传播的 Doppler 现象, 是提高相应水声系统性能的基础。

基于 Schmidt & Kuperman 给出的海洋波导中运动声源与接收器的声场简正波谱表式, 本文分析窄带脉冲声在海洋波导中的传播, 给出了窄带简正波脉冲的 Doppler 匹配条件以及 Doppler 频移补偿间隔的一般表式。我们在距离 55 km 进行了远程脉冲声浅海传播实验, 用不同 Doppler 补偿的拷贝发射信号与接收信号进行匹配滤波, 验证了理论结果的合理性。

1 运动声源与接收器的脉冲声简正波表式

如图 1 所示, 声源和接收器在零时刻位置分别为 $(r = r_0, z = z_s)$ 和 $(r = 0, z = z_r)$ 。假定二者匀速

* 国家自然科学基金资助项目 (19734050)

运动, 其径向速度分别为 v_s 与 v_r , 深度保持不变。声源在运动过程中发射脉冲信号。在分层介质中, 声源与接收器运动产生两种 Doppler 效应^[3], 一种是通常的 Doppler 频移, 它取决于声源与接收器的相对径向速度与简正波相速之比; 另一种是 Doppler 波数偏移 (或本征值偏移), 它由接收器径向速度与简正波群速之比确定。

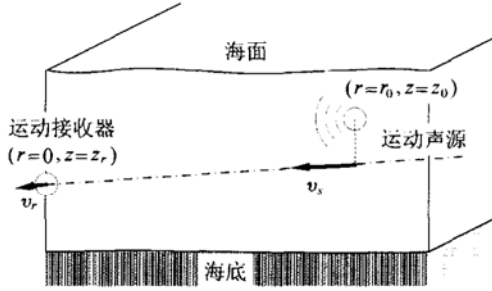


图 1 海洋波导中运动声源和接收器示意

根据 Schmidt & Kuperman^[3] 推导的运动声源与接收器 Doppler 频移简正波谱表式, 接收脉冲的频谱可表示为

$$P(r, z_s, z_r; \omega) \cong \sqrt{\frac{8\pi}{r}} e^{i\pi/4} \sum_l S[\omega(1 + \gamma_p)] \Psi_l(z_s, \omega) \Psi_l(z_r, \omega) \sqrt{\mu_l(\omega)} \exp[i\mu_l(\omega)(1 + \gamma_g)r_0 - \beta_l(\omega)r], \quad (1)$$

式中 $S(\omega)$ 为发射脉冲信号的频谱, μ_l 与 β_l 是简正波水平波数与衰减系数, Ψ_l 是本征函数,

$$r = r_0 + v_r t. \quad (2)$$

公式 (1) 中 γ_p 是相对运动速度 $(v_r - v_s)$ 与简正波相速 $v_{l,p}$ 之比, γ_g 是接收器径向速度 v_r 与简正波群速 $v_{l,g}$ 之比, 即:

$$\gamma_p = \frac{v_r - v_s}{v_{l,p}}, \quad (3)$$

$$p_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S[\omega(1 + \gamma_p)] \exp[i\mu_l(\omega)(1 + \gamma_g)r_0 - i\omega t] d\omega = \frac{1}{1 + \gamma_p} \int A(\omega) \exp\left[i\mu_l\left(\frac{\omega + \omega_0}{1 + \gamma_p}\right)(1 + \gamma_g)r_0 - i\frac{\omega + \omega_0}{1 + \gamma_p}t\right] d\omega, \quad (11)$$

公式 (11) 中后一积分的有效范围为 $-\pi B/(1 + \gamma_p) < \omega < \pi B/(1 + \gamma_p)$ 。对于窄带信号, 当 $(\pi B/2)\dot{\mu}_l(\omega_0)/(1 + \gamma_p)r_0 \ll 1$ 时, 略去高阶小量, 将水平波数 μ_l 近似表示为

$$\mu_l\left(\frac{\omega + \omega_0}{1 + \gamma_p}\right) \cong \mu_l\left(\frac{\omega_0}{1 + \gamma_p}\right) + \frac{\omega}{1 + \gamma_p} \dot{\mu}_l\left(\frac{\omega_0}{1 + \gamma_p}\right), \quad (12)$$

