

阵列指向性二次型约束稳健波束形成算法

蒋 颢^{1,2} 朱 堃¹ 孙长瑜¹

(1 中国科学院声学研究所 北京 100080)

(2 中国科学院研究生院 北京 100039)

2004 年 5 月 27 日收到

2005 年 3 月 14 日定稿

摘要 提出了一种基于阵列指向性二次型约束的优化算法,以提高最小方差无畸变响应(MVDR)波束形成对方向矢量的稳健性。通过控制阵列波束指向附近的小区域的自适应波束图与期望波束图的加权平方误差,使波束主瓣区域内的信号畸变最小,同时保持了对约束区间外的干扰信号的抑制能力。数值结果表明:在理想阵形和阵形畸变情况下,无方位失配时,利用本文算法的阵列输出信号与干扰噪声比(SINR)与新近出现的球面约束稳健Capon方法相当,而存在方位失配时,本文算法均优于后者。

PACS 数: 43.60

Robust beamforming with quadratically constrained array directivity

JIANG Biao^{1,2} ZHU Ye¹ SUN Changyu¹

(1 Institute of Acoustics, The Chinese Academy of Sciences Beijing 100080)

(2 Graduate School of the Chinese Academy of Sciences Beijing 100039)

Received May 27, 2004

Revised Mar. 14, 2005

Abstract To improve the robustness of the Minimum Variance Distortionless Response (MVDR) beamforming to the array steering vector, a quadratic constraint method is proposed. The weighted least squared error between the actual beam pattern and the desired beam pattern over a small region around the array steering direction is constrained. As a result, the signals coming from the directions near the steering angle will suffer the least distortion, and the interferences outside the constrained area can still be suppressed. Numerical results show that whether there are array perturbations or not, the array output Signal-to-Interference-Plus-Noise-Ratio (SINR) using our proposed method and the recently occurred spherical constraint robust Capon's beamforming (RCB-Sphere) is close to each other, but when exists look direction mismatch, our method outperforms the latter.

引言

自适应波束形成由于能增强期望信号并抑制干扰和噪声,已被广泛应用于雷达、声呐、语音处理、移动通信等领域。当阵列方向矢量无误差时,Capon的最小方差无畸变响应波束形成算法^[1]具有较好的分辨率和干扰抑制性能。但在阵列波束指向与实际目标波达方向(Direction of Arrival, DOA)存在误差、阵形畸变、阵元幅相误差、可用数据快拍较少等情况下,自适应波束形成的性能会急剧下降,尤其在信噪比低时,目标信号会被当作干扰而被抑制,噪声输出功率较高。提高自适应波束形成对方向矢量误差的稳

健性是一个研究热点。

传统的提高波束形成稳健性的方法主要有对角加载技术^[2]、特征向量法^[3]、线性约束最小方差(Linear Constrained Minimum Variance, LCMV)法^[6]、二次型约束法^[7],文献4提出了一种任意结构阵列的波束形成方法,文献5提出了一种低旁瓣波束设计。对角加载即白噪声注入法,可以减小阵列协方差矩阵的特征值分散度,控制波束旁瓣电平,但对角加载量目前还没有很好的确定方法。特征向量法利用信号子空间与噪声子空间的正交性,只利用信号子空间的信息估计权向量,该方法需要正确估计空间信号源数,文献3的增强MVDR算法对其增强

因子的确定没有经验方法。LCMV 法通过在目标方位附近施加多个方向约束和导数约束,可减小算法对阵列指向误差的灵敏度并加宽干扰方向的零陷宽度,但要损失阵列的自由度,而且需预估信号波达方向。权向量模约束法^[7]通过限制权矢量的模来提高对方位失配和阵误差的稳健性,数学原理上等效于对角加载算法。软约束线性最小方差法 (Soft Constraint Linear Minimum Variance)^[8]使自适应权矢量与期望权矢量误差最小,减小由于方位失配引起的目标信号增益的下降以及由于数据非平稳导致的旁瓣不稳定,该方法属于一种二次型约束法,即限制权矢量关于阵列相关矩阵的二次型的值,该方法同样存在参数合理确定问题。近年来,一些优化理论的方法被应用到稳健波束形成设计问题,如 Gershman^[9]提出当方向矢量的值域为某个不确定集合时,稳健波束形成可表述成一个二阶凸规划 (SOCP, Second Order Convex Programming) 问题,利用标准的内点算法软件来求解权矢量,如 SeDuMi 凸优化工具包。Lorenz^[10]利用椭球来覆盖方向矢量的值域,虽然权矢量的寻优过程比 SOCP 法简单,但不确定椭球的模型构造较为复杂。Stoica^[11]等人利用观测数据估计阵列的方向矢量,利用方向矢量的似然估计得到稳健权矢量,并证明得出文献 9 和 10 的方法是一致的,都可等效为对角加载方法,只是优化确定对角加载量的途径略有所不同。

