

声辐射问题中的模态分析: III. 声场重构*

姜 哲

(江苏大学振动噪声研究所 镇江 212013)

2003 年 5 月 14 日收到

2004 年 6 月 21 日定稿

摘要 声辐射模态是定义在振动表面上的一组互相独立的基函数, 描绘了振动表面的多极子辐射模式。声场分布模态是定义在声场中的一组互相独立的基函数, 描绘了多极子辐射的声场分布模式。振动表面的声辐射可以唯一地用声辐射模态和声场分布模态展开表示。对于声场重构, 关键问题就是确定展开系数。在声场中选择 N 个测量点, 测量声场的有关声学信息, 求解展开系数, 从而重构整个声场。针对平板辐射和球形声源辐射的声场进行重构, 数值计算的结果与理论分析结果一致。
PACS 数: 43.20

A modal analysis for the acoustic radiation problems:

III. Reconstruction of acoustic fields

JIANG Zhe

(Vibration and Noise Research Division, Jiangsu University Zhenjiang 212013)

Received May 14, 2003

Revised Jun. 21, 2004

Abstract The acoustic radiation modes constitute a set of independent basis functions defined on the vibrating surface and describe the radiation patterns of multi-pole. The field distribution modes constitute a set of independent basis functions defined on the radiation field and describe the distribution patterns of multi-pole radiation. The radiation from the vibrating surface can be uniquely expressed in terms of the acoustic radiation modes or the field distribution modes. For reconstruction of acoustic fields, the key is to determine the expansion coefficients. At N measurement points in the acoustic field, measuring the acoustic information, the expansion coefficients can be determined and the total acoustic field can be reconstructed. For the radiation of a plate and a sphere, the acoustic fields are reconstructed, and the numerical calculation results agree with the theoretic results

引言

有很多种方法用于声场重构的研究。近场声全息^[1-3](Near-field Acoustic Holography) 采用传声器组成的测量阵列, 测量近场某一平面上的声学信息, 应用 FFT 变换技术, 重构整个声场的完整信息。在实践中, 针对形状比较简单的声源, 理论与实验结果取得比较好的一致。基于 Helmholtz 积分方程, 应用边界元技术, 同样可进行声场重构^[4-6]。近年来, 采用一组基函数的线性展开来表示振动表面辐射的声场。当展开系数确定后, 可重构整个声场^[7,8]。这

种声场重构方法需要选择一组基函数。针对复杂声源, 如果所选择的基函数不能充分反映复杂声源的辐射性质, 那么应用受到限制。

在文献 9 中, 提出了声辐射模态和声场分布模态, 分别描述了振动表面的辐射模式和声场的分布模式, 可作为基函数。文献 10 揭示了声辐射模态和声场分布模态的物理意义, 声辐射模态和声场分布模态反映了复杂声源的辐射性质, 包含了复杂声源的几何形状的影响。辐射声场的信息可采用声辐射模态和声场分布模态展开表示, 以此本文讨论声场重构。

* 国家自然科学基金资助项目 (50075036)

1 声场重构

任意形状的振动表面 S 以圆频率 ω 振动, 向无界空间 V 辐射声。在空间 V 中充满均匀介质, 介质的密度为 ρ , 声速为 c 。振动表面 S 的声辐射模态 $\varphi_i(X)$ ($i = 1, 2, \dots$) 是振动表面 S 上的一组实连续函数, 物理意义上表示了振动表面 S 的多极子辐射^[9,10], 其中 X 为 S 上的任意点。基于声辐射模态 $\psi_i(Y, \omega)$ ($i = 1, 2, \dots$) 描述了辐射声场的多极子分布模式^[9,10],

$$\psi_i(Y, \omega) = \frac{jk}{2\pi} \iint_S \varphi_i(X) G(X, Y, \omega) dS(X), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, Y \in V$$

