第 37 卷第 4 期 声 学 学 报 Vol. 37, No. 4
2012 年 7 月 ACTA ACUSTICA Jul., 2012

开孔对封闭空间共振特性的影响*

张晓排[1,2] 邱小军[1] 潘 杰[3]
(1 南京大学声学研究所 近代声学教育部重点实验室 南京 210093)
(2 大连交通大学交通运输工程学院 大连 116028)
(3 西澳大学机械工程系 澳大利亚佩斯 6009)

2011 年 5 月 4 日收到
2011 年 9 月 19 日定稿

摘要 研究了开孔对封闭空间声场的影响。通过将孔内振动空气等效为点源，用模态展开法建立了开孔封闭空间的声场模型，计算了开孔封闭空间高阶共振频率和在共振频率激励下的声压分布。结果显示：开孔等效于孔处声质量减小，一般使得开孔封闭空间的共振频率增加；但当孔位于某模态节点时，由于该阶模态与任一模态在开孔处未发生耦合，该模态共振频率不变；由于在开孔区域对应于激励频率的模态声压和其余各阶模态声压之和的相位相反，高阶共振频率激励下靠近小孔位置的声压减小。因此，开孔对封闭空间声场有影响，其影响程度与开孔位置和开孔尺寸有关。

PACS 数：43.20

Effect of an aperture on enclosure resonance characteristics

ZHANG Xiaopai[1,2] QIU Xiaojun[1] PAN Jie[3]
(1 *Key Laboratory of Modern Acoustics (MoE), Institute of Acoustics, Nanjing University* Nanjing 210093)
(2 *School of Traffic and Transportation Engineering, Dalian Jiaotong University* Dalian 116028)
(3 *School of Mechanical Engineering, the University of Western Australia* Perth 6009, Australia)

Received May 4, 2011
Revised Sept. 19, 2011

Abstract The effects of apertures on the sound field of an enclosure are investigated in this paper. First, the acoustic model of the enclosure with apertures is developed based on the modal expansion approach by considering the vibrating air in the aperture as an equivalent point source, and then the proposed model is used to calculate the higher-order resonance frequencies of the enclosure and the sound pressure distribution at resonance frequencies. The results demonstrate that having an aperture is equivalent to reduction of the acoustical mass at the location of the aperture and generally makes the resonance frequencies of the enclosure increase. If the aperture is located at a modal node, the mode is not coupled with other modes over the aperture, so its resonance frequency remains unchanged. Reduction of sound pressure in the region near the aperture is also observed, which is due to the opposite phases between the modal sound pressures corresponding to the resonance frequency and the sum of the other modal sound pressures. In conclusion, the sound field in an enclosure is affected by the presence of the aperture and the variation degree of the sound field characteristics depends on the location and the size of the aperture.

引言

在工程中，由于通风、管道或设备安装的要求，封闭空间内经常会有开孔。开孔会对封闭空间内声场特性产生影响，了解这些特性，有助于对封闭空间内的声场进行预测、评价和控制。如在封闭空间内吸声降噪，需要知道开孔导致的声场共振频率和模态形状

* 国家自然科学基金 (11004100) 、近代声学教育部重点实验室 (南京大学)(1004) 和中央高校基本科研业务费专项基金 (1101020402) 资助项目。

的变化[1]; 又如在封闭空间进行的有源噪声控制中，有必要研究开孔封闭空间内控制源激励下的声场响应[2]。

迄今和空间开孔影响相关的声学研究主要集中在三方面：一是两个半自由空间通过小孔相连，即声波通过无限大障板上的小孔透射入障板的另一侧，该类问题主要研究开孔对空气声传递特性的影响[3−7]; 二是两个或多个闭空间由开孔相连而使各空间产生的耦合作用[8−14]; 三是闭空间和半自由空间或自由空间通过小孔相连而产生的耦合，亦包括微穿孔板吸声结构声吸收性能研究[15−16]。本文针对第三种情况进行研究。