式中 $\dot{\mu}_l = d\mu_l/d\omega$ 和 $\ddot{\mu}_l = d^2\mu_l/d\omega^2$ 。利用关系 (6) 与 (7) 得:

$$\mu_l(\omega_0) = \omega_0/v_{l,p}(\omega_0), \quad (13)$$

$$\dot{\mu}_l(\omega_0) = 1/v_{l,g}(\omega_0). \quad (14)$$

$$\gamma_g = \frac{v_r}{v_{l,g}}. \quad (4)$$

对于水声中的实际问题, $|\gamma_p|$ 与 $|\gamma_g|$ 皆远小于 1, 即:

$$|\gamma_p| \ll 1, \quad |\gamma_g| \ll 1. \quad (5)$$

简正波的相速和群速可以表示为

$$v_{l,p} = \frac{\omega}{\mu_l(\omega)}, \quad (6)$$

$$v_{l,g} = \frac{d\omega}{d\mu_l(\omega)}, \quad (7)$$

对于有源探测和水声移动通信常用的窄带脉冲声信号, 其复信号 $s(t) = a(t)e^{-i\omega_0 t}$ 是复包络 $a(t)$ 与载波的乘积, 载波的中心频率 $f_0 = \omega_0/2\pi$ 。根据窄带信号的性质, 复包络的频谱 $A(\omega)$ 主要能量集中在 $(-\pi B, \pi B)$ 范围内, 即带宽有限, 且满足

$$\frac{2\pi B}{\omega_0} = \frac{B}{f_0} \ll 1, \quad (8)$$

式中 $2B$ 为脉冲包络的频带宽度。于是, 窄带信号的频谱可表示为:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{i\omega t} dt = A(\omega - \omega_0). \quad (9)$$

将频谱表式 (1) 变换为时域形式, 考虑到脉冲信号的窄带性质, 则接收信号为

$$p(t) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i\pi/4} \sum_l \Psi_l(z_s, \omega_0) \Psi_l(z_r, \omega_0) \sqrt{\mu_l(\omega_0)} \exp[(-\beta_l(\omega_0)r)p_l(t)], \quad (10)$$

其中 $p_l(t)$ 为单个简正波的脉冲波形。波导中的接收脉冲是多简正波传播的结果, 不同简正波的相速和群速差异会使接收信号表现出多径传播的特点。其中, 单个简正波脉冲 $p_l(t)$ 的表式为

将公式 (12) - (14) 代入公式 (11), 得

$$p_l(t) = \frac{1}{1 + \gamma_p} a\left[\frac{1}{1 + \gamma_p}(t - \tau_g)\right] \exp\left[-\frac{i\omega_0}{1 + \gamma_p}(t - \tau_p)\right], \quad (15)$$

式中

$$\tau_g = r_0(1 + \gamma_g)/v_{l,g}[\omega_0/(1 + \gamma_p)], \quad (16)$$

$$\tau_p = r_0(1 + \gamma_g)/v_{l,p}[\omega_0/[\omega_0(1 + \gamma_p)]]. \quad (17)$$

公式 (15) 表明单个简正波脉冲的传播有如下特征:

征:

(1) 窄带脉冲信号的单个简正波包络按群速传播, 载波按相速传播。

(2) 声源与接收器相对运动产生的 Doppler 频移使信号的时间轴乘以因子 $1/(1+\gamma_p)$ (时间压缩因子)。

(3) 简正波相速与群速取 Doppler 频移后频率的对应值。

从公式 (10) 和 (15) 还可以看出, 海洋波导中传播的脉冲声其 Doppler 频移与均匀介质中不同, 各简正波的 Doppler 频移与其相速和群速有关, 脉冲的不同简正波波包有不同的 Doppler 频移。

