第 37 卷第 2 期　　声　学　学　报　　Vol. 37, No. 2
2012 年 3 月　　ACTA　ACUSTICA　　Mar., 2012

扬声器辐射体旋转薄壳的非线性振动方程*

张志良　杨　虹　刘世清
(浙江师范大学物理系　浙江　321004)

2010 年 9 月 3 日收到
2011 年 4 月 13 日定稿

摘要　推导了扬声器辐射体旋转薄壳的离散非线性振动方程。从虚功原理出发，选用扬声器辐射体旋转薄壳的本征模态对连续体进行离散。薄壳的几何非线性采用 Sanders 非线性薄壳理论的应变 - 位移关系。方程系数由有限元方法确定。方程表明轴对称模态由驱动力直接激励，非轴对称模态由轴对称模态非线性耦合激励，该耦合激励表现为参数激励。方程揭示了扬声器非线性失真的机制，可用于分析扬声器辐射体薄壳非线性引起的谐波失真、分谐波失真和互调失真。

PACS 数：43.38, 43.25, 43.40

Nonlinear vibration equations for loudspeaker revolution shells

ZHANG Zhiliang　YANG Hong　LIU Shiqing
(*Department of Physics, Zhejiang Normal University*　Zhejiang　321004)

Received Sept. 3, 2010
Revised Apr. 13, 2011

Abstract　Nonlinear discretization vibration equations are derived for loudspeaker revolution shells. The nature modes of loudspeaker revolution shells are chosen to discretize the continuous body according to the virtual work principle. Geometric nonlinearities are accounted for by utilizing the strain-displacement relation of the Sanders nonlinear shell theory. The coefficients of the equations are determined by the finite element method. The equations show that the axisymmetric mode is driven directly, whereas the asymmetric modes are excited by the axisymmetric mode through a parametric excitation. The equations can be used to analyze the subharmonic distortion, harmonic distortion and intermodulation distortion caused by the loudspeaker shell nonlinearity.

引言

非线性失真，包括谐波失真、分谐波失真和互调失真等，是影响扬声器音质的重要因素。已经证明，直接辐射式电动扬声器的这些非线性畸变（特别是中高频非线性畸变）与其声波辐射器振膜的运动状况有直接关系。而大多数扬声器振膜是典型的旋转薄壳结构。直接采用有限元等数值方法计算薄壳非线性振动的时间历程不仅计算成本高，而且海量多次迭代运算存在可靠性问题，另外也不能明确揭示非线性失真物理机制。因此，可以近似将扬声器辐射体薄壳离散为有限个自由度系统，通常采用线性模态的叠加离散连续系统，以实现线性解耦。Radwan 等[1] 给出了任意形状弹性薄壳的非线性模态方程，但方程过于复杂，且不适合于数值计算。Shi 等[2] 和 Lee 等[3] 结合采用有限元方法和模态离散法给出了板的非线性模态方程。Amabili 等[4−5] 讨论了圆柱壳受横向激励时模态的一般选择原则。虽然扬声器的非线性现象有持续的实验报道 (见续文[6−7] 的引言部分)，也有非线性失真的产品指标，但鲜有从薄壳层面揭示扬声器非线性失真机制的理论研究。

本文根据虚功原理，利用旋转薄壳周向解的正交性，采用非线性薄壳理论和有限元方法建立和确定了可用于揭示扬声器各种非线性失真机制的非线性模态方程。特别是提出了“耦合再激发模态”的概念，

* 国家自然科学基金资助项目 (11174255, 11074222)

得到了和实验结果一致的软弹簧性非线性。续文[6−7]根据所得方程结合采用理论分析和实验观测方法研究扬声器的分谐波和混沌，理论和实验结果的一致性证实了本文结果的正确性。

1 基本假设和边界条件

分析中采用如下假设和近似：

(1) 仅考虑扬声器辐射体薄壳的几何非线性，忽略其物理非线性, 即仅考虑应变 – 位移非线性关系，忽略应力 – 应变非线性关系。续文的实验和理论分析的一致性证实了扬声器的非线性失真确实仅由几何非线性引起。

(2) 扬声器辐射体薄壳的几何参数和材料参数沿周向完全均匀, 在小端受到沿周向均匀分布的轴向驱动力, 因而在线性情况下不会激发出非轴对称模态的振动。

(3) 空气声负载作近似处理。声负载对扬声器辐射体薄壳的影响表现为辐射质量和阻尼，分析中采用刚性活塞的辐射阻抗公式对扬声器辐射体薄壳的质量密度和损耗因子作近似修正。续文实验中采用小口径扬声器使产生的声压较小，以减小声负载的影响。该近似处理不影响续文中对分谐波和混沌产生机制的探讨。

(4) 用 Frankort[8] 给出的边界条件模型。考虑到扬声器辐射体薄壳的小端胶结于音圈和内支撑，而坚硬的音圈在所分析的中低频范围不会产生变形，因而可假设轴对称模态在小端轴向运动自由, 径向位移和转动为零, 非轴对称模态在小端的轴向位移、径向位移、周向位移和转动均为零。音圈作为一集总质量加载于薄壳的小端。若忽略扬声器的折环对振膜振动的限制作用，则扬声器辐射体薄壳的大端设为自由边界；若考虑折环，则边界条件为折环外边固定。

2 运动方程

2.1 轴对称和非轴对称两个模态的耦合方程

对存在几何非线性的旋转闭合薄壳，其应变势能含有 3 次幂和 4 次幂项，即[9]

$$P(\boldsymbol{q}) = \int_a^b\int_0^{2\pi} r[p_2(\boldsymbol{q}) + p_3(\boldsymbol{q}) + p_4(\boldsymbol{q})]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s \equiv P_2(\boldsymbol{q}) + P_3(\boldsymbol{q}) + P_4(\boldsymbol{q}), \tag{1}$$

式中，r 和 θ 分别为柱坐标系中的径向坐标和角坐标，s 为薄壳母线坐标，a 和 b 分别代表扬声器辐射体薄壳的小端和大端坐标 (见图 1) 。式中，下标数字代表 q 的幂次，q 代表薄壳的 3 个正交位移分量 (纵向分量 u, 周向分量 v 和横向分量 w) 或其空间导数。附录 B 给出了 Sanders 非线性薄壳理论的 2 次幂、3 次幂和 4 次幂应变能面密度 $p_2(\boldsymbol{q})$, $p_3(\boldsymbol{q})$ 和 $p_4(\boldsymbol{q})$ 的表达式。

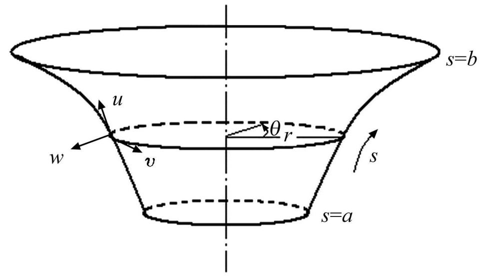

图 1 扬声器辐射体薄壳示意图和坐标系

采用文献 9 的简洁记号，由虚功原理得到的弹性薄壳的非线性运动方程为[9]:

$$M_{11}(\ddot{q},\delta q) + P_{11}(q,\delta q) + P_{21}(q,\delta q) + P_{31}(q,\delta q) = W_{11}(F,\delta q), \tag{2}$$