其中:

$$G(X, Y, \omega) = \frac{e^{-jk r(X, Y)}}{r(X, Y)}, \quad (2)$$

$j = \sqrt{-1}$, $k = \omega/c$, $r(X, Y)$ 为 S 上点 X 与声场 V 中点 Y 之间的距离。

声辐射模态 $\varphi_i(X)$ 和声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 分别描述了振动表面的辐射模式和声场的分布模式, 包含振动表面几何形状的影响, 都是互相独立的函数, 分别构成了两组基函数。辐射声场的声学量可以用声辐射模态 $\varphi_i(X)$ 或声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 展开表示^[9]。展开表示是唯一的, 且是收敛的。因此当 $i \rightarrow \infty$ 时, 展开系数趋于零。物理意义上声辐射模态 $\varphi_i(X)$ 和声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 描述了多极子辐射模式^[10]。随着模态阶数 i 越高, 高阶模态对声场的贡献越小, 声辐射性质主要集中在低阶模态上。设振动表面 S 的法向振速分布为 $U(X, \omega)$, 辐射声场中的声压为 $P(Y, \omega)$, 质点速度为 $U(Y, \omega)$, 采用模态截断, 取模态数为 MP , 展开表示分别为^[9]:

$$U(X, \omega) = \sum_{i=1}^{MP} v_i(\omega) \varphi_i(X) - \sum_{i=1}^{MP} v_i(\omega) \frac{1}{2\pi} \iint_S \varphi_i(Z) \frac{\partial}{\partial n_X} G(Z, X, \omega) dS(Z), \quad (3)$$

$$X \in S$$

$$\frac{P(Y, \omega)}{\rho c} = \sum_{i=1}^{MP} v_i(\omega) \psi_i(Y, \omega), \quad Y \in V, \text{ or } Y \in S, \quad (4)$$

$$U(Y, \omega) = \sum_{i=1}^{MP} v_i(\omega) \nabla \psi_i(Y, \omega), \quad Y \in V, \quad (5)$$

其中 $v_i(\omega)$ 是复展开系数, $\partial/\partial n_X$ 表示在 S 上点 X 处的外法向导数。重构声场的关键就是设法确定展开系数 $v_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, MP$ 。

在实际应用中, 可采用数值计算方法获得声辐射模态 $\varphi_i(X)$ 的离散表示。将振动表面 S 划分成 M 个小单元 S_i , $i = 1, 2, \dots, M$, 得到辐射算子的表示矩阵 R 。矩阵 R 的元素为:

$$R_{li} = \frac{(k_0^2 S_l)(k_0^2 S_i) \sin k_0 r_{li}}{2\pi(k_0^2 S) k_0 r_{li}}, \quad l, i = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

当 $i = l$ 时,

$$R_{ii} = \frac{(k_0^2 S_i)^2}{2\pi(k_0^2 S)}, \quad (7)$$

其中 S_l 和 S_i 分别为第 l 单元和第 i 单元的面积; S 为振动表面的面积; $k_0 = \omega_0/c$, ω_0 是给定的圆频率; r_{li} 是单元 S_l 的中心点与单元 S_i 的中心点之间的距离。矩阵 R 是实对称矩阵, 且矩阵 R 是正定的。不难得到矩阵 R 的实特征向量 ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, M$ 。特征向量 ϕ_i 按对应特征值从大到小排列。特征向量 ϕ_i 就是声辐射模态 $\varphi_i(X)$ 的离散表示^[9], 称为第 i 阶声辐射模态。如果用 ϕ_i 代替 $\varphi_i(X)$, 式 (1) 可利用数值积分完成, 获得声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 。

围绕振动表面 S , 在声场 V 中取 N 个测量点 Y_l , $l = 1, 2, \dots, N$ ($N \geq MP$)。在每一个测量点 Y_l 测量声压, 记为 P_l 。利用式 (4), 有

$$\frac{P_l}{\rho c} = \sum_{i=1}^{MP} v_i(\omega) \psi_i(Y_l, \omega), \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

令

$$\psi_{li} = \psi_i(Y_l, \omega), \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, MP. \quad (9)$$

则式 (8) 可写成矩阵形式,

$$\frac{P}{\rho c} = \psi v, \quad (10)$$

其中 $P/\rho c$ 为声压测量值构成的 N 维向量, v 是由展开系数 $v_i(\omega)$ 构成的 MP 维向量, ψ 是 $N \times MP$ 阶矩阵, 其元素由式 (9) 确定。