本文基于二次型约束波束形成算法,提出一种根据观测数据自适应调整稳健控制参数的优化算法,对自适应权向量与期望权向量所形成的空间指向性函数(波束图)在阵列指向角附近小区域内的加权平方误差进行约束,从而可有效控制波束主瓣的畸变,提高对方向矢量误差的稳健性,并使约束区域外的功率输出最小,从而保证了对干扰信号的抑制能力。并考虑到在无方向矢量误差且空间只有单信号源时,阵列的方向矢量,即常规波束加权 (Conventional Beamforming, CBF) 是空间均匀噪声场中的最佳空域匹配滤波器,所以取期望权矢量为理想的阵列方向矢量。数值分析结果表明利用本文方法阵列的输出 SINR 接近理想值,对阵形尤其是方位失配的稳健性较高,性能略优于 SCB-Sphere 算法。

1 二次型约束波束形成算法

1.1 问题描述

考虑 M 元均匀线列阵,阵元间距为 d ,接收的窄带信号中心频率对应的波长为 λ ,阵列接收信号的

第 k 个采样可表示为向量形式:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{a}(\theta_0)s_0(k) + \sum_{i=1}^J \mathbf{a}(\theta_i)s_i(k) + \mathbf{n}(k), \quad (1)$$

其中, $s_0(k)$ 是空间感兴趣信号, $s_i(k)$ 为干扰信号, $\mathbf{n}(k)$ 为白噪声信号, J 为干扰源个数, $\mathbf{a}(\theta)$ 是阵列对 θ 方向信号的方向矢量,可表示为:

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{jKd \sin \theta}, \dots, e^{jKd(M-1) \sin \theta}]^T, \quad (2)$$

其中, $K = 2\pi/\lambda$ 为波数。Capon 的最小方差算法 (MVDR) 可表述成:

$$\min_w \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w} \quad \text{s.t. (subject to)} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1, \quad (3)$$

其中, $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k)$, 为样本协方差估计矩阵, N 为接收信号的快拍数 (即样本个数)。利用 Lagrange 乘子法可得 (3) 式解为:

$$\mathbf{w}_{\text{MV}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}. \quad (4)$$

1.2 指向性二次型约束

设阵列对目标信号的期望权矢量为 $\mathbf{w}_d$, 自适应权矢量为 $\mathbf{w}$, 定义在阵列指向附近区域的期望指向性函数与实际指向性函数的加权平方误差为:

$$\begin{aligned} e^2 &= \int_{\theta_0 - \Delta\theta}^{\theta_0 + \Delta\theta} f(\theta) |(\mathbf{w}_d - \mathbf{w})^H \mathbf{a}(\theta)|^2 d\theta = \\ &= (\mathbf{w}_d - \mathbf{w})^H \left[\int_{\theta_0 - \Delta\theta}^{\theta_0 + \Delta\theta} f(\theta) \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta \right] (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}) = \\ &= (\mathbf{w}_d - \mathbf{w})^H \mathbf{Q} (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $f(\theta)$ 为空域加权函数, 设定各个波达方向的权重, 考虑到波束宽度与 $\cos \theta$ 成反比, 可取 $f(\theta) = \cos \theta$, $\mathbf{Q}$ 为当入射信号为单位幅度窄带平面波时, 波束指向角附近区域的阵元间加权互相关矩阵, 由 (2) 式可得矩阵 $\mathbf{Q}$ 第 m 行 n 列元素为:

$$\mathbf{Q}_{m,n} = \frac{\exp[j(m-n)\varphi_2] - \exp[j(m-n)\varphi_1]}{jKd(m-n)}, \quad (6)$$

其中:

$$\varphi_1 = Kd \sin(\theta_0 - \Delta\theta), \quad \varphi_2 = Kd \sin(\theta_0 + \Delta\theta). \quad (7)$$