式中，下标数字分别依次表示括号内自变量的幂次 (下同), 各项括号中以逗号隔开的量为相乘关系 (下同), $P_{11}(q,\delta q)$, $P_{21}(q,\delta q)$ 和 $P_{31}(q,\delta q)$ 分别为 $P_2(\boldsymbol{q})$, $P_3(\boldsymbol{q})$ 和 $P_4(\boldsymbol{q})$ 的一阶变分， $W_{11}(F,\delta q)$ 代表驱动力所做的虚功，惯性力虚功 $M_{11}(\ddot{q},\delta q)$ 为：

$$M_{11}(\ddot{q},\delta q) = \int_a^b\int_0^{2\pi} \rho hr(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s, \tag{3}$$

式中，h 为薄壳厚度, 沿母线方向可能有变化, 将在更深入的研究中考虑该问题； ρ 为考虑了音圈质量后的质量密度，即

$$\rho = \rho' + \delta(s-a)m_v/[2\pi hr(a)], \tag{4}$$

式中，ρ' 为薄壳质量密度，m_v 为音圈质量，$\delta(s-a)$ 为冲激函数。上式中采用了音圈的集总质量近似，当接近或高于扬声器的高频截止频率[10], 音圈不再作整体振动时，应采用有限元法分析音圈振动。

对旋转薄壳, 模态的周向解是三角函数。选择如下 2 个模态：

$$x(t)\left[U^{(0)}(s), 0, W^{(0)}(s)\right], \quad z(t)\left[U^{(n)}(s)\cos n\theta, V^{(n)}(s)\sin n\theta, W^{(n)}(s)\cos n\theta\right], \tag{5}$$

式中，前 1 个模态与周向角坐标无关，为轴对称模态，另 1 个非轴对称模态的周向波数为 n 。为方便运算，采用复指数函数的形式，即

$$\alpha_0(t)\left(U^{(0)}, 0, W^{(0)}\right), \quad \alpha_n(t)\left(U^{(n)}, -\mathrm{i}V^{(n)}, W^{(n)}\right)e^{\mathrm{i}n\theta} + cc, \tag{6}$$

式中，cc 代表其前边项的共轭复数。由式 (5) 和式 (6) 可得模态系数关系：

$$\alpha_0 = x, \quad \alpha_n = \overline{\alpha}_n = z/2. \tag{7}$$

式 (6) 简记为：

$$\begin{aligned} q = \alpha_0(t)y_0(s) + \alpha_n(t)Y_n(s)e^{in\theta} + cc \equiv \\ \alpha_0(t)y_0(s) + \alpha_n(t)y_n(s,\theta) + cc. \end{aligned} \tag{8}$$

将式 (8) 代入运动方程 (2) 的前 2 项，得：

$$\begin{aligned} &M_{11}(\ddot{q},\delta q) = \ddot{\alpha}_0 M_{11}(y_0,\delta q) + \ddot{\alpha}_n M_{11}(y_n,\delta q) + cc, \\ &P_{11}(q,\delta q) = \alpha_0 P_{11}(y_0,\delta q) + \alpha_n P_{11}(y_n,\delta q) + cc. \end{aligned} \tag{9}$$

上式中分别令 $\delta q = \overline{y}_i (i=0,n)$，由复指数函数的正交性得：

$$\begin{aligned} &M_{11}(y_i,\overline{y}_i)\ddot{\alpha}_i = m_i\ddot{\alpha}_i, \\ &P_{11}(y_i,\overline{y}_i)\alpha_i = m_i\omega_i^2\alpha_i, \quad (i=0,n). \end{aligned} \tag{10}$$

式中，ω_i 为与模态 y_i 对应的固有频率。

为得到 $P_{21}(q,\delta q)$ 的模态表达式，首先由式 (8) 得：

$$q^2 = \alpha_0^2 y_0^2 + \alpha_n^2 y_n^2 + cc + 2(\alpha_0\alpha_n y_0 y_n + cc + \alpha_n\overline{\alpha}_n y_n \overline{y}_n), \tag{11}$$

因而有：

$$\begin{aligned} P_{21}(q,\delta q) = \alpha_0^2 P_{21}(y_0,\delta q) + \alpha_n^2 P_{21}(y_n,\delta q) + \\ cc + \alpha_0\alpha_n P_{111}(y_0,y_n,\delta q) + \\ cc + \alpha_n\overline{\alpha}_n P_{111}(y_n,\overline{y}_n,\delta q), \end{aligned} \tag{12}$$

式中的 $P_{21}(y_0,\delta q)$ 和 $P_{111}(y_0,y_n,\delta q)$ 分别代表由 2 个相同模态 y_0 和混合模态 y_0, y_n 构成的 3 次幂应变能项 (另外加上模态 δq)，$P_{21}(y_n,\delta q)$ 和 $P_{111}(y_n,\overline{y}_n,\delta q)$ 含义相同，下标数字分别依次表示应变能中模态的组分。混合模态 3 次幂应变能项的一般表达式为 $P_{111}(q,q_1,\delta q)$，其计算公式由 $P_{21}(q,\delta q)$ 中 δq 的系数表达式对 q 进行变分，再将变分结果中的 δq 换成模态 q_1 得到，即

$$\begin{aligned} &P_{21}(q,\delta q) \sim q^2\delta q, \\ &P_{111}(q,q_1,\delta q) \sim 2qq_1\delta q. \end{aligned} \tag{13}$$

由上式可见，$P_{111}(q,q_1,\delta q)$ 的计算式中已包含因子 2, 因此由式 (11) 得到的式 (12) 中 P_{111} 项不出现因子 2 。

式 (12) 中分别令 $\delta q = \overline{y}_i (i=0,n)$，由复指数函数的正交性得：

$$\begin{aligned} &P_{21}(q,y_0) = P_{21}(y_0,y_0)\alpha_0^2 + P_{111}(y_n,\overline{y}_n,y_0)\alpha_n\overline{\alpha}_n, \\ &P_{21}(q,\overline{y}_n) = P_{111}(y_0,y_n,\overline{y}_n)\alpha_0\alpha_n. \end{aligned} \tag{14}$$

同样的推导得到 4 次应变能的模态表达式：

$$\begin{aligned} P_{31}(q,y_0) = P_{31}(y_0,y_0)\alpha_0^3 + \\ P_{1111}(y_0,y_n,\overline{y}_n,y_0)\alpha_0\alpha_n\overline{\alpha}_n, \\ P_{31}(q,\overline{y}_n) = P_{211}(y_0,y_n,\overline{y}_n)\alpha_0^2\alpha_n + \\ P_{211}(y_n,\overline{y}_n,\overline{y}_n)\alpha_n^2\overline{\alpha}_n. \end{aligned} \tag{15}$$