求出矩阵 ψ 的伪逆, 获得展开系数 v ,

$$v = \psi^+ \frac{P}{\rho c}. \quad (11)$$

将 v 代入式 (3), (4) 和 (5), 从而重构整个声场。

由式 (9) 可知, 矩阵 ψ 的 i 列是第 i 阶声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 在声场中 N 个测量点 Y_l 上的分布。虽然声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 是互相独立的函数, 但不能保证矩阵 ψ 不是病态的。式 (11) 的稳定性以及精度与矩阵 ψ 的最小奇异值有关。设矩阵 ψ 的奇异值为 σ_i , $i = 1, \dots, MP$, 将矩阵 ψ 进行奇异值分解,

$$\psi = V \Lambda W^H, \quad (12)$$

其中 Λ 为奇异值构成的矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{MP} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

V 和 W 为酉矩阵, 并且 $VV^H = I$ 以及 $WW^H = I$, “H” 表示 Hermite 转置. 于是式 (11) 可写成:

$$v = WA^+V^H \frac{P}{\rho c} = \sum_{i=1}^{MP} \frac{1}{\sigma_i} W_i V_i^H \frac{P}{\rho c}. \quad (14)$$

其中 W_i 和 V_i 分别是酉矩阵 W 和 V 的第 i 列. 因此式 (14) 的稳定性以及精度与矩阵 ψ 的最小奇异值有关. 矩阵 ψ 的 i 列是第 i 阶声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 在声场中 N 个测量点 Y_i 上的分布, 对声场贡献较小的声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 对应较小的奇异值 σ_i . 在式 (14) 中, 如果存在很小的奇异值 σ_i , 可忽略对应项的求和, 从而保证了式 (14) 的稳定性. 也可采用 Tikhonov 正则化方法^[11] 求解方程 (10), 获得展开系数 v ,

$$v = \sum_{i=1}^{MP} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \beta} W_i V_i^H \frac{P}{\rho c}, \quad (15)$$

其中 β 为正则化参数.

2 矩形平板辐射的声场

设振动表面 S 为正方形平板, 边长 $L = 0.4 \text{ m}$. 振动表面 S 以圆频率 ω 振动, 放置在无穷大刚性障板上 (xOy 平面), 向半空间 ($z \geq 0$) 辐射声. 以正方形平板中心为坐标原点, 建立坐标系, 如图 1 所示.

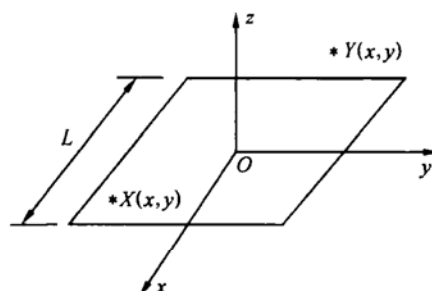


图 1 坐标系

将振动表面 S 划分成 M 个小单元, 根据式 (6) 和 (7) 可得矩阵 R . 选择 ω_0 , 使得 $k_0 L = 0.5$. 求出矩阵 R 的特征向量作为声辐射模态 ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, M$. 前 6 阶声辐射模态如图 2 所示. 将声辐射模态 ϕ_i 代入式 (1), 可得平板辐射的声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$. 声辐射模态 ϕ_i 和声场分布模态 $\psi_i(Y, \omega)$ 表示了声场的辐射模式.

正方形平板 S 辐射的声压可根据 Rayleigh 积分确定,

$$\frac{P(Y, \omega)}{\rho c} = \frac{jk}{2\pi} \iint_S U(X, \omega) G(X, Y, \omega) dS(X), \quad (16)$$

其中 Y 为声场中的任意一点, 坐标为 (x, y, z) , $z \geq 0$, $U(X, \omega)$ 为平板表面上的振速分布, X 为平板表面上的任意一点, 坐标为 (x, y) . 作为应用实例, 取振速分布为:

$$U(X, \omega) = U_0 \sin \left[\pi \frac{(x+L/2)}{L} \right] \sin \left[\pi \frac{(y+L/2)}{L} \right], \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad -\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2}, \quad (17)$$

其中 U_0 为幅值. 将式 (17) 代入式 (16), 辐射的声压为:

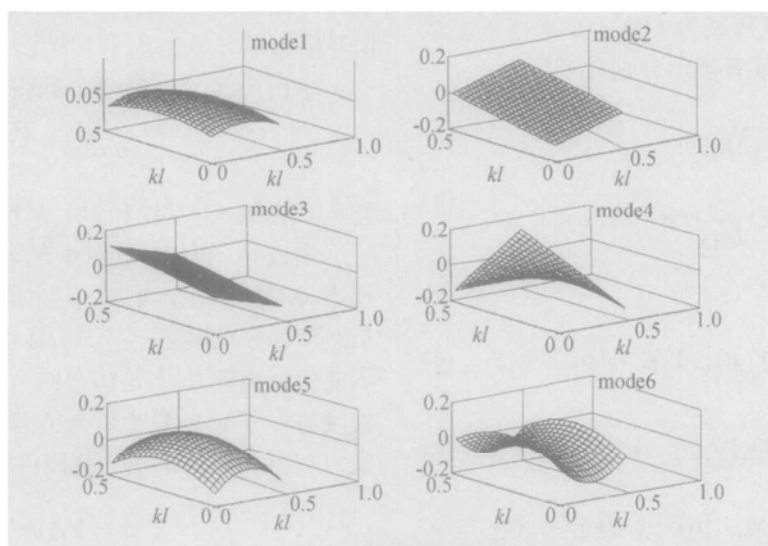


图 2 平板的声辐射模态

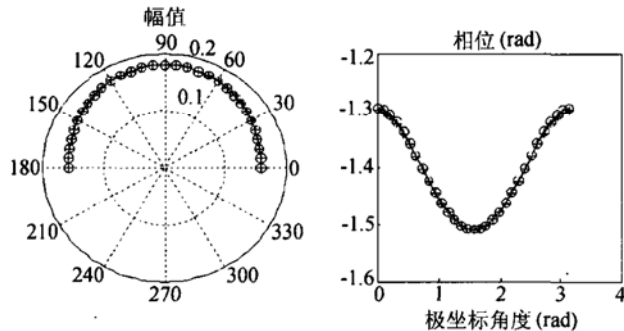
$$\frac{P(Y, \omega)}{\rho c} = \frac{j k U_0}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \sin \left[\pi \frac{(x+L/2)}{L} \right] \sin \left[\pi \frac{(y+L/2)}{L} \right] G(X, Y, \omega) dx dy. \quad (18)$$

取模态数 $MP = 8$ 。在辐射的声场中取坐标原点为中心, 半径 $r = 0.6 \text{ m}$ 的半球面作为测量面, 在此测量面均匀选择 $N = 9$ 个测量点 Y_l 。在每一个测量点 $Y_l, l = 1, 2, \dots, 9$, 根据式 (18) 计算声压 $P_l/\rho c$, 作为测量值, 构成向量 $P/\rho c$ 。对应测量点 Y_l 的矩阵 ψ 由式 (9) 确定。于是利用式 (11) 得到基于模态数 $MP = 8$ 的展开系数 v 。将 v 代入式 (4), 重构了辐射的声压场。在 yOz 平面上 ($z \geq 0$), 取以板的中心为坐标原点, 半径为 R 的半圆。在该半圆上, 采用无量纲声压 $P/\rho c U_0$, 分别将重构声压值的幅值和相

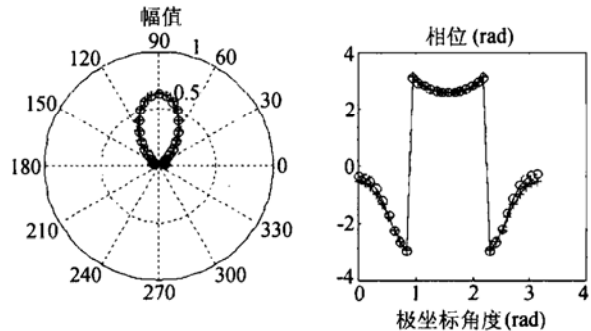
位与根据式 (18) 计算的理论值进行比较。

当频率 $f = 400 \text{ Hz}$ 时, 比较情况如图 3 所示。当频率 $f = 1500 \text{ Hz}$ 时, 比较情况如图 4 所示。其中图 (a) 表示在半径 $R = 0.4 \text{ m}$ 的半圆上的分布, 图 (b) 表示在半径 $R = 1 \text{ m}$ 的半圆上的分布, 图 (c) 表示在半径 $R = 2 \text{ m}$ 的半圆上的分布。重构的声场与理论计算的结果非常吻合。随着频率 f 的增加, 辐射具有明显的方向性。