闭空间通过开孔与自由空间耦合的一个简化物理模型是亥姆赫兹共振器，其几何尺寸远小于声波波长，为集中参数系统[17]。Bladel 研究了波导管通过开孔和半自由空间的耦合，给出了作为波导管负载的开孔和半自由空间的等效电路[18]。Pan 等建立了壁面开孔三维矩形闭空间声场模型，把孔内振动空气看作空气活塞，通过活塞阻抗建立孔边界条件，分析了开孔引起封闭空间 (0, 0, 0) 阶共振频率偏移的原因[2]。注意，本文采用该参考文献的说法，将腔体内媒质整体振动称之为 (0, 0, 0) 阶模态。 Lam 等为了识别闭空间声泄露位置及数量，以 Pan 等模型为基础建立矩形闭空间声场模型[19]。与 Pan 等模型不同的是，小孔内空气被看作分布式参数系统，设孔截面法向振动速度呈双正弦函数分布，但该假设缺少进一步的理论分析。

在上述文献中，仅对集中参数系统亥姆赫兹共振器的共振特性进行了分析。虽然建立了三维矩形闭空间开孔的声场模型，但也仅分析了开孔后封闭空间 (0, 0, 0) 阶模态共振频率的变化及其产生变化的原因，而开孔对封闭空间高阶模态的影响还没有涉及。在实际应用中，需要建立壁面开孔封闭空间声场模型、并预测高阶模态共振频率的偏移量以及声场的声压分布。基于 Pan 等的工作，本文进一步研究开孔对封闭空间高阶模态共振频率及空间声压分布的影响。首先建立矩形箱体壁面开孔封闭空间受迫振动声场模型，通过数值计算和实验探讨孔对封闭空间高阶模态共振频率及声压分布的影响，分析开孔与未开孔封闭空间共振频率、共振频率激励下声压分布的变化及物理机制。

1 理论

图 1 为小阻尼壁面矩形箱体，在 $x = l_x$ 面有一半径为 a 的圆孔，孔深 (即壁厚)h。源强为 $q_0(\boldsymbol{r}_0, \omega)$, 角频率为 ω 的激励点声源位于 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处。

箱体内声场通过小孔和外部空间声场耦合，在内外声场作用下产生振动的孔内空气可作为等效声源处理。本文研究针对低频，$a, h \ll \lambda$, 即孔的线度远小于波长，此时孔内各部分空气的振动情况可认为近似相同，故把孔内振动空气看作等效点源。该点源位于孔圆心处，单位体积源强 $q_1 = Q_1\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$, 其中源强 $Q_1 = vs_1$, v 是孔内空气振动速度，沿 x 轴正向为正，s_1 是孔横截面积。按照波动方程[20], 开孔封闭空间内声波振动方程可表示为：

$$\nabla^2 p + k^2 p = -(\mathrm{j}\rho_0\omega q_1 + \mathrm{j}\rho_0\omega q_0), \tag{1}$$

式中，p 是开孔封闭空间内任一点的声压，k 是波数，ρ_0 是空气密度。

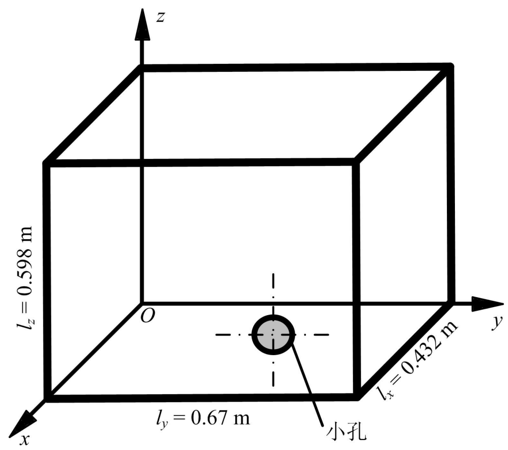


图 1 壁面开孔箱体模型

孔内空气在空间内、外声压作用下，以速度 v 作整体振动。设管壁为光滑管壁，忽略摩擦阻力，其运动方程为：

$$\mathrm{j}\omega v \cdot m = -\int_{s_1} (p - p_r)\mathrm{d}s_1, \tag{2}$$

m 是孔内空气的质量 $m = \rho_1 h s_1$, ρ_1 是孔内空气的密度，p_r 是孔外表面声压，由孔内振动空气向外界辐射声波产生。

活塞振动向外界辐射的声压 p_r 相对于声压 p 来说非常小，因此可忽略 (本文实验中 10~500 Hz 频段，孔处箱体内、外声压级差约 30 dB)。并且由于孔半径 a 远小于声波 λ, 因此在小孔横截面上各点声压近似相等，声压在孔横截面上的积分可近似表示为 $-\int_{s_1}(p - p_r)\mathrm{d}s_1 \approx -p_1 s_1$, p_1 是内壁面孔圆心处声压。式 (2) 可表示为：