同式 (12)，上式中 P 的下标数字分别依次表示 4 次应变能中模态的组分，P_{211} 和 P_{1111} 项对应于混合模态，其一般表达式分别为 $P_{211}(q,q_1,\delta q)$ 和 $P_{1111}(q,q_1,q_2,\delta q)$，其计算公式的得到过程与式 (13) 中 $P_{111}(q,q_1,\delta q)$ 的类似，即

$$\begin{aligned} &P_{31}(q,\delta q) \sim q^3\delta q, \\ &P_{211}(q,q_1,\delta q) \sim 3q^2q_1\delta q, \\ &P_{1111}(q,q_1,q_2,\delta q) \sim 6qq_1q_2\delta q. \end{aligned} \tag{16}$$

运动方程 (2) 中，现在仅外力所做的虚功 $W_{11}(F,\delta q)$ 未定。扬声器辐射体薄壳仅在小端处 ($s=a$ 处) 受到轴向的电磁驱动力 $F(t)$ 。设为简谐驱动，即

$$F(t) = Bli = BlI_m\cos\omega t = F_m\cos\omega t. \tag{17}$$

式中，B 为磁感应强度，l 为音圈导线长度，i 为电流强度。该力所做的虚功为：

$$W_{11}(F,\delta q) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} F(t)\delta u_{ax}\mathrm{d}\theta, \tag{18}$$

式中，u_{ax} 代表薄壳小端处的轴向位移，是该处纵向位移和横向位移的合成位移，见图 2 。式 (18) 中分别令 $\delta q = \overline{y}_i (i=0,n)$，得：

$$W_{11}(F,y_0) = F(t)u_{ax}, W_{11}(F,\overline{y}_n) = 0, \tag{19}$$

由于非轴对称模态的轴向位移在小端处为零，因此 u_{ax} 即为轴对称模态在小端处的轴向位移。上述推导表明，在周向均匀驱动下，即使非轴对称模态在小端处的轴向位移不为零，也仅有轴对称模态受到激励。同样理由，作整体振动的音圈质量对非轴对称模态无影响，仅对轴对称模态有影响。

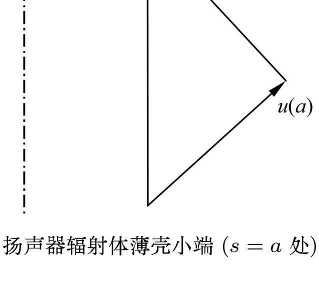

图 2 扬声器辐射体薄壳小端 ($s=a$ 处) 的合成位移

将式 (10) 、式 (14) 、式 (15) 和式 (19) 代入方程 (2), 得到离散化的扬声器辐射体薄壳非线性模态振动方程

$$\begin{aligned}&m_0\ddot{\alpha}_0+m_0\omega_0^2\alpha_0+P_{21}(y_0,y_0)\alpha_0^2+\\&\quad P_{111}(y_n,\overline{y}_n,y_0)\alpha_n\overline{\alpha}_n+P_{31}(y_0,y_0)\alpha_0^3+\\&\quad P_{1111}(y_0,y_n,\overline{y}_n,y_0)\alpha_0\alpha_n\overline{\alpha}_n=F(t)u_{ax},\\&m_n\ddot{\alpha}_n+m_n\omega_n^2\alpha_n+P_{111}(y_n,y_0,\overline{y}_n)\alpha_n\alpha_0+\\&\quad P_{211}(y_0,y_n,\overline{y}_n)\alpha_0^2\alpha_n+P_{211}(y_n,\overline{y}_n,\overline{y}_n)\alpha_n^2\overline{\alpha}_n=0.\end{aligned}\tag{20}$$

利用式 (7), 上述方程改写为：

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+\omega_0^2x+\widehat{b}_1x^2+\widehat{b}_2z^2+\widehat{b}_3x^3+\widehat{b}_4z^2x=\widehat{F}_a\cos(\omega t),\\&\ddot{z}+\omega_n^2z+\widehat{b}_5xz+\widehat{b}_6x^2z+\widehat{b}_7z^3=0.\end{aligned}\tag{21}$$

本文中，令模态横向位移的最大值等于薄壳厚度，这意味着上式中的广义坐标 x 和 z 由薄壳厚度无量纲化。时间和角频率选用扬声器的某个特征频率 ω_c 无量纲化，即

$$\tau=\omega_ct,\ \Omega=\frac{\omega}{\omega_c},\ \ \Omega_0=\frac{\omega_0}{\omega_c},\ \ \Omega_n=\frac{\omega_n}{\omega_c}.\tag{22}$$

另外，方程 (21) 中没有考虑阻尼。扬声器振膜阻尼以复数杨氏模量计入 [8], 即 $E=E(1+\mathrm{i}\widehat{\delta})$, 式中 $\widehat{\delta}$ 为材料损耗因子。考虑无量纲化式 (22) 和阻尼后，方程 (21) 改写成：

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+2\widehat{\mu}_0\dot{x}+\Omega_0^2x+\widehat{b}_1x^2+\widehat{b}_2z^2+\\&\quad\widehat{b}_3x^3+\widehat{b}_4z^2x=\widehat{F}_a\cos(\Omega\tau),\\&\ddot{z}+2\widehat{\mu}_n\dot{z}+\Omega_n^2z+\widehat{b}_5xz+\widehat{b}_6x^2z+\widehat{b}_7z^3=0,\end{aligned}\tag{23}$$

式中的系数为：

$$\begin{aligned}&\widehat{b}_1=\frac{P_{21}(y_0,y_0)}{m_0\omega_c^2},\ \ \widehat{b}_2=\frac{P_{111}(y_n,\overline{y}_n,y_0)}{4m_0\omega_c^2},\\&\widehat{b}_3=\frac{P_{31}(y_0,y_0)}{m_0\omega_c^2},\ \ \widehat{b}_4=\frac{P_{1111}(y_0,y_n,\overline{y}_n,y_0)}{4m_0\omega_c^2},\\&\widehat{b}_5=\frac{4m_0}{m_n}\widehat{b}_2,\ \ \widehat{b}_6=\frac{2m_0}{m_n}\widehat{b}_4,\ \ \widehat{b}_7=\frac{P_{211}(y_n,\overline{y}_n,\overline{y}_n)}{4m_n\omega_c^2},\\&\widehat{F}_a=\frac{F_mu_{ax}}{m_0\omega_c^2},\ \ \widehat{\mu}_0=\frac{\Omega_0^2\widehat{\delta}}{2\Omega},\ \ \widehat{\mu}_n=\frac{\Omega_n\widehat{\delta}}{2}.\end{aligned}\tag{24}$$