二次型约束波束形成算法可表示成:

$$\begin{aligned} \min_w \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \\ & \text{s.t. } (\mathbf{w}_d - \mathbf{w})^H \mathbf{Q} (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}) \leq e_0^2. \end{aligned} \quad (8)$$

其中不等式的左边部分为权向量误差矢量关于矩阵 $\mathbf{Q}$ 的二次型, 所以称二次型约束, 当 $\mathbf{Q}$ 为单位阵时, 退化为权向量模约束, 即对角加载 (DL, Diagonal Loading) 算法 (文献 7, p505-507), 所以 DL 算法为本文算法的特例。定义 Lagrange 代价函数为:

$$L(\lambda, \eta) = \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w} + \lambda [\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) - 1] + \eta [(\mathbf{w}_d - \mathbf{w})^H \mathbf{Q} (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}) - e_0^2]. \quad (9)$$

e_0^2 为预设期望误差, 可取为一个小的正数。令 $L(\lambda, \eta)$ 对权矢量 $\mathbf{w}$ 的偏导数为 0, 可得:

$$2\hat{\mathbf{R}}\mathbf{w} + \lambda\mathbf{a}(\theta_0) - 2\eta\mathbf{Q}(\mathbf{w}_d - \mathbf{w}) = 0. \quad (10)$$

由上式并根据 (8) 式波束指向的信号无畸变约束条件: $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1$, 可推导得自适应权矢量为:

$$\mathbf{w} = \eta \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{w}_d + \frac{\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} - \eta \frac{\tilde{\mathbf{R}}^{-1} [\mathbf{w}_d^H \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)] \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}, \quad (11)$$

其中 $\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}} + \eta\mathbf{Q}$, 且当 $\eta \rightarrow 0$ 时, 式 (11) 趋向于式 (4)。当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 式 (11) 趋向于 $\mathbf{w}_d$ 。所以二次约束权矢量介于期望权矢量与 Capon 权矢量之间, 称 η 为稳健控制参数, 所以若能正确选择参数 η , 可使算法既能保持高分辨和干扰抑制性能, 又对方位失配和各种随机因素导致的方向矢量误差具有稳健性。

2 二次型约束波束形成优化算法

要使二次型约束波束形成性能达到最优, 必须根据阵列接收信号确定合适的稳健控制参数, 不同于 MVDR 算法, 二次型约束不再只是对波束指向方向来的信号进行无畸变约束, 而是对一个波束指向角附近的小区域作无畸变约束, 所以可以先令 (9) 式中 $\lambda = 0$, 则 Lagrange 代价函数可写为:

$$L(\eta) = (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}_e)^H \hat{\mathbf{R}} (\mathbf{w}_d - \mathbf{w}_e) + \eta [\mathbf{w}_e^H \mathbf{Q} \mathbf{w}_e - e_0^2], \quad (12)$$

其中, $\mathbf{w}_e$ 为阵列加权误差矢量, 即

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_d - \mathbf{w}. \quad (13)$$

上式对 $\mathbf{w}_e$ 求导, 并令导数为 0, 可得:

$$\mathbf{w}_e = (\hat{\mathbf{R}} + \eta\mathbf{Q})^{-1} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}_d. \quad (14)$$

则 Lagrange 乘子可由以下约束方程的根来确定:

$$f(\eta) \triangleq \mathbf{w}_e^H \mathbf{Q} \mathbf{w}_e = \mathbf{w}_d^H \hat{\mathbf{R}} (\hat{\mathbf{R}} + \eta\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{R}} + \eta\mathbf{Q})^{-1} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}_d = e_0^2. \quad (15)$$

对矩阵 $\hat{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{R}}^{-1/2}$ 作特征值分解得:

$$\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H = \hat{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{R}}^{-1/2}, \quad (16)$$

$\mathbf{U}$ 的各列和对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 的主对角元素分别对应等式右边矩阵的特征向量和特征值, 各特征值从大到小排列, 满足: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$, 则 $\mathbf{Q}$ 可表示为:

$$\mathbf{Q} = (\hat{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{U}) \mathbf{\Lambda} (\hat{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{U})^H. \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (15) 可得:

$$f(\eta) = \mathbf{z}^H (\mathbf{I} + \eta \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\Lambda} (\mathbf{I} + \eta \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{z} = e_0^2, \quad (18)$$

其中:

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{U}^H \hat{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{w}_d. \quad (19)$$

式 (18) 化简后可得:

$$f(\eta) = \sum_{i=1}^M \frac{|z_i|^2 \lambda_i}{(1 + \eta \lambda_i)^2} = e_0^2. \quad (20)$$