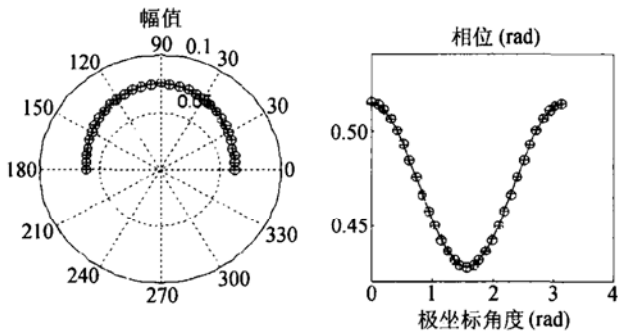
测量点的选择并没有特殊要求。以 $z = 0.6 \text{ m}$ 的平面作为测量面 (平行 xOy 平面), 在此测量面上对应振动表面 S 的上方均匀选择 $N = 9$ 个测量点, 进行声场重构。当频率 $f = 1500 \text{ Hz}$ 时, 图 5 表示了在不同的半圆上重构声压值与理论计算值的比较。显然测量点的选择具有较大的灵活性。



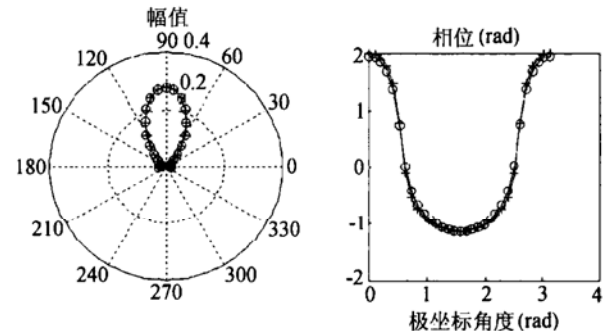
(a) $f = 400 \text{ Hz}, R = 0.4 \text{ m}$



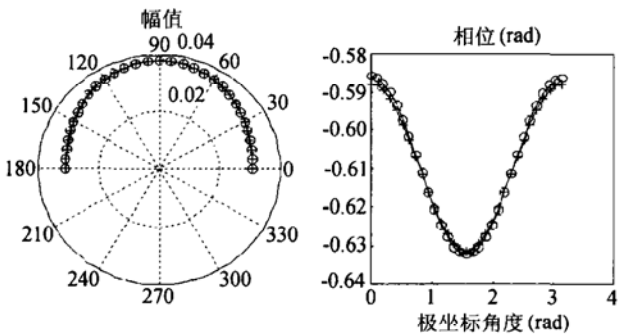
(a) $f = 1500 \text{ Hz}, R = 0.4 \text{ m}$



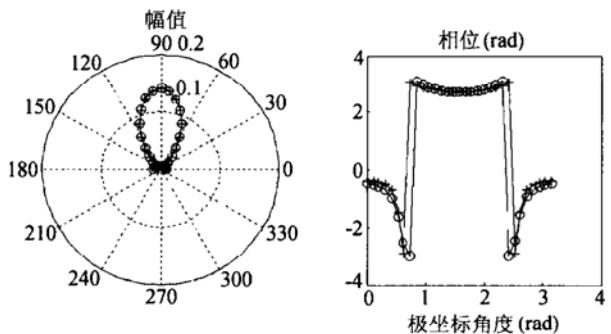
(b) $f = 400 \text{ Hz}, R = 1 \text{ m}$