$$\mathrm{j}\omega v \cdot m = -p_1 s_1. \tag{3}$$

房间内声场可用矩形闭空间刚性壁面特征函数 $\varPhi_n(\boldsymbol{r})$ 的线性组合近似表示[17],

$$\varPhi_n(\boldsymbol{r}) = \cos(n_x\pi x/l_x)\cos(n_y\pi y/l_y)\cos(n_z\pi z/l_z),$$

(n_x, n_y, n_z) 是第 n 阶声模态的模态序数。 $\Phi_n(\boldsymbol{r})$ 满足：在体积 V 内 $[\nabla^2 + k_n^2]\Phi_n(\boldsymbol{r}) = 0$, 在壁面 S 上 $\Phi_n(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{n}$ 为壁面单位法向量。故开孔封闭空间内声压 $p(\boldsymbol{r}, \omega)$ 可展开为：

$$p = \sum_n P_n \Phi_n(\boldsymbol{r}), \tag{4}$$

式中 P_n 是空间第 n 阶模态幅值，第 n 阶模态幅值的幅度为 $|P_n|$, $P_n\Phi_n(\boldsymbol{r})$ 为 $\boldsymbol{r}$ 处的第 n 阶模态声压。

把式 (3) 和式 (4) 代入式 (1), 方程左右两边同乘以 $\Phi_s(\boldsymbol{r})$, 并在矩形空间体积 V 上积分，经化简得到式 (5),

$$(\omega^2 - \omega_n^2)\Lambda_n P_n - \frac{\rho_0 c_0^2}{M_A} \sum_l P_l A_{nl} = -\mathrm{j}\rho_0 c_0^2 \omega Q_0 \Phi_n(\boldsymbol{r}_0), \tag{5}$$

式中 $M_A = \rho_1 h / s_1$ 是孔内媒质的声质量。 $A_{nl} = \Phi_n(\boldsymbol{r}_1)\Phi_l(\boldsymbol{r}_1)$ 是第 n、l 阶模态在孔圆心处的模态耦合系数。小孔位于不同位置时 A_{nl} 值不同。 $\omega_n = c_0\sqrt{(n_x\pi/l_x)^2 + (n_y\pi/l_y)^2 + (n_z\pi/l_z)^2}$ 为刚性壁面闭空间第 n 阶简正频率。第 n 阶模态体积，

$$\Lambda_n = \int_V \Phi_n^2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = V/D_n, \tag{6}$$

式中 $D_n = D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}$, i= 0, $D_i = 1$; $i \neq 0$, $D_i = 2$, $i = n_x, n_y, n_z$ 。

考虑小阻尼壁面影响时[21−22], 式 (5) 可写为：

$$\begin{aligned}&(\omega^2 - \mathrm{j}2\zeta_n\omega_n\omega - \omega_n^2)\Lambda_n P_n - \\ &\frac{\rho_0 c_0^2}{M_A}\sum_l P_l A_{nl} = -\mathrm{j}\rho_0 c_0^2 \omega Q_0 \Phi_n(\boldsymbol{r}_0),\end{aligned} \tag{7}$$