2 窄带简正波脉冲声的 Doppler 匹配条件

我们来分析经 Doppler 频移后接收信号与发射信号的相关。一般情况下, 运动引起接收信号与发射信号相关下降表现为两个方面, 一是窄带脉冲载波的 Doppler 频移, 另一方面是窄带包络的时间压缩。发射信号 $s(t)$ 与单个简正波脉冲信号 $p_l(t)$ 的归一化相关函数为

$$R(\tau) = \frac{\left| \int_0^T s(t) p_l^*(t+\tau) dt \right|}{\sqrt{\int_0^T s(t) s^*(t) dt \int_0^T p_l(t) p_l^*(t) dt}} \quad (18)$$

将 $s(t) = a(t)e^{-i\omega_0 t}$ 与公式 (15) 代入 (18), 并令 $\tau = \tau_g$, 得

$$R(\tau_g) = \frac{\left| \int_0^T a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \exp \left[\frac{-i\omega_0 t \gamma_p}{1+\gamma_p} \right] dt \right|}{\sqrt{\int_0^T a(t) a^*(t) dt \int_0^T a \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) dt}} \quad (19)$$

因子 γ_p 为声源与接收器相对速度与简正波的相速之比, 一般 $|\gamma_p| \ll 1$, 因此有

$$\int_0^T a \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) dt = \frac{1}{1+\gamma_p} \int_0^{T(1+\gamma_p)} a(t) a^*(t) dt \cong \int_0^T a(t) a^*(t) dt. \quad (20)$$

于是公式 (19) 简化为

$$R(\tau_g) = \frac{\left| \int_0^T a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \exp \left[\frac{-i\omega_0 t \gamma_p}{1+\gamma_p} \right] dt \right|}{\int_0^T a(t) a^*(t) dt} \quad (21)$$

将复包络 $a(t)$ 表示为

$$a(t) = |a(t)| e^{i\varphi(t)}. \quad (22)$$

此处 $\varphi(t)$ 是复包络的相位函数。由于 $|\gamma_p| \ll 1$, 可得近似表式:

$$a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \cong \left| a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \right| \exp \left(\frac{-it\Omega(t)\gamma_p}{1+\gamma_p} \right), \quad (23)$$

式中 $\Omega(t) = d\varphi(t)/dt$ 是复包络 $a(t)$ 的瞬时圆频率, 其有效范围为 $(-\pi B, \pi B)$ 。将公式 (23) 代入 (21) 的分子上的积分, 得

$$\int_0^T a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \exp \left[\frac{-i\omega_0 t \gamma_p}{1+\gamma_p} \right] dt = \int_0^T \left| a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \right| e^{-i\Phi(t)} dt, \quad (24)$$

其中:

$$\Phi(t) = [\omega_0 + \Omega(t)] \frac{t\gamma_p}{1+\gamma_p}. \quad (25)$$

附录 A 证明, 当

$$\left| [\omega_0 + \pi B] T \frac{\gamma_p}{1+\gamma_p} \right| < \frac{\pi}{2} \quad (26)$$

时有

$$\int_0^T \left| a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \right| e^{-i\Phi(t)} dt > \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^T \left| a(t) a^* \left(\frac{t}{1+\gamma_p} \right) \right| dt \cong \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^T |a(t) a^*(t)| dt. \quad (27)$$

公式 (27) 的后一步近似利用了 $|\gamma_p| \ll 1$ 。将公式 (27) 代入 (21), 当满足条件 (26) 时有

$$R(\tau_g) > \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (28)$$

公式 (28) 表明, 当满足条件 (26) 时接收到的简正波脉冲与发射信号是相关的 (相关值大于 $\sqrt{2}/2$)。因此, 条件 (26) 是实现 Doppler 匹配的充分条件。注意到窄带条件 (8), 公式 (26) 中的 πB 项可忽略, 其物理意义表示包络的时间压缩对相关的影响远小于载波失配的影响。因此, Doppler 匹配条件 (26) 可简化为

$$\left| \omega_0 T \frac{\gamma_p}{1+\gamma_p} \right| < \frac{\pi}{2}. \quad (29)$$