上式中阻尼系数 μ_0 和 μ_n 的表达式是在假定轴对称模态作与驱动力同频率的振动，而非轴对称模态近似以固有频率振动的条件下成立的。

由方程 (23) 可见，几何和力学性质周向均匀的扬声器轴对称形状辐射器在周向均匀驱动下，仅轴对称模态被直接激励，在此条件下，若不计非线性影响，非轴对称振动不会产生。方程中出现了平方和立方非线性项，除模态自身的非线性项外，还出现了模态间的非线性耦合项。一个重要的现象是，轴对称模态和非轴对称模态的平方非线性耦合项的形式是不同的，分别为 z^2 和 xz 。因此，若直接激励的轴对称模态作与激励频率同频率的简谐振动，则轴对称模态对非轴对称模态表现为参数激励，当激励频率和固有频率满足 $\Omega\approx 2\Omega_n$, 非轴对称模态在一定条件下将出现稳定的参数激励振动 [11], 从而出现 1/2 分谐波。当扫频测量时，不同固有频率的非轴对称模态被激发，从而在若干个频率范围出现半分频失真。

2.2 3 种特殊情形下的运动方程

情形 1, 驱动频率不很接近于非轴对称模态固有频率的 2 倍。此时，非轴对称模态不会被激发振动，方程 (23) 简化为：

$$\ddot{x}+2\widehat{\mu}_0\dot{x}+\Omega_0^2x+\widehat{b}_1x^2+\widehat{b}_3x^3=\widehat{F}_a\cos(\Omega\tau).\tag{25}$$

该方程可用于分析发生在 $\Omega\approx\Omega_0/2$ 和 $\Omega\approx\Omega_0/3$ 频率范围的 2 次和 3 次谐波失真，由于扬声器辐射体薄壳在分割振动频段随着节圆数的增加存在一系列的固有模态和固有频率，因此当扫频测量时，在一系列频率范围出现谐波失真。对扬声器而言，源于上述单个轴对称模态并出现于 $\Omega\approx 2\Omega_0$ 和 $\Omega\approx 3\Omega_0$ 频率范围的 1/2 和 1/3 分谐波失真一般不会发生，因为此时频率已相当高，达不到产生分谐波的阈值振幅。

情形 2, $\Omega\approx 2\Omega_n$, 且轴对称振动远离共振状态。由对方程 (23) 的讨论知道，此时轴对称振动对非轴对称模态表现为参数主共振激励。实验发现此时被耦合激发的非轴对称模态振幅远大于轴对称振动振幅，且呈软弹簧非线性特性 [6], 但数值计算表明方程 (23) 为硬弹簧非线性系统。该不一致性曾让我们非常苦恼，反复推导和多次核算表明方程和数值结果是正确的。这促使我们思考模型的正确性，经反复探索后发现需考虑更多模态。

考虑到上述非轴对称模态振幅远大于轴对称振动振幅的实验事实以及非轴对称模态处于共振状态需保留阻尼项的特点，忽略小量，方程 (23) 简化并改写为：

$$\ddot{x}+\Omega_0^2x=\widehat{F}_a\cos(\Omega\tau)-\widehat{b}_2z^2,\tag{26}$$

$$\ddot{z}+2\widehat{\mu}_n\dot{z}+\Omega_n^2z+\widehat{b}_5xz+\widehat{b}_7z^3=0.\tag{27}$$

可以设想被轴对称振动所激发的振幅很大的非轴对称模态 z 也能通过非线性耦合再激发其它的模态，为叙述方便，称这些模态为 “耦合再激发模态” 。以下分析中，假定耦合再激发模态不处于共振状态。按照叠加原理，据方程 (26), 令

$$x=x_F+\sum_{i,j}x_{ij},\tag{28}$$

式中，x_F 为由外力直接驱动的轴对称振动，而 x_{ij}

代表耦合再激发模态 (下标 i, j 分别代表模态的周向波数和经向节圆数) 。因而 x_F 为：

$$x_F = \frac{-\widehat{F}_a}{\Omega^2 - \Omega_0^2} \cos \Omega\tau \equiv \widehat{K} \cos \Omega\tau, \tag{29}$$

而 x_{ij} 需满足：

$$\ddot{x}_{ij} + \Omega_{ij}^2 x = -\widehat{b}_{2(ij)} z^2, \ (i=0, 2n;\ j=1,2,3,\cdots). \tag{30}$$

由于耦合再激发模态由共振非轴对称模态 $z(t)Y_n(s)\cos n\theta$ 平方非线性激发，因而其周向波数应为 0 或 $2n$ 。设 z 具有如下形式的解：

$$z = a_n \cos[(\Omega\tau - \varphi_n)/2], \tag{31}$$

则由方程 (30) 解得：

$$x_{ij} = -\frac{\widehat{b}_{2(ij)} a_n^2}{2\Omega_{ij}^2} + \frac{\widehat{b}_{2(ij)} a_n^2}{2(\Omega^2 - \Omega_{ij}^2)} \cos(\Omega\tau - \varphi_n). \tag{32}$$

利用式 (31) 和式 (32), 略去高次谐波，方程 (27) 中的非线性项表为：

$$\widehat{b}_5 xz + \widehat{b}_7 z^3 \approx \widehat{b}_5 x_F z + \frac{3}{4}\widehat{b}_{7e} a_n^3 \cos\frac{\Omega\tau - \varphi_n}{2}, \tag{33}$$

式中，等效的立方非线性系数 $\widehat{b}_{7e}$ 为：

$$\widehat{b}_{7e} = \widehat{b}_7 - \sum_i \sum_j \frac{\widehat{b}_{2(ij)}\widehat{b}_{5(ij)}}{3}\left(\frac{2}{\Omega_{ij}^2} + \frac{1}{\Omega_{ij}^2 - \Omega^2}\right), \tag{34}$$

式中：

$$\begin{aligned}\widehat{b}_{2(0j)}\widehat{b}_{5(0j)} &= \frac{P_{111}(y_{nj}, \overline{y}_{nj}, y_{0j})^2}{4m_{0j} m_{nj}\omega_c^4},\\ \widehat{b}_{2(2nj)}\widehat{b}_{5(2nj)} &= \frac{P_{111}(y_{nj}, y_{nj}, \overline{y}_{2nj})^2}{8m_{nj} m_{2nj}\omega_c^4}.\end{aligned} \tag{35}$$

j 越大, 其对 $\widehat{b}_{7e}$ 的贡献越小, 计算中 j 取至足够大, 直至 $\widehat{b}_{7e}$ 在规定精度内收敛。

最终，由式 (29) 和式 (33) 将方程 (27) 改写成：

$$\ddot{z} + 2\widehat{\mu}_n \dot{z} + \Omega_n^2 z + \widehat{b}_5 \widehat{K} \cos(\Omega\tau) z + \widehat{b}_{7e} z^3 = 0. \tag{36}$$

上述方程为带立方非线性的 Mathieu 参数激励方程， $\widehat{b}_{7e}$ 的正负决定了非线性的硬软特性。可见，直接激励的轴对称振动对非轴对称模态起参数激励作用, 而耦合再激发模态仅影响了立方非线性系数的大小和正负，因而轴对称振动振幅决定了 1/2 分谐波的是否出现, 耦合再激发模态决定了分谐波的大小和非线性的软硬特性 [6] 。薄板总表现为硬弹簧非线性, 而薄壳在大多数情形下表现为软弹簧非线性, 这是由于前者的回复力是对称的, 只有立方非线性; 而后者的回复力是非对称的，含有平方非线性。由于平方非线性总表现为软弹簧特性 (见式 (34)), 因此薄壳在大多数情形下呈现为软性非线性。