注意到, $f(\eta)$ 是关于 η 的单调递减函数, 且有 $f(\eta \rightarrow 0) > e_0^2$, $f(\eta \rightarrow \infty) < e_0^2$, 所以当 $\eta > 0$ 时, 式 (20) 有唯一解。确定 η 的区间后, 可以用牛顿法或二分法来求解方程的根, 代入式 (11) 可得所需权矢量。由式 (20), 有:

$$\sum_{i=1}^M \frac{|z_i|^2 \lambda_i}{(1 + \eta \lambda_i)^2} = e_0^2 < \sum_{i=1}^M \frac{|z_i|^2 \lambda_i}{(\eta \lambda_i)^2}. \quad (21)$$

从而有:

$$\eta < \frac{1}{e_0} \left(\sum_{i=1}^M \frac{|z_i|^2}{\lambda_i} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

本文取 η 的区间为:

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \eta < \frac{1}{e_0} \left(\sum_{i=1}^M \frac{|z_i|^2}{\lambda_i} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

3 数值分析

为验证本文算法的有效性并检验其性能, 以下从阵列指向性图和输出 SINR 两方面与常规 MVDR 算法、固定对角加载的 MVDR 算法 (LMVDR)、RCB-Sphere^[11] 算法作比较, 本文算法记为 RMV-QC。

仿真试验采用 16 元半波长等距线列阵, 期望窄带目标信号源来自 10° 方向 (相对于阵列正横方向), 在 30° 方向有一窄带干扰源, 假设空间不相关噪声功率大小为 $\sigma_n^2 = 1$, 信噪比 $\text{SNR} = 5$ dB, 干扰与噪声噪比 INR (Interference-to-Noise Ratio) = 20 dB, 式 (7) 中 $\Delta\theta$ 取主瓣半功率点宽度, 约为 3.17° , 期望权向量取阵列指向处的方向矢量, 即 $\mathbf{w}_d = \mathbf{a}(10^\circ)/16$ 。信号方向附近指向性函数加权平方误差取 $e_0^2 = 0.03$, 接收数据快拍数为 200。LMVDR 算法的对角加载量取 $\sigma_L^2 = 10\sigma_n^2$, 即 10 dB, RCB-Sphere 算法的稳健控制参数 $\varepsilon^{[11]} = 4.5$ 。SINR 定义如下:

$$\text{SINR} = \frac{\delta_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}_s|^2}{\mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_{i+n} \mathbf{w}}, \quad (24)$$

其中, δ_s^2 为信号功率, $\mathbf{a}_s$ 是阵列对信号的响应矢量。 $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$ 是干扰加噪声信号的协方差估计矩阵。用 $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$ 代替公式 (4) 中的 $\hat{\mathbf{R}}$, 即数据快拍中不含期望信号分量, 由式 (24) 可得理想的 SINR 为:

$$\text{SINR}_{\text{opt}} = \delta_s^2 \mathbf{a}_s^H \hat{\mathbf{R}}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}_s. \quad (25)$$

3.1 阵形理想情况

若无方位失配, 波束指向即信号真实方位, 有方位失配时, 设定阵列指向角为 11° 。图 1 给出了本文 RMV-QC 方法、RCB-Sphere、MVDR 的阵列波束图, 图 2 为经 100 次试验得到的 3 种算法的输出 SINR 随期望信号信噪比 (SNR) 的变化关系曲线, 同时给出了 LMVDR 方法和理想的 SINR 曲线。由图 1, 本文算法的波束最大方向与信号真实方向的偏差较小, 噪声输出电平低于 RCB-Sphere 方法, 在干扰方向的零陷比 RCB-Sphere 略深, MVDR 由于稳健性差, 信号方向附近形成了零点, 输出信噪比低, 图 2 说明了这一点。由图 2, LMVDR 方法由于加量固定, 信噪比增大时, SINR 远远偏离理想值, RCB-Sphere 方法和本文方法随 SNR 的变化性能相

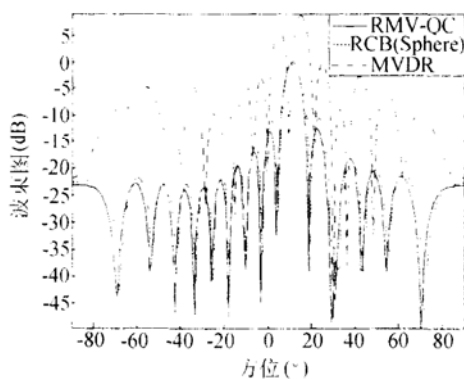


图 1 波束图 (理想阵形 + 方位失配)