(b) $f = 1500 \text{ Hz}, R = 1 \text{ m}$



(c) $f = 400 \text{ Hz}, R = 2 \text{ m}$



(c) $f = 1500 \text{ Hz}, R = 2 \text{ m}$

图 3 频率 $f = 400 \text{ Hz}$, 测量面为半球面时, 声场重构值与理论计算值的比较; “o” 表示重构值, “+” 表示理论计算值

图 4 频率 $f = 1500 \text{ Hz}$, 测量面为半球面时, 声场重构值与理论计算值的比较; “o” 表示重构值, “+” 表示理论计算值

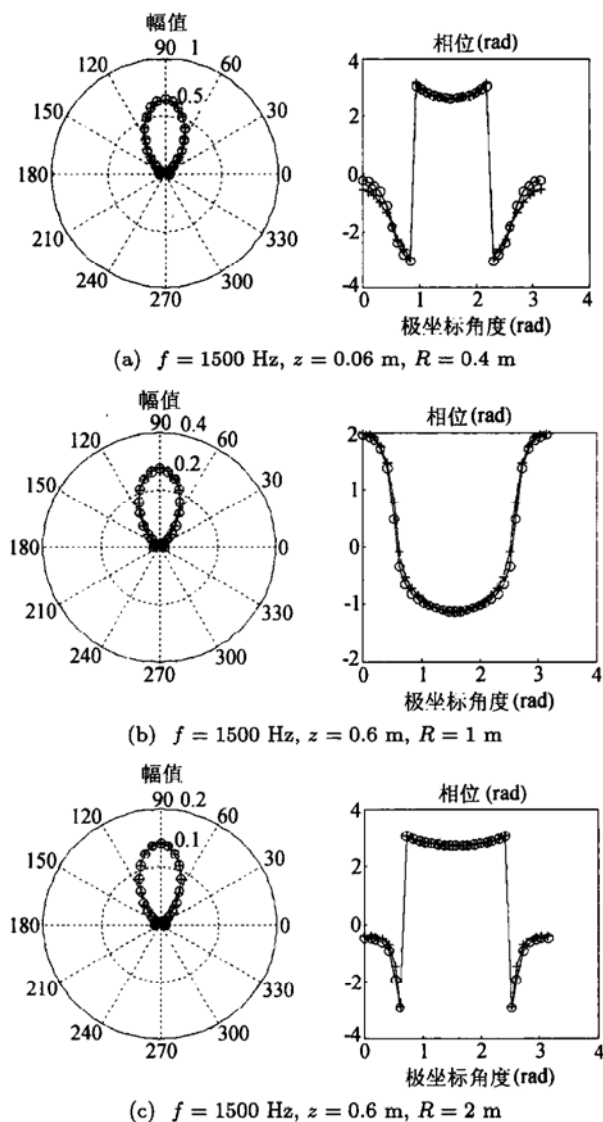


图 5 频率 $f = 1500 \text{ Hz}$, 测量面为平面时, 声场重构值与理论计算值的比较; “o” 表示重构值, “+” 表示理论计算值

3 球形声源辐射的声场

设球声源的半径为 a , 向外部空间进行声辐射。球形声源的声辐射模态和声场分布模态在文献 10 中给出。

以球声源的中心为坐标原点, 建立坐标系。声场中任意一点 Y 的坐标为 (x, y, z) , 到坐标原点的距离为 r 。取 $ka = 0.5$ 。以坐标原点为中心, 半径为 $kr = 1$ 的球面作为测量面。在此测量面上, 均匀取 $N = 14$ 个测量点, 分别测量声压。取模态数 $MP = 8$, 利用球形声源的声辐射模态和声场分布模态^[10], 进行声场重构。

3.1 摆动球

摆动球辐射的无量纲声压 P 可以写成:

$$P(r, \theta, \omega) = \frac{1 + jkr}{(kr)^2} \cos \theta e^{-jkr}, \quad (19)$$

其中 r 为声场中任意一点到坐标原点的距离, $r \geq a$, θ 为 r 与 y 坐标轴之间的夹角。在半径为 $kr = 1$ 的测量球面上, 根据式 (19) 计算每一个测量点处的无量纲声压值, 作为测量值。求解展开系数 v , 进行声场重构。

在 yOz 平面上, 以坐标原点为中心, 半径 kR 的圆上, 将重构的声压场与根据式 (19) 计算的理论结果进行比较, 如图 6 所示; 其中图 (a) 表示在半径 $kR = 0.6$ 的圆上的分布情况, 图 (b) 表示在半径 $kR = 1.5$ 的圆上的分布情况, 图 (c) 表示在半径 $kR = 3$ 的圆上的分布情况。