采用文献12的方法可以证明由解 (29)、方程 (36) 组成的现系统和由方程 (26) 、(27) 、(30) 组成的原系统等效，即两者的解和解的稳定性相同。

情形 3, $\Omega \approx \Omega_0 \approx 2\Omega_n$ 。此时，由于 2 个模态的固有频率成整数倍关系, 系统将出现所谓的 “内共振” 现象 [11] 。由于轴对称振动也被共振激发，2 个模态振幅同量级 [7], 首级近似分析中，可略去方程 (23) 的立方非线性项，得：

$$\begin{aligned}&\ddot{x} + 2\widehat{\mu}_0 \dot{x} + \Omega_0^2 x + \widehat{b}_1 x^2 + \widehat{b}_2 z^2 = \widehat{F}_a \cos(\Omega\tau),\\ &\ddot{z} + 2\widehat{\mu}_n \dot{z} + \Omega_n^2 z + \widehat{b}_5 xz = 0.\end{aligned} \tag{37}$$

此时, 除出现 1/2 分谐波振动外, 还将产生混沌等复杂非线性现象 [7], 可解释我国学者首次观测到的扬声器混沌现象 [13] 。

2.3 含任意个模态的运动方程

对薄壳这种 2 维振动，可设参与模态为：

$$\begin{aligned}q = &\sum_{m=1}^{m_0} \alpha_{0m}(t) y_{0m}(s) + \\ &\sum_{n=1}^{g}\sum_{m=1}^{m_n} [\alpha_{nm}(t) Y_{nm}(s) e^{in\theta} + c.c.]\end{aligned} \tag{38}$$

式中， g 为任意正整数， m 为经向节圆数， m_n 为对应于 n 个周向波数模态的最大波节数。记

$$\begin{aligned}&y_{nm}(s,\theta) = Y_{nm}(s) e^{\mathrm{i}n\theta},\\ &Y_{-nm}(s) = \overline{Y}_{nm}(s),\\ &\alpha_{-nm} = \overline{\alpha}_{nm},\end{aligned} \tag{39}$$

则有 $y_{-nm}(s,\theta) = \overline{y}_{nm}(s,\theta)$, 且式 (38) 可写成：

$$q = \sum_{n=-g}^{g}\sum_{m=1}^{m_n} \alpha_{nm}(t) y_{nm}(s,\theta). \tag{40}$$

经过与得到方程 (20) 的相似推导，得运动方程：

$$\begin{aligned}&m_{nm}\ddot{\alpha}_{nm} + m_{nm}\omega_{nm}^2 \alpha_{nm} + \sum_{n_1=n-g}^{n/2}\sum_{m_1=1}^{m_{n_1}}\sum_{m_2=1}^{m_{n_2}} G_1 \alpha_{n_1 m_1}\alpha_{n_2 m_2} P_{111}(y_{n_1 m_1}, y_{n_2 m_2}, \overline{y}_{nm}) + \\ &\sum_{n_3=-g}^{n/3}\ \sum_{\substack{n_4=\max(n_3,\\ n-g-n_3)}}^{(n-n_3)/2}\ \sum_{m_3=1}^{m_{n_3}}\sum_{m_4=1}^{m_{n_4}}\sum_{m_5=1}^{m_{n_5}} G_2 \alpha_{n_3 m_3}\alpha_{n_4 m_4}\alpha_{n_5 m_5} P_{1111}(y_{n_3 m_3}, y_{n_4 m_4}, y_{n_5 m_5}, \overline{y}_{nm}) \\ &= \begin{cases} F(t) u_{ax}, & n = 0,\\ 0, & n \neq 0,\end{cases} \quad (n = 0, 1, \cdots, g; m = 0, 1, \cdots, m_n),\end{aligned} \tag{41}$$

式中，m_2 和 m_5 取值时避免重复，而由复指数函数的正交性，仅当 P_{111} 和 P_{1111} 中各模态下标的周向波数之和为零时，其值不为零，因而 n_2 和 n_5 不出现在求和号中，它们分别为：

$$n_2 = n - n_1,\quad n_5 = n - n_3 - n_4. \tag{42}$$

另外，式 (41) 中，当 $P_{111}(y_{n_1m_1}, y_{n_2m_2}, \overline{y}_{nm})$ 中的 2 个模态 $y_{n_1m_1}$ 和 $y_{n_2m_2}$ 相同时，取 $G_1 = 1/2$, 不同时取 $G_1 = 1$; 当 $P_{1111}(y_{n_3m_3}, y_{n_4m_4}, y_{n_5m_5}, \overline{y}_{nm})$ 中的 3 个模态 $y_{n_3m_3}$, $y_{n_4m_4}$ 和 $y_{n_5m_6}$ 相同时，取 $G_2 = 1/6$, 2 个模态相同时，取 $G_2 = 1/2$, 3 个模态各不同时，取 $G_2 = 1$ 。上述取值规定是由于 (据式 (13) 和式 (16))

$$\begin{aligned} &P_{21}(q,\delta q) = P_{111}(q,q,\delta q)/2,\\ &P_{31}(q,\delta q) = P_{1111}(q,q,q,\delta q)/6,\\ &P_{211}(q,q_1,\delta q) = P_{1111}(q,q,q_1,\delta q)/2. \end{aligned} \tag{43}$$

若列出周向波数分别为 $0, n$ 和 $2n$ 三个模态的耦合振动方程，可发现若频率满足 $\Omega \approx 2\Omega_{2n} \approx 4\Omega_n$, 通过参数激励，轴对称振动可首先激发 $2n$ 模态的 1/2 分谐波振动，而后者可激发 n 模态的 1/4 分谐波振动，这可以解释实验已发现的扬声器声波中的高阶分谐波振动[13−14] 。

方程 (20) 可由方程 (41) 退化得到。

2.4 方程系数的计算

对一般形状的旋转薄壳，上述方程的系数必须借助数值方法得到，本文采用有限元数值方法和较为精确的 Sanders 非线性薄壳理论[9] 。由于以下给出的计算公式不涉及到模态沿经向的具体分布，因此省略模态的经向节圆下标。

首先由标准的有限元法按下式计算线性固有频率和模态：

$$(-\omega_n^2\boldsymbol{M}^{(n)} + \boldsymbol{K}^{(n)})\boldsymbol{y}^{(n)} = 0,\quad \left(\left|W_{\max}^{(n)}\right| = h\right), \tag{44}$$

式中，$\boldsymbol{M}^{(n)}$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{K}^{(n)}$ 为刚度矩阵，$\boldsymbol{y}^{(n)}$ 为模态的经向分量。然后按下式计算方程的线性系数：

$$\begin{aligned} &M_{11}(y_n,\overline{y}_n) = 2\pi\boldsymbol{y}^{(n)t}\boldsymbol{M}^{(n)}\boldsymbol{y}^{(n)},\\ &P_{11}(y_n,\overline{y}_n) = 2\pi\boldsymbol{y}^{(n)t}\boldsymbol{K}^{(n)}\boldsymbol{y}^{(n)}. \end{aligned} \tag{45}$$