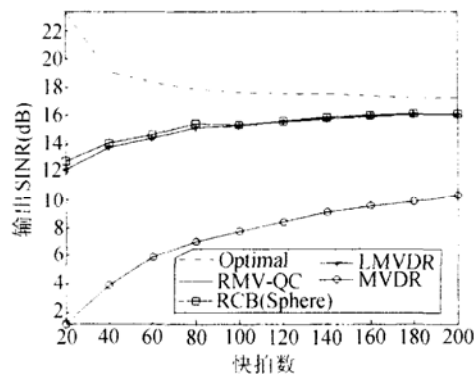


图 3 SINR vs. 快拍数 (理想阵形, 无方位失配)

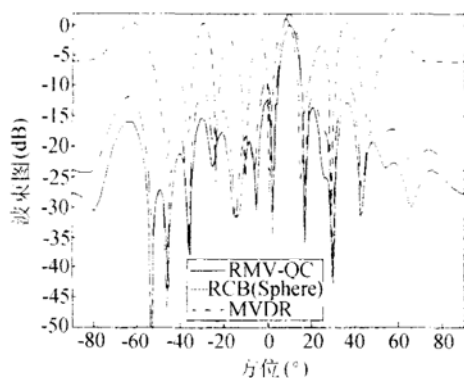


图 5 波束图 (阵形畸变 + 方位失配)

近。图 3 和图 4 分别为无方位失配和有方位失配时的阵列输出 SINR 随信号快拍数的变化关系, 可见, 无方位失配时, RMV-QC、RCB-Sphere、LMVDR3 种算法性能相近, 有方位失配时, 本文算法 SINR 高于 RCB-Sphere 算法。

3.2 阵形畸变情况

试验条件同 3.1, 假设阵元在水平面内位置发生随机起伏, 设起伏量服从零均值高斯分布, 阵元间距为 0.75 m, 阵元位置起伏量的标准差设为 0.08 m。图 5 和图 6 是阵形畸变时对应的波束指向性图和输出 SINR 随 SNR 的变化曲线。图 7 和图 8 分别是无方位失配和有方位失配时的阵列输出 SINR 随样本快拍数的变化曲线。由图 5 可见, 本文 RMV-QC 的指向性最好, 由图 6, RMV-QC 和 RCB-Sphere 算法

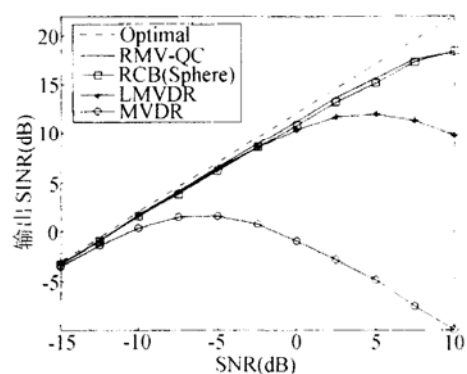


图 2 SINR vs. SNR (理想阵形 + 方位失配)

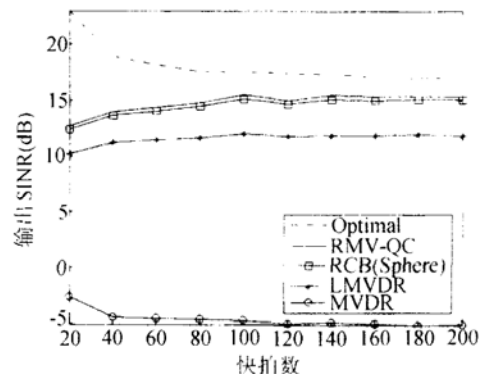


图 4 SINR vs. 快拍数 (理想阵形 + 方位失配)

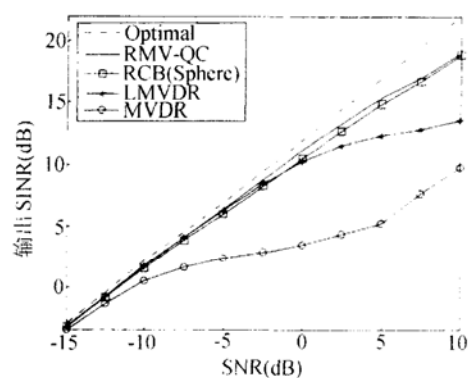


图 6 SINR vs. SNR (阵形畸变 + 方位失配)