其中 ζ_n 是壁面第 n 阶模态阻尼系数，本文中假设均等于 ζ 。为便于数值计算，将式 (4) 和式 (7) 用矩阵形式表达，则箱体内声压表示为：

$$p = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}, \tag{8}$$

式中 $\boldsymbol{P} = [P_1, \cdots, P_N]^{\mathrm{T}}$ 是模态幅值向量，$\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1(\boldsymbol{r}), \cdots, \Phi_N(\boldsymbol{r})]^{\mathrm{T}}$ 是特征函数值向量。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} (\omega^2 - \mathrm{j}2\zeta_1\omega_1\omega - \omega_1^2)\Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\omega^2 - \mathrm{j}2\zeta_N\omega_N\omega - \omega_N^2)\Lambda_N \end{pmatrix}, \tag{9}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{q}$ 可分别表示为式 (10) 和式 (11), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 n 行、第 l 列元素 $a_{nl} = \rho_0 c_0^2 A_{nl}/M_A$ 。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{q} = -\mathrm{j}\rho_0\omega c_0^2 Q_0 [\ \Phi_1(\boldsymbol{r}_0) \ \ \cdots \ \ \Phi_N(\boldsymbol{r}_0)\ ]^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代表孔对空间声压的影响，其元素 a_{nl} 与空气密度、空气中的声速、孔位置模态耦合系数及孔内媒质的声质量有关. 开孔会使孔处声质量发生变化，未开孔，声质量 M_A 无穷大， $a_{nl} = 0$; 开孔，声质量 M_A 为有限值， $a_{nl} \neq 0$ 。因此，空间声压及共振频率发生变化。当无开孔时，去除式 (8) 中孔的影响，则闭空间内声压可表示为：

$$p_E = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{q}. \tag{12}$$

Pan 等基于计权留数修正法建立了完整的开孔阻抗边界条件[2] 。而本文提出的简化模型的不同在于仅考虑孔内空气质量抗的影响，忽略其外部辐射声波。该模型用于研究开孔对箱体声场的影响较简单和直观。

为更清楚地表达空间声压与各参数之间的关系，给出开孔和未开孔声压幅值 p 和 p_E 的表达式,

$$|p(\boldsymbol{r}, \omega)| = \left| -\mathrm{j}\rho_0\omega c_0^2 Q_0 \sum_n \sum_l \Phi_n(\boldsymbol{r})\Phi_l(\boldsymbol{r}_0) \frac{M_{nl}}{\det(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})} \right|, \tag{13}$$

$$|p_E(\boldsymbol{r}, \omega)| = \left| -\mathrm{j}\rho_0\omega c_0^2 Q_0 \sum_n \frac{\Phi_n(\boldsymbol{r})\Phi_n(\boldsymbol{r}_0)}{\Lambda_n(\omega^2 - \mathrm{j}2\zeta_n\omega_n\omega - \omega_n^2)} \right|, \tag{14}$$

式中：$\det(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ 的行列式值，M_{nl} 是矩阵 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$ 第 n 行、第 l 列元素的代数余子式。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{nn} 对开孔封闭空间第 n 阶共振频率变化的影响最大 (将在仿真部分说明) 。由于壁面阻尼非常小，对于第 n 个共振峰声压 p_p, 第 n 阶模态的贡献最重要。因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中仅保留元素 a_{nn}, 令其余元素为 0, 且忽略非第 n 阶模态声压，则共振峰声压 $p_p(\boldsymbol{r},\omega)$ 可用第 n 阶模态声压近似表示。为得到共振频率，对式 (13) 作上述近似并求频率的偏导数，令其等于 0, 得：

$$\frac{\partial\left|p_p(\boldsymbol{r},\omega)\right|}{\partial\omega}\approx\rho_0c_0^2Q_0\left|\Phi_n(\boldsymbol{r})\Phi_n(\boldsymbol{r}_0)\right|\partial\left|\frac{\omega}{(\omega^2-\mathrm{j}2\zeta_n\omega_n\omega-\omega_n^2)\Lambda_n-\omega_H^2VA_{nn}}\right|\Big/\partial\omega=0, \tag{15}$$

式中 $\omega_H^2=1/(C_AM_A)$ 为亥姆赫兹共振频率，声容 $C_A=V/(\rho_0c_0^2)$ 。

求解方程 (15), 第 n 个共振峰对应的共振频率 ω_{pn},

$$\omega_{pn}=\sqrt{\omega_n^2+D_nA_{nn}\omega_H^2}=\sqrt{\omega_n^2+D_n\Phi_n^2(\boldsymbol{r}_1)\frac{\rho_0c_0^2}{V}\frac{s_1}{\rho_1l}}. \tag{16}$$