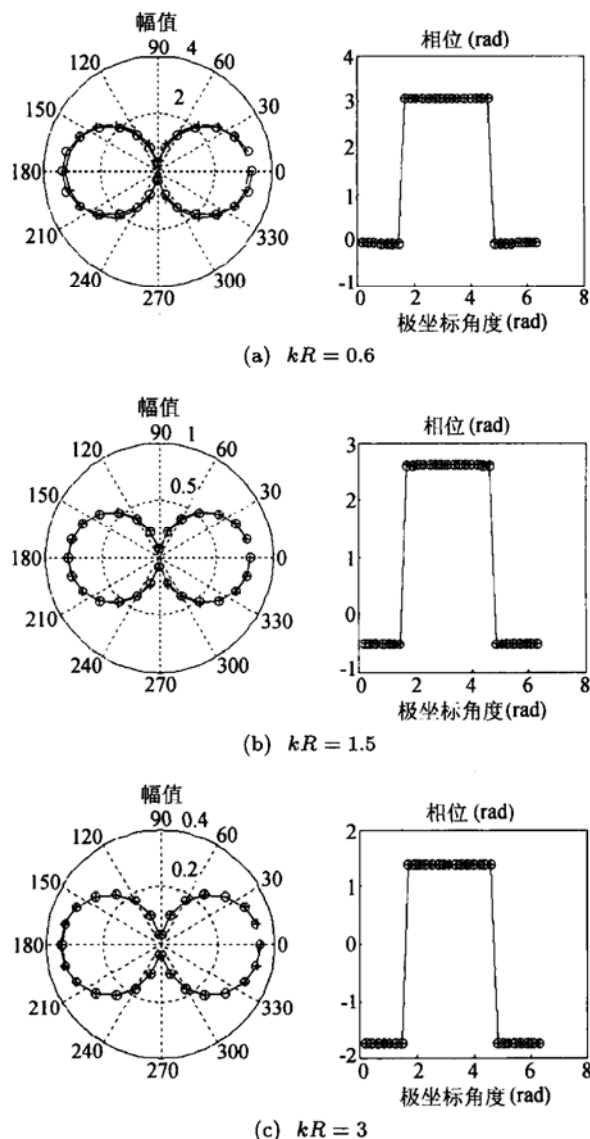


图 6 摆动球声场重构值与理论计算值的比较
“o” 表示重构值, “+” 表示理论计算值

3.2 四极子源

为了考察更为复杂的声辐射情况, 我们采用四极子源辐射的声场来模拟球形声源的声辐射。四极子源辐射的无量纲声压 P 可写成:

$$P(r, \theta, \omega) = [(1 + k^2 r^2 \cos^2 \theta - 3 \cos^2 \theta) + jkr(1 - 3 \cos^2 \theta)] \frac{e^{-jkr}}{k^3 r^3}, \quad (20)$$

其中 r 为声场中任意一点到坐标原点的距离, $r \geq a$, θ 为 r 与 y 坐标轴之间的夹角。

在半径为 $kr = 1$ 的测量球面上, 均匀取 $N = 14$ 个测量点, 根据式 (20) 计算每一个测量点处的无量纲声压值, 作为测量值。取模态数 $MP = 8$, 利用球形声源的声辐射模态和声场分布模态, 进行声场重构。在 yOz 平面上, 以坐标原点为中心, 半径 kR 的圆上, 将重构的声压场与根据式 (20) 计算的理论结果进行比较, 如图 7 所示; 其中图 7(a) 表示在半径 $kR = 0.6$ 的圆上的分布情况, 图 7(b) 表示在半径 $kR = 1.5$ 的圆上的分布情况, 图 7(c) 表示在半径 $kR = 3$ 的圆上的分布情况。