再考虑到 $|\gamma_p| \ll 1$ 以及简正波相速 $v_{l,p}$ 与海水声速 c 十分接近, 有 $\gamma_p \cong (v_r - v_s)/c = \gamma$ 。于是, 窄带脉冲的 Doppler 匹配条件可近似写为

$$f_0 T |\gamma| < \frac{1}{4}. \quad (30)$$

简正波的相速一定程度地决定了 Doppler 频移。各号简正波相速不同, 导致各号简正波有不同的 Doppler 频移。大多数浅海情况下, 声场中简正波的相速随简正波号数增加而增加。由上面的推导可知,

若第一号简正波满足 Doppler 匹配条件, 则其它各号简正波都满足 Doppler 匹配条件, 且不发生简正波之间的 Doppler 失配。

3 Doppler 匹配条件的物理意义与应用

将波长和频率的关系 $\lambda = c/f_0$ 以及 $\gamma = (v_r - v_s)/c$ 代入公式 (30), Doppler 匹配条件 (30) 可改写为

$$T|v_r - v_s| < \frac{\lambda}{4}. \quad (31)$$

因此, Doppler 匹配条件的物理意义为: 当脉冲持续时间内声源与接收器相对移动的距离 $T|v_r - v_s|$ 小于 $1/4$ 波长时, 发射信号与经 Doppler 频移的接收信号的相关值大于 $\sqrt{2}/2$, 也就是发射信号与接收信号 Doppler 匹配。

$$R(\tau_g) = \frac{\left| \int_0^T a\left(\frac{t}{1+\gamma_s}\right) a^*\left(\frac{t}{1+\gamma}\right) \exp\left[-i\omega_0 t \left(\frac{\gamma_s}{1+\gamma_s} - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\right] dt \right|}{\sqrt{\int_0^T a\left(\frac{t}{1+\gamma_s}\right) a^*\left(\frac{t}{1+\gamma_s}\right) dt \int_0^T a\left(\frac{t}{1+\gamma}\right) a^*\left(\frac{t}{1+\gamma}\right) dt}}. \quad (33)$$

与上节的讨论相似, 若 $|\gamma_s| \ll 1$ 与 $|\gamma| \ll 1$, 当

$$\omega_0 T |\gamma - \gamma_s| < \frac{\pi}{2} \quad (34)$$

时, 有 $R(\tau_g) > \sqrt{2}/2$ 。即 Doppler 频移补偿偏差满足条件 (34) 时, 拷贝信号 $s'(t)$ 与接收信号相匹配。令

$$\Delta\gamma_s = 2|\gamma - \gamma_s| = \frac{\pi}{\omega_0 T} = \frac{1}{2f_0 T}, \quad (35)$$

称 $\Delta\gamma_s$ 为 Doppler 频移补偿间隔。显然, 只要以间隔 $\Delta\gamma_s$ 依次取不同的 γ_s 值,

$$\gamma_s = l\Delta\gamma_s, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L, \quad (36)$$

总可以找到一个与接收信号相匹配的 γ_s 。例如, 声源与接收器的最大相对速度 $|v_r - v_s| = 15 \text{ m/s}$, 则 $\gamma = 0.01$; 若窄带脉冲中心频率 $f_0 = 5000 \text{ Hz}$, 脉冲持续时间 $T = 1 \text{ s}$, 则 $\Delta\gamma_s = 1.0 \times 10^{-4}$, $L = \gamma/\Delta\gamma_s = 100$, 即需要 201 个不同的 Doppler 频移补偿值才能够实现拷贝发射信号与未知 Doppler 频移的接收信号相匹配。