对非线性系数，按照式 (13) 和式 (16) 的思路对附录 B 给出的应变能作变分计算得到 $P_{111}(q, q_1, \delta q)$ 和 $P_{1111}(q, q_1, q_2, \delta q)$, 即可得出方程 (41) 中的非线性系数的计算公式。具体推导过程见文献 15, 为方便参考，这里引用其结果。平方非线性系数 $P_{111}(y_j, y_{n-j}, \overline{y}_n)$ 计算公式为[15]:

$$P_{111}(y_j,y_k,\overline{y}_n) = 2\pi K\int_a^b r\left[\boldsymbol{E}^{(n)t}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{B}^{(n)t}\boldsymbol{\eta}\right]\mathrm{d}s, \tag{46}$$

式中，$k = n - j$, 伸长劲度 $K = Eh/(1-\nu^2)$, 应变经向分量矩阵 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{B}^{(n)}$(括号中的数字代表周向波数，下同) 的表达式见附录 C, 列矩阵 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的分量用 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{B}^{(n)}$ 的分量表示为：

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = -s(j)s(k)\left[\nu B_\theta^{(j)}B_\theta^{(k)} + B^{(j)}B^{(k)} + \nu B^{(j)}B^{(k)}\right] + B_s^{(j)}B_s^{(k)},\\ &\zeta_2 = -s(j)s(k)\left[B_\theta^{(j)}B_\theta^{(k)} + B^{(j)}B^{(k)} + \nu B^{(j)}B^{(k)}\right] + \nu B_s^{(j)}B_s^{(k)},\\ &\zeta_3 = \nu_1\left[s(j)B_\theta^{(j)}B_s^{(k)} + s(k)B_s^{(j)}B_\theta^{(k)}\right],\\ &\eta_1 = B_s^{(j)}\left[E_s^{(k)} + \nu E_\theta^{(k)}\right] + \left[E_s^{(j)} + \nu E_\theta^{(j)}\right]B_s^{(k)} - \nu_1 s(j)s(k)\left[E_{s\theta}^{(j)}B_\theta^{(k)} + B_\theta^{(j)}E_{s\theta}^{(k)}\right],\\ &\eta_2 = s(j)B_\theta^{(j)}\left[E_\theta^{(k)} + \nu E_s^{(k)}\right] + s(k)\left[E_\theta^{(j)} + \nu E_s^{(j)}\right]B_\theta^{(k)} + \nu_1\left[s(j)E_{s\theta}^{(j)}B_s^{(k)} + s(k)B_s^{(j)}E_{s\theta}^{(k)}\right],\\ &\eta_3 = \nu_2\left\{s(j)B^{(j)}\left[E_s^{(k)} + E_\theta^{(k)}\right] + s(k)\left[E_s^{(j)} + E_\theta^{(j)}\right]B^{(k)}\right\}, \end{aligned} \tag{47}$$

式中，$\nu_1 = 1 - \nu$, $\nu_2 = 1 + \nu$, $s(n)$ 为如下定义的符号函数：

$$s(n) = \begin{cases} +1, & n > 0,\\ 0, & n = 0,\\ -1, & n < 0. \end{cases} \tag{48}$$

方程 (41) 中立方非线性系数 $P_{1111}(y_j, y_k, y_l, \overline{y}_n)$ 计算公式为[15]:

$$P_{1111}(y_j,y_k,y_l,\overline{y}_n) = 2\pi K\int_a^b r\boldsymbol{B}^{(n)t}\boldsymbol{\lambda}\mathrm{d}s, \tag{49}$$

式中，$l = n - j - k$, 列矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 的分量为：

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = & -s(k)s(l)B_s^{(j)}\left[\nu_2 B^{(k)}B^{(l)} + B_\theta^{(k)}B_\theta^{(l)}\right] - s(j)s(l)B_s^{(k)}\left[\nu_2 B^{(j)}B^{(l)} + B_\theta^{(j)}B_\theta^{(l)}\right] - \\
& s(j)s(k)\left[\nu_2 B^{(j)}B^{(k)} + B_\theta^{(j)}B_\theta^{(k)}\right]B_s^{(l)} + 3B_s^{(j)}B_s^{(k)}B_s^{(l)}, \\
\lambda_2 = & \, s(j)B_\theta^{(j)}B_s^{(k)}B_s^{(l)} + s(k)B_s^{(j)}B_\theta^{(k)}B_s^{(l)} + s(l)B_s^{(j)}B_s^{(k)}B_\theta^{(l)} - \\
& s(j)s(k)s(l)\left\{3B_\theta^{(j)}B_\theta^{(k)}B_\theta^{(l)} + \nu_2\left[B_\theta^{(j)}B^{(k)}B^{(l)} + B^{(j)}B_\theta^{(k)}B^{(l)} + B^{(j)}B^{(k)}B_\theta^{(l)}\right]\right\}, \\
\lambda_3 = & \, \nu_2\left\{s(j)B^{(j)}B_s^{(k)}B_s^{(l)} + s(k)B_s^{(j)}B^{(k)}B_s^{(l)} + s(l)B_s^{(j)}B_s^{(k)}B^{(l)} - \right. \\
& \left. s(j)s(k)s(l)\left[6B_{(j)}B^{(k)}B^{(l)} + B^{(j)}B_\theta^{(k)}B_\theta^{(l)} + B_\theta^{(j)}B_{(k)}B_\theta^{(l)} + B_\theta^{(j)}B_\theta^{(k)}B^{(l)}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{50}$$

由一般性式 (47) 和式 (50), 并考虑到式 (43), 可得方程 (20) 的较为简洁的平方和立方非线性系数计算公式：

$$\begin{aligned}
& P_{111}(y_n,\overline{y}_n,y_0) = 2\pi K\int_a^b r\left[l_1E_s^{(0)} + l_2E_\theta^{(0)} + l_3B_s^{(0)}\right]\mathrm{d}s, \\
& l_1 = \left[B_s^{(n)2} + B^{(n)2}\right] + \nu\left[B_\theta^{(n)2} + B^{(n)2}\right], \\
& l_2 = \nu\left[B_s^{(n)2} + B^{(i)2}\right] + \left[B_\theta^{(n)2} + B^{(n)2}\right], \\
& l_3 = 2\left[E_s^{(n)}B_s^{(n)} + \nu E_\theta^{(n)}B_s^{(n)} + \nu_1E_{s\theta}^{(n)}B_\theta^{(n)}\right], \\
& P_{21}(y_0,y_0) = P_{111}(y_0,y_0,y_0)/2 = 3\pi K\int_a^b r\left[E_s^{(0)} + \nu E_\theta^{(0)}\right]B_s^{(0)^2}\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
& P_{1111}(y_0,y_n,\overline{y}_n,y_0) = 2\pi K\int_a^b r\left[3B_s^{(n)2} + B_\theta^{(n)2} + (1+\nu)B^{(n)^2}\right]B_s^{(0)2}\mathrm{d}s, \\
& P_{211}(y_n,\overline{y}_n,\overline{y}_n) = P_{1111}(y_n,y_n,\overline{y}_n,\overline{y}_n)/2 = \\
& \quad \pi K\int_a^b r\left\{3B_\theta^{(n)4} + 3B_s^{(n)4} + 2B_s^{(n)2}B_\theta^{(n)2} + 2(1+\nu)B^{(n)2}\left[3B^{(n)2} + B_s^{(n)2} + 3B_\theta^{(n)2}\right]\right\}\mathrm{d}s, \\
& P_{31}(y_0,y_0) = P_{1111}(y_0,y_0,y_0,y_0)/6 = \pi K\int_a^b rB_s^{(0)4}\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{52}$$