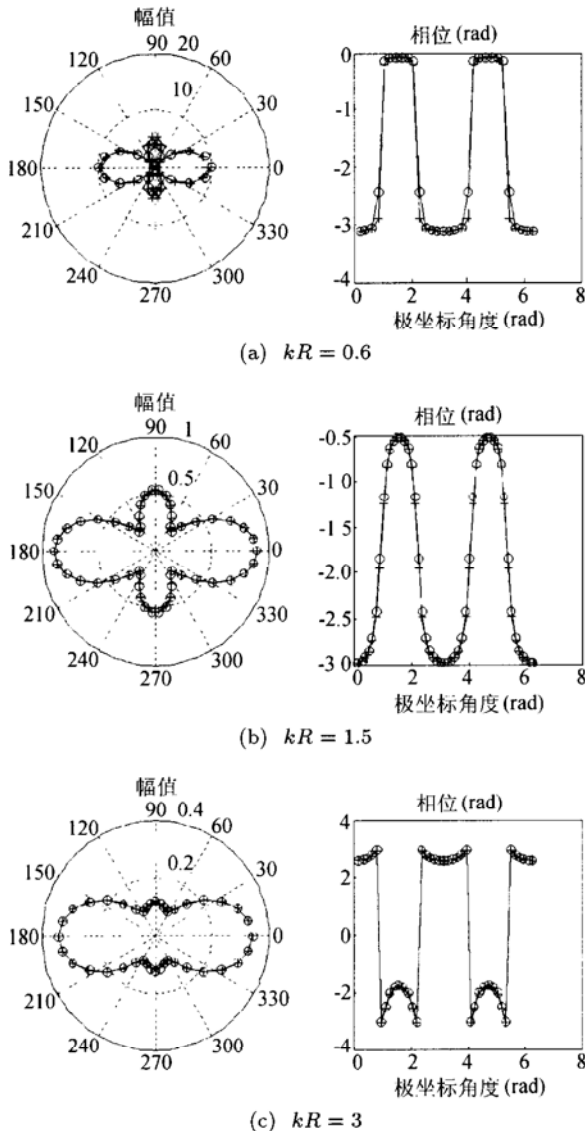


图 7 四极子源声场重构值与理论计算值的比较

“o”表示重构值, “+”表示理论计算值

在计算过程中, 我们选择模态数 $MP > 8$, 计算结果与模态数 $MP = 8$ 时的计算结果一样。这表明式 (4) 具有很快的收敛性。在进行声场重构时, 可靠性与稳定性取决于矩阵 ψ 的广义逆, 这又与矩阵 ψ 的最大奇异值和最小奇异值的比值有关。从物理意义考虑, 高阶模态对声场的贡献可以忽略。当模态数 MP 不很大时, 避免了矩阵 ψ 的最小奇异值趋于零。这种正则化方法保证了声场重构的稳定性。基于声辐射模态和声场分布模态进行声场重构, 可以取得令人满意的结果, 方法是简单可行的。声辐射模态和声场分布模态不仅反映了振动声源的辐射性质和声场的分布模式, 具有鲜明的物理意义, 而且还包含了声源几何形状的影响。因此, 对于复杂形状的声源, 基于声辐射模态和声场分布模态进行声场重构的方法显得更为有效, 更具适用性。

4 结论

声辐射模态和声场分布模态为研究声辐射问题提供了一种分析方法, 应用可以是多方面的。本文从声场重构的角度, 讨论了这种方法的应用。针对平板辐射和球形声源辐射的声场, 进行声场重构仿真计算, 结果表明基于声辐射模态和声场分布模态的声场重构方法是行之有效的。正是由于声辐射模态和声场分布模态包含声源形状的影响, 这种声场重构方法具有更大的适应性。

参 考 文 献

- 1 Williams E G *et al.* Broadband nearfield acoustic holography for vibrating cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989; **86**(2): 674-680
- 2 Sarkissian A. Near-field acoustic holography for an axisymmetric geometry: A new formulation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1990; **88**(2): 961-966
- 3 何元安, 何祚镛. 基于平面声全息的全空间场变换: I 原理与算法. *声学学报*, 2002; **27**(6): 507-512
- 4 Kim G T, Lee B H. 3-D sound source reconstruction and field reprediction using the Helmholtz integral equation. *Journal of Sound and Vibration*, 1990; **136**(2): 245-261
- 5 Sarkissian A. Reconstruction of the surface acoustic field on radiating structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992; **92**(2): 825-830
- 6 Bong-Ki Kim, Jeong-Guon Ih. On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996; **100**(5): 3003-3016

- 7 Wang Z, Wu S F. Helmholtz equation-least-squares method for reconstructing the acoustic pressure field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997; **102**(4): 2020—2032
- 8 Wu S F. On reconstruction of acoustic pressure fields using the Helmholtz equation least squares method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2000; **107**(5): 2511—2522
- 9 姜 哲. 声辐射问题中的模态分析, I 理论. 声学学报, 2004; **29**(4): 373—378
- 10 姜 哲. 声辐射问题中的模态分析 II 实例. 声学学报, 2004; **29**(6): 507—515
- 11 Kim Y, Nelson P A. Spatial resolution limits for the reconstruction of acoustic source strength by inverse methods. *Journal of Sound and Vibration*, 2003; **265**: 583—608