类似地，在小阻尼壁面无孔闭空间声场，对第 n 个共振峰声压 p_{Epn}, 第 n 阶模态的贡献最重要，其它模态的影响可忽略，小阻尼壁面闭空间的共振频率为：

$$\omega_{Epn}=\omega_n. \tag{17}$$

对比式 (16) 和式 (17) 可见：对体积固定的空间，孔的位置和孔内媒质声质量决定开孔封闭空间共振频率的偏移。当孔位于模态节点时，$A_{nn}=0$, 共振频率不发生偏移；孔在其它位置时，$D_nA_{nn}\omega_H^2>0$, 共振频率增加。孔内媒质声质量与孔径、孔深和孔内媒质密度有关，因此孔径增加，共振频率偏移量增加；孔径减小，共振频率偏移量减小。孔深度增加，共振频率偏移量减小；孔深度减小，共振频率偏移量增加。孔内媒质密度增加，共振频率偏移量减小；孔内媒质密度减小，共振频率偏移量增加。亦可看出，开孔与未开孔封闭空间共振频率数目相同，且一一对应，因此本文中均以 “(n_x,n_y,n_z) 阶共振频率” 来描述开孔和未开孔封闭空间第 n 个共振峰对应的共振频率。

实际中壁面常有多个开孔。若壁面开 M 个孔，孔径大小均为 a, 其它条件同前。相当于 M 个点源和空间相互作用，波动方程为：

$$\nabla^2p+k^2p=-\left(\mathrm{j}\rho_0\omega\sum_m q_m+\mathrm{j}\rho_0\omega q_0\right), \tag{18}$$

式中 q_m 是第 m 个孔内媒质振动产生的单位体积源强。按照前述方法，方程 (18) 可表示为：

$$(\omega^2-\mathrm{j}2\zeta_n\omega_n\omega-\omega_n^2)\Lambda_nP_n-\sum_m\frac{\rho_0c_0^2}{M_A}\sum_l P_lA_{nl\_m}=-\mathrm{j}\rho_0c_0^2\omega Q_0\Phi_n(\boldsymbol{r}_0). \tag{19}$$

式中 $A_{nl\_m}=\Phi_n(\boldsymbol{r}_m)\Phi_l(\boldsymbol{r}_m)$ 是第 m 孔处 n 、l 阶空间模态耦合系数。则开 M 个孔时空间内声压 p_M 可表示为式 (20) 。矩阵 $\boldsymbol{A}_M$ 见式 (21), 其第 n 行，第 l 列元素 $a_{nl\_M}=\rho_0c_0^2/M_A\sum_m A_{nl\_m}$ 。

$$p_M=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}_M)^{-1}\boldsymbol{q}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{A}_M=\begin{pmatrix}a_{11\_M}&\cdots&a_{1N\_M}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{N1\_M}&\cdots&a_{NN\_M}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

类似地，第 n 个共振峰对应的共振频率近似为：

$$\omega_{rM}=\sqrt{\omega_n^2+D_n\omega_H^2\sum_m A_{nn\_m}}. \tag{22}$$

把式 (22) 与式 (16) 对比，多孔耦合系数之和 $\sum_m A_{nn\_m}\geqslant$ 单个孔耦合系数 A_{nn_m}, 故开多个孔时闭空间共振频率不小于开一个孔时的情况。

2 数值仿真

计算中参数选择如下：点源位于 (0.036, 0.072, 0.036) m, 源强是 0.001 $\mathrm{m^3/s}$, 接收点 (0, 0.67, 0)m; 温度 $t=17°\mathrm{C}$, 空气中的声速 $c_0=336.1+0.6t$ m/s, 空气密度 $\rho_0=1.21$ $\mathrm{kg/m^3}$; 小孔半径 $a=0.0194$ m, 深度 $h=0.135$ m; 模态阻尼系数 $\zeta_n=0.005$; 孔 1 圆心位置 (0.432, 0.0194, 0.0194) m, 孔 2 圆心位置 (0.432, 0.6506, 0.0194) m, 孔 3 圆心位置 (0.432, 0.335, 0.0194) m 。仿真中选取前 200 阶模态 (第 200 阶对应的模态频率为 1998 Hz) 。非共振频段 410 ~ 430 Hz 除外，在 0.1 ~ 500 Hz 频率范围，接收点声压级计算误差在 0.2 dB(与真值 $N=10000$ 比较) 。本研究主要针对共振频率及共振频率激励下的声压分布进