4 Doppler 频移补偿实验

我们于 2000 年 11 月进行了一次远程脉冲声传播实验。实验时海水为等温层, 海水声速为 1501 m/s 。发射船与接收船水平距离为 55 km , 两船之间海深随距离变化不大, 大致为 40 m 。接收器深度 16 m , 声源深度 10 m , 接收与发射距离间的传播损失为 79 dB 。

条件 (31) 表明, 给定了载波频率 f_0 与脉冲持续时间 T 时, 对声源与接收器的相对运动速度有一定限制。但实际中, 接收器与声源间的相对运动速度往往较大。设想一种情况, 声源与接收器的相对速度与声速的比值 $\gamma = (v_r - v_s)/c$ 远远超出条件 (30) 的限制。但如果使发射脉冲的拷贝信号产生同样的 Doppler 频移, 即经频移的拷贝发射信号为

$$s'(t) = \frac{1}{1+\gamma} s\left(\frac{t}{1+\gamma}\right), \quad (32)$$

拷贝信号 $s'(t)$ 与接收信号有相同的 Doppler 频移, 其相关的最大值为 1。用它来与接收信号进行匹配, 仍可实现匹配接收。在实际应用中, 若声源与接收器的相对速度未知, 由前面的讨论可知, 当以某一 γ_s 补偿拷贝发射信号时, 补偿后的拷贝信号与接收信号的相关值为

在 475 Hz 附近背景噪声的谱级为 87 dB (参考值为 $1 \mu\text{Pa}$)。声源级为 187 dB (参考值为距声源 1 m 处, $1 \mu\text{Pa}$)。发射信号为扩频伪随机编码信号, 中心频率为 475 Hz , 伪随机序列为 9 阶本原多项式的 511 码元 M 序列。单个码元时长 0.0211 s , 整个信号时长 10.7579 s 。实验中两船的相对距离缓慢增加, 相对速度约为 0.4 m/s 。两船相对运动过程中, 接收船记录发射船发出的扩频 M 序列信号。

为了对 Doppler 频移的接收信号实现匹配滤波, 按式 (32) 补偿发射信号, 其中 γ_s 取值从 -8.3×10^{-5} (对应于相对速度 -0.125 m/s) 至 4.5×10^{-4} (对应于相对速度 0.675 m/s), 步长 1.67×10^{-5} (对应于相对速度 0.025 m/s), 共 33 个频移补偿值。将不同 Doppler 频移补偿的拷贝信号 $s'_i(t)$ 分别与接收信号进行匹配滤波, 得到图 2 的结果, 图中的每条曲线对应不同的 Doppler 频移补偿值。

当补偿速度为 0.35 m/s ($\gamma_s = 2.33 \times 10^{-4}$) 时, 发射船与接收船的相对运动得到最佳补偿, 这时匹配滤波的结果有最高的信噪比。图 3 中给出了不同 Doppler 频移补偿后匹配滤波的峰值与噪声电平的比值, 图中“□”为 33 个不同补偿的峰值与噪声电平比值, 竖实线位置为 0.35 m/s , 对应于最大值。根据公式 (35), 实验信号的 Doppler 补偿间隔 $\Delta\gamma_s$ 为 9.74×10^{-5} , 对应的相对速度间隔为 $\Delta v = 0.1462 \text{ m/s}$, 图中两条虚线位置的相对速度与竖实线处相差 0.0731 m/s ($\Delta v/2$)。

在两条虚线范围内匹配峰值与噪声电平之比大于最大值的 $\sqrt{2}/2$ 倍。这说明, 根据式 (35) 给出的 Doppler 补偿间隔搜索 Doppler 频移, 可以实现对接收信号的 Doppler 补偿。