式 (35) 中的 $P_{111}(y_n,y_n,\overline{y}_{2n})$ 的计算公式同样由式 (47) 得到：

$$\begin{aligned}
& P_{111}(y_n,y_n,\overline{y}_{2n}) = 2\pi K\int_a^b r\widetilde{P}\mathrm{d}s, \\
& \widetilde{P} = E_s^{(2n)}\left[B_s^{(n)2} - \nu B_\theta^{(n)2} - \nu_2B^{(n)2}\right] + E_\theta^{(2n)}\left[\nu B_s^{(n)2} - B_\theta^{(n)2} - \nu_2B^{(n)2}\right] + \\
& \quad 2\nu_1E_{s\theta}^{(2n)}B_\theta^{(n)}B_s^{(n)} + \left\{\left[E_s^{(n)} + \nu E_\theta^{(n)}\right]B_s^{(n)} - \nu_1E_{s\theta}^{(n)}B_\theta^{(n)}\right\}B_s^{(2n)} + \\
& \quad \left\{\left[E_\theta^{(n)} + \nu E_s^{(n)}\right]B_\theta^{(n)} + \nu_1E_{s\theta}^{(n)}B_s^{(n)}\right\}B_\theta^{(2n)} + \nu_2\left[E_s^{(n)} + E_\theta^{(n)}\right]B^{(n)}B^{(2n)}.
\end{aligned} \tag{53}$$

至此，非线性运动方程的系数计算公式已全部给出。首先由式 (44) 计算线性固有频率和模态，然后由式 (45) 计算线性项系数，最后根据上述公式计算非线性项系数，公式中诸量通过附录中式 (C2) 由已知的线性模态位移计算。

本文编制的有限元程序采用曲边环单元， 3 个位移均采用 3 次多项式插值. 利用 Mathemtica 软件符号运算功能，并设置为 Fortran 语言输出，可给编程带来极大方便。

3 结论

选用几个特定模态分析扬声器感兴趣窄带的非线性振动时，若要在非线性方程中考虑至立方非线性，必须考虑耦合再激发模态; 若仅需考虑至平方非

线性，耦合再激发模态不必考虑。

当轴对称振动频率不很接近于非轴对称模态固有频率的 2 倍时, 仅有轴对称振动, 方程 (25) 可用于分析谐波失真。扬声器辐射体薄壳的分谐波失真源于轴对称振动和非轴对称模态的非线性耦合作用。等效方程 (36) 可用于分析当驱动频率约等于非轴对称模态固有频率的 2 倍且轴对称振动远离共振状态时的分谐波失真; 方程 (37) 可用于分析当 $\Omega \approx \Omega_0 \approx 2\Omega_n$ 时的分谐波失真和混沌现象，文献 6 和文献 7 将分别就上述 2 种情形作实验和理论探讨。扬声器辐射体薄壳的一般性非线性模态方程 (41) 可用于宽频的非线性分析，例如考虑非线性的扬声器 CAD, 或者基于模态的声辐射功率计算 (文献 16 和文献 17 研究了线性情形的模态声辐射功率，其方法可扩展至非线性情形) 。选择合适的模态，也可用于扬声器互调失真和高阶分谐波分析。

综上所述, 给出的非线性运动方程可用于分析扬声器的各种非线性失真, 这些方程揭示了扬声器辐射体薄壳的非线性失真机制。板壳作为常用声源，本文结果可直接退化得到圆板的非线性模态方程。

参 考 文 献

1 Radwan H, Genin J. Non-linear modal equations for thin elastic shells. *Non-Linear Mechanics*, 1975; **10**(1): 15—29

2 Shi Y, Mei C. A finite element time domain modal formulation for large amplitude free vibrations of beams and plates. *J. Sound Vib.*, 1996; **193**(2): 453—464

3 Lee Y Y, Ng C F. Nonlinear response of composite plates using the finite element modal reduction method. *Journal of Engineering Structures*, 2001; **23**(9): 1104—1114

4 Amabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. *J. Sound Vib.*, 2003; **264**: 1091—1125

5 Pellicano F, Amabili M, Padoussis M P. Effect of the geometry on the non-linear vibration of circular cylindrical shells. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2002; **37**: 1181—1198

6 张志良，刘世清，曾宪阳. 无内共振时的扬声器分谐波. 声学学报， 2012; **37**(3)

7 张志良，刘世清，李小菊. 有内共振时的扬声器分谐波和混沌. 声学学报， 2012; **37**(4)

8 Frankort F J M. Vibration and sound radiation of loudspeaker cones. Eindhoven, Netherlands: NV Philips' Gloeilampenfabrieken, 1975. (中译本：赵志诚，杨良柏，李联芳译. 扬声器锥体的振动和声辐射. 北京：科学出版社， 1988)

9 Maewal A. Finite element analysis of steady nonlinear harmonic oscillations of axisymmetric shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986; **58**(1): 37—50

10 管善群. 电声技术基础. 北京：人民邮电出版社，修订版， 1988: 216—219

11 Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley & Sons, 1979

12 Ginsberg J H. An equivalence principle for systems with secondary generalized coordinates. *J. Sound Vib.*, 1972; **23**(1): 55—61

13 Miao G Q, Ni W S, Tao Q T, Zhang Z L, Wei R J. Bifurcation, chaos and hysteresis in electrodynamic cone loudspeaker. *Chinese Phys. Lett.*, 1990; **7**(2): 68—71

14 Pedersen P O. Subharmonics in forced oscillations in dissipative systems, part I. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1935; **6**(4): 227—238

15 孟庆照，李小菊，张志良. 闭合旋转薄壳的非线性模态方程. 浙江师范大学学报 (自然科学版), 2010; **33**(1): 63—69

16 黎胜，赵德有. 结构声辐射的振动模态分析和声辐射模态分析研究. 声学学报， 2004; **29**(3): 200—208

17 李双，陈克安. 结构振动模态和声辐射模态之间的对应关系及应用. 声学学报， 2007; **32**(2): 171—177

附录 A Sanders 薄壳理论的应变、转角分量和应变能面密度的表达式

薄膜应变：

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= u_{,s} + w/R_1,\\ \varepsilon_\theta &= (v_{,\theta} + u\sin\alpha + w\cos\alpha)/r,\\ \varepsilon_{s\theta} &= (v_{,s} + u_{,\theta}/r - v\sin\alpha/r)/2.\end{aligned} \tag{A1}$$