行研究，故非共振频段的精度下降对本文的结论影响不大。

对刚性壁面闭空间，当激励频率 $\omega = \omega_n$ 时，第 n 阶模态声压无穷大，因此共振峰声压 p 仅由第 n 阶模态声压决定， ω_n 即为共振频率，与声源位置和接收点位置无关 (模态节点位置除外) 。而对于小阻尼壁面闭空间和小阻尼壁面开孔封闭空间，由于阻尼的存在，第 n 阶模态幅值为有限值 ((0,0,0) 阶除外)，不能完全决定共振峰声压的大小，声场声压是各模态声压共同叠加作用的结果。由式 (13) 和式 (14) 可知，模态声压受声源和接收点位置影响，因此共振频率的数值与声源和接收点位置有关。仿真中，仅以 $(0, l_y, 0)$ 点为代表说明开孔引起共振频率变化的物理机制。

表 1 中给出孔 1 开和未开孔共振频率理论值对比。孔 1 开 (理论) 计算中包括矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素，孔 1 开 (仅考虑 a_{nn}) 计算中仅保留矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素 a_{nn}($\boldsymbol{A}$ 中其它项为 0, $P_m = 0$, $m \neq n$) 。两种情况下，开孔后共振频率均增加，仅考虑 a_{nn} 时共振频率最大误差为 5% 。由此可知， a_{nn} 决定了开孔后第 n 阶共振频率的偏移。这就验证了前文推导式 (16) 的假设。

2.1 孔对封闭空间共振频率的影响

孔 1 开和未开孔封闭空间的频响曲线如图 2 所示。图中，孔 1 开时 (0, 0, 0) 阶共振频率发生明显偏移，偏移量较大；放大图显示 (0, 1, 0) 阶共振频率发生偏移，在未放大频响图上无明显偏移，偏移量较小。见表 1，孔 1 开时 (0, 0, 0) 阶共振频率从 0 Hz 增加到 11.6 Hz; (0, 1, 0) 阶共振频率从 255.1 Hz 增加到 255.6 Hz 。未开孔，孔 1 对应位置声质量可视为无穷大，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中各元素为 0, 对声压无影响；孔 1 开，孔内媒质声质量为 138 $\mathrm{kg/m^4}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 元素 $|a_{nl}| \leqslant 1023\ \mathrm{m^3/s^2} \neq 0$, 对声压有影响。因此孔 1 开，等效于声质量减小，使得空间共振频率增加。

图 3(a) 和图 3(b) 为 (0, 1, 0) 阶共振频率随孔径、壁厚的变化，图 3(a), 孔径中心位于 (0.432, 0.14, 0.14) m, 图 3(b), 孔径中心位于 (0.432, 0.0194, 0.0194) m 。从图 3(a) 可看出，随孔径增加共振频率增加，孔径由 0 m 增至 0.14 m, 共振频率从 255.1 Hz 增至 262.2 Hz 。图 3(b) 显示，随壁厚增加共振频率减小，壁厚从 0.01 m 增至 0.14 m, 共振频率从 258.6 Hz

表 1 空间共振频率理论值与实测值 (Hz)

阶次	模态序数			未开孔		孔 1 开		孔 1 、孔 2 全开		孔 3 开	孔 1 开
	n_x	n_y	n_z	理论	实验	理论	实验	理论	实验	理论	仅考虑 a_{nn}
1	0	0	0	0		11.6	12.1	16.5	16.1	11.9	12.2
2	0	1	0	255.1	255.8	255.6	256.3	256.2	256.8	255.1	255.7
3	0	0	1	285.7	285.8	286.2	286.3	286.7	287.3	286.2	286.3
4	0	1	1	383.2	382.9	383.9	383.4	384.6	383.9	383.2	383.8
5	1	0	0	395.0	396.9	395.3	396.9	395.5	397.4	395.3	396.0
6	1	1	0	471.1	471.4	471.6	472.4	472.3	472.9	471.1	471.3
7	1	0	1	487.6	486.5	488.2	488.0	488.8	488.0	488.2	488.6