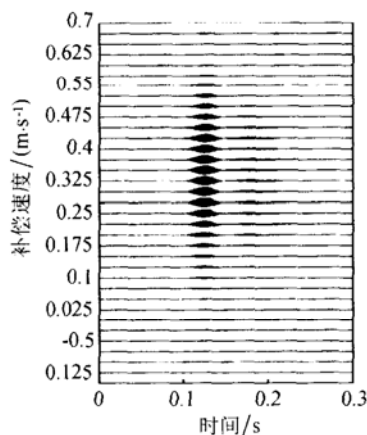


图 2 不同 Doppler 补偿的匹配滤波结果

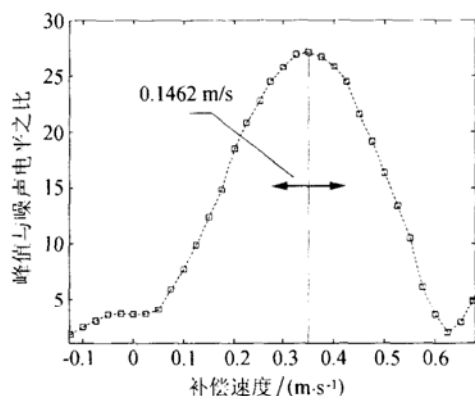


图 3 不同补偿的匹配滤波峰值与噪声电平之比

从图 2 和图 3 的实验结果还可以看出, 完全补偿 Doppler 频移的匹配滤波结果的峰值与噪声电平的比值为 27.5 (信噪比约为 29 dB), 这时匹配滤波可以获得很高的时间处理增益。

5 总结

文中给出了 Doppler 频移的窄带脉冲声传播简正波表式, 从简正波理论的角度研究了运动声源和接收器的窄带脉冲声的 Doppler 频移规律。结果表明:

(1) 声源与接收器的运动对窄带信号的载波与包络有不同的影响, 载波的 Doppler 频移由声源与接收器的相对速度和简正波相速之比决定, 包络的时间压缩因子仅由接收器运动速度和简正波群速之比决定; 窄带信号的载波按简正波相速传播, 包络按简正波群速传播。

(2) 接收信号与发射信号的相关对声源与接收器相对运动产生的 Doppler 频移十分敏感。在满足 Doppler 匹配条件 (26) 时, 频移后的接收信号与发射是相关的。否则, 要实现 Doppler 匹配, 须按公式 (35) 的 Doppler 频移补偿间隔搜索 Doppler 频移补偿量。

(3) Doppler 频移补偿可显著提高匹配接收的信噪比, 对于水声应用有着重要的价值。

(4) Doppler 频移补偿实验验证了理论结果。

附录 A: 式 (27) 的证明

设实函数 $a(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, 只要证明积分

$$\left| \frac{\int_0^{\pi/2} a(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi}{\int_0^{\pi/2} a(\varphi) d\varphi} \right|^2 > \frac{1}{2}. \quad (\text{a1})$$

则式 (27) 即可成立。将 (a1) 的左边的两个积分写为

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} a(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi \right|^2 &= \left[\int_0^{\pi/2} a(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right]^2 + \left[\int_0^{\pi/2} a(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right]^2 \geq \\ &\frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} a(\varphi) \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} a(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right]^2, \quad (\text{a2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{\pi/2} a(\varphi) d\varphi \right]^2 &= \left[\int_0^{\pi/2} a(\varphi) \cos^2 \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} a(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi \right]^2 < \\ \left[\int_0^{\pi/2} a(\varphi) \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} a(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right]^2, \quad (\text{a3}) \end{aligned}$$

在公式 (a2) 中利用了关系 $A^2 + B^2 \geq \frac{1}{2}(A+B)^2$ 。将 (a2) 与 (a3) 代入 (a1), 则命题获证。

参 考 文 献

- 1 Guthrie A N, Fitzgerald R M, Nutile D A, Shaffer J D. Long-range low-frequency CW propagation in the deep ocean: Antigua-Newfoundland. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1974; **56**(1): 58—64
- 2 Hawkwe K E. A normal mode theory of acoustic Doppler effects in the oceanic waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1979; **65**(3): 675—681
- 3 Schmidt H, Kuperman W A. Spectral and modal representations of the Doppler-shifted field in ocean waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994; **96**(1): 386—395