的输出 SINR 随 SNR 的变化性能也相似, 由于阵列扰动误差, MVDR 的输出 SINR 在输入 SNR 增大时, 也呈上升趋势, 但比较缓慢。由图 7 和图 8 可见, 在无方位失配时, RMV-QC 和 RCB-Sphere 性能相近, 均优于 LMVDR 算法。有方位失配时, 本文 RMV-QC 算法性能最优, 说明该算法同时对方位失配和阵形畸变具有稳健性。

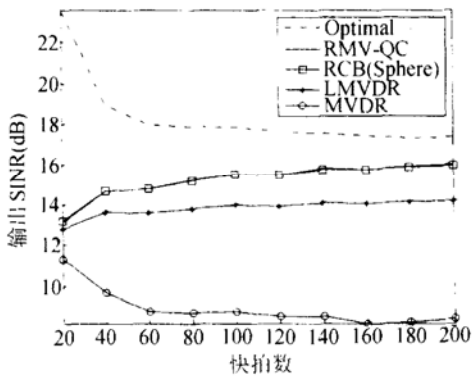


图 7 SINR vs. 快拍数 (阵形畸变, 无方位失配)

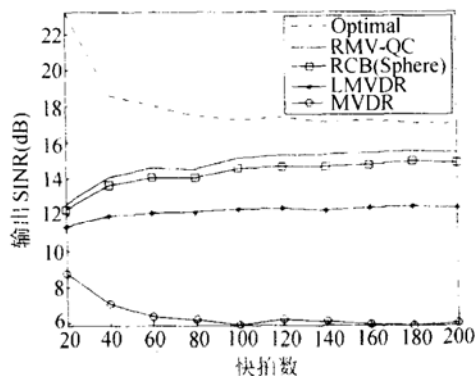


图 8 SINR vs. 快拍数 (阵形畸变 + 方位失配)

4 结论

本文讨论了一种基于指向性二次型约束的稳健波束形成优化算法, 通过稳健控制参数的数值优化, 在存在阵列方向矢量误差的情况下, 可以保证阵列对目标信号有较大的响应灵敏度, 由于使约束区间外

信号输出功率最小, 有效抑制了波束区域外的干扰信号。数值分析结果表明, 本文算法是有效的, 在阵形理想和阵形畸变情况下, 本文算法的波束指向性无畸变, 输出信噪比不低于目前新近出现的稳健算法。在可用数据快拍一定时, 本文算法的输出信噪比均高于其它算法。

基于本文算法, 进一步对干扰方向附近区域的指向性函数施加二次型约束, 可增大干扰方向零陷宽度, 进一步提高阵列输出的信噪比。

参 考 文 献

- 1 Capon J. High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 1969; **57**(8): 1408—1418
- 2 Cox H, Zeskind R M, Owen M. Robust adaptive beamforming. *IEEE Trans. ASSP*, 1987; **35**(10): 1365—1376
- 3 竺士蒙, 宋明凯, 宫先仪. 一种改善 MVDR 波束形成性能的方法. *声学学报*, 1993; **18**(1): 54—60
- 4 杨益新, 孙 超. 任意结构阵列宽带恒定束宽波束形成新方法. *声学学报*, 2001; **26**(1): 55—58
- 5 杨益新, 孙 超, 马远良. 宽带低旁瓣时域波束形成. *声学学报*, 2003; **28**(4): 331—338
- 6 Tseng C Y, Griffiths L J. An unified approach to the design of linear constraints in minimum variance adaptive beamformers. *IEEE Trans. Antennas Propagat*, 1992; **40**(12): 1533—1542
- 7 Van Trees H L. Optimum array processing. New York: Wiley, 2002: 183—191, 505—510, 593—599
- 8 Van Veen B D. Minimum variance beamforming with soft response constraints. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1991; **39**(9): 1964—1972
- 9 Vorobyov S, Gershman A B, Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2003; **51**(2): 313—324
- 10 Lorenz R G, Boyd S P. Robust minimum variance beamforming. In: 37th Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, 2003(2): 1345—1352
- 11 LI J, Stoica P, Wang Z. On robust Capon beamforming and diagonal loading. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2003; **51**(7): 1702—1715