角位移：

$$\begin{aligned}\beta_s &= -w_{,s} + u/R_1,\\ \beta_\theta &= (-w_{,\theta} + v\cos\alpha)/r,\\ \beta &= (v_{,s} + v\sin\alpha/r - u_{,\theta}/r)/2.\end{aligned} \tag{A2}$$

弯曲应变：

$$\begin{aligned}&\kappa_s = -w_{,ss} + u_{,s}/R_1 - uR_{1,s}/R_1^2,\\ &\kappa_\theta = (\beta_s\sin\alpha + \beta_{\theta,\theta})/r,\\ &\kappa_{s\theta} = [\beta_{s,\theta}/r + \beta_{\theta,s} - \beta_\theta\sin\alpha/r + (\cos\alpha/r - R_1^{-1})\beta]/2,\end{aligned} \tag{A3}$$

式中， R_1 为薄壳第一主曲率半径， α 为薄壳母线的切线与铅直线的夹角。

附录 B 应变能面密度

非线性薄膜应变：

$$\begin{aligned}\widetilde{\varepsilon}_s &= \varepsilon_s + \frac{\beta_s^2 + \beta^2}{2},\\ \widetilde{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + \frac{\beta_\theta^2 + \beta^2}{2},\\ \widetilde{\varepsilon}_{s\theta} &= \varepsilon_{s\theta} + \frac{\beta_s\beta_\theta}{2}.\end{aligned} \tag{B1}$$

应变能面密度：

$$\begin{aligned}p(q) = \frac{K}{2}\Big\{&\widetilde{\varepsilon}_s^2 + \widetilde{\varepsilon}_\theta^2 + 2\nu\widetilde{\varepsilon}_s\widetilde{\varepsilon}_\theta + 2(1-\nu)\widetilde{\varepsilon}_{s\theta}^2 + \\ &\frac{h^2}{12}\left[\kappa_s^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu\kappa_s\kappa_\theta + 2(1-\nu)\kappa_{s\theta}^2\right]\Big\},\end{aligned} \tag{B2}$$

式中，伸长劲度 $K = Eh/(1-\nu^2)$ 。式 (B1) 代入式 (B2) 得 2 次幂、 3 次幂和 4 次幂应变能面密度：

$$p_2(q)=\frac{K}{2}\left\{\varepsilon_s^2+\varepsilon_\theta^2+2\nu\varepsilon_s\varepsilon_\theta+2(1-\nu)\varepsilon_{s\theta}^2+\frac{h^2}{12}\left[\kappa_s^2+\kappa_\theta^2+2\nu\kappa_s\kappa_\theta+2(1-\nu)\kappa_{s\theta}^2\right]\right\}, \tag{B3}$$

$$p_3(q)=\frac{K}{2}\left\{(1+\nu)\left[(\varepsilon_s+\nu\varepsilon_\theta)(\beta_s^2+\beta^2)+(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_s)(\beta_\theta^2+\beta^2)\right]+2(1-\nu)\varepsilon_{s\theta}\beta_s\beta_\theta\right\}, \tag{B4}$$

$$p_4(q)=\frac{K}{8}\left[\beta_s^4+\beta_\theta^4+2(1+\nu)\beta^4+2(1+\nu)\left(\beta_s^2+\beta_\theta^2\right)\beta^2+2\beta_s^2\beta_\theta^2\right]. \tag{B5}$$

附录 C 应变的矩阵表达式

分离周向和经向变量，位移和应变分量表示为：

$$\begin{gathered}(u,v,w)=\left[U^{(n)}(s),-\mathrm{i}V^{(n)}(s),W^{(n)}(s)\right]e^{\mathrm{i}n\theta},\quad(\varepsilon_s,\varepsilon_\theta,\varepsilon_{s\theta})=\left[E_s^{(n)}(s),E_\theta^{(n)}(s),-\mathrm{i}E_{s\theta}^{(n)}(s)\right]e^{\mathrm{i}n\theta},\\(\kappa_s,\kappa_\theta,\kappa_{s\theta})=\left[\kappa_s^{(n)}(s),\kappa_\theta^{(n)}(s),-\mathrm{i}\kappa_{s\theta}^{(n)}(s)\right]e^{\mathrm{i}n\theta},\quad(\beta_s,\beta_\theta,\beta)=\left[B_s^{(n)}(s),-\mathrm{i}B_\theta^{(n)}(s),-\mathrm{i}B^{(n)}(s)\right]e^{\mathrm{i}n\theta}.\end{gathered} \tag{C1}$$

将其中的经向分量表示为矩阵形式：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{U}^{(n)}=\left[U^{(n)}\ V^{(n)}\ W^{(n)}\right]^{\mathrm{t}},\quad\boldsymbol{E}^{(n)}=\left[E_s^{(n)}\ E_\theta^{(n)}\ E_{s\theta}^{(n)}\right]^{\mathrm{t}}=\widetilde{\boldsymbol{E}}^{(n)}\boldsymbol{U}^{(n)},\\\boldsymbol{\kappa}^{(n)}=\left[\kappa_s^{(n)}\ \kappa_\theta^{(n)}\ \kappa_{s\theta}^{(n)}\right]^{\mathrm{t}}=\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}^{(n)}\boldsymbol{U}^{(n)},\quad\boldsymbol{B}^{(n)}=\left[B_s^{(n)}\ B_\theta^{(n)}\ B^{(n)}\right]^{\mathrm{t}}=\widetilde{B}^{(n)}\boldsymbol{U}^{(n)},\end{gathered} \tag{C2}$$

其系数矩阵为：

$$\begin{gathered}\widetilde{\boldsymbol{E}}^{(n)}=\begin{bmatrix}\mathrm{d}/\mathrm{d}s & 0 & R_1^{-1}\\ \sin\alpha/r & |n|/r & \cos\alpha/r\\ -|n|/(2r) & (\mathrm{d}/\mathrm{d}s-\sin\alpha/r)/2 & 0\end{bmatrix},\\\widetilde{\boldsymbol{B}}^{(n)}=\begin{bmatrix}R_1^{-1} & 0 & -\mathrm{d}/\mathrm{d}s\\ 0 & \cos\alpha/r & |n|/r\\ |n|/(2r) & (\mathrm{d}/\mathrm{d}s+\sin\alpha/r)/2 & 0\end{bmatrix},\\\widetilde{\boldsymbol{\kappa}}^{(n)}=\begin{bmatrix}\mathrm{d}/\mathrm{d}s & 0 & 0\\ \sin\alpha/r & |n|/r & 0\\ -|n|/(2r) & (\mathrm{d}/\mathrm{d}s-\sin\alpha/r)/2 & (\cos\alpha/r-R_1^{-1})/2\end{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{B}}^{(n)}.\end{gathered} \tag{C3}$$