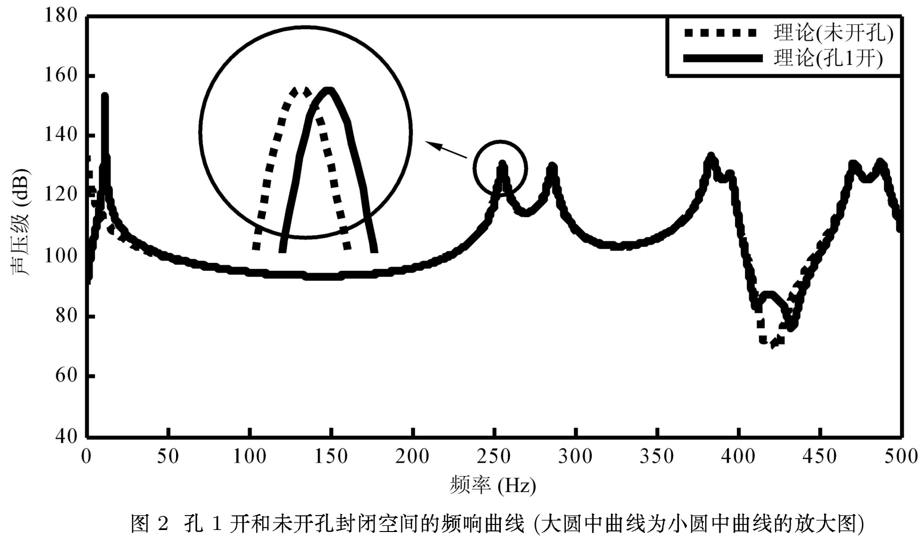
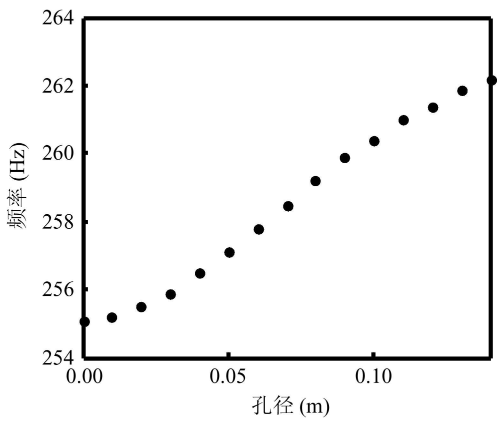
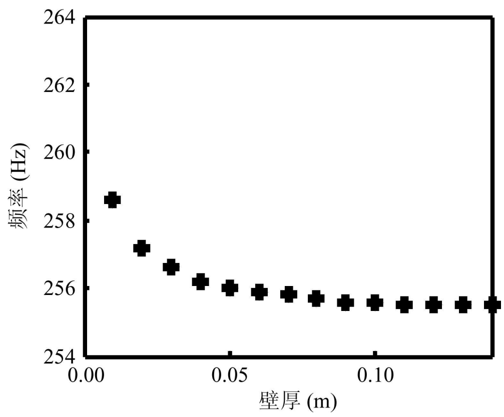


图 2 孔 1 开和未开孔封闭空间的频响曲线 (大圆中曲线为小圆中曲线的放大图)



(a) 共振频率随孔径的变化



(b) 共振频率随壁厚的变化

图 3 (0, 1, 0) 阶共振频率随孔尺寸的变化

减小为 255.5 Hz 。与共振频率近似公式 (16) 的结果一致。随孔径减小和壁厚增加，孔内媒质声质量增加，共振频率逐渐接近闭空间共振频率 255.1 Hz 。一般地，壁面材料密度高于空气密度，壁面开孔相当于开孔处媒质密度减小，等效于使开孔处媒质声质量减小，开孔后空间共振频率增加。

开孔前、后共振频率理论计算值见表 1, 表中同时列出的实验数据将在实验部分分析。首先分析 (0, 0, 0) 阶模态。孔 1 开时，空间的 (0, 0, 0) 阶模态开孔后从原来的 0 Hz 变为 11.6 Hz 。分析原因，当小孔半径 a 、深度 h 及闭空间三维尺寸 $l_x, l_y, l_z \ll \lambda$ 时，小孔和空间构成一个亥姆赫兹共振器。因此 (0, 0, 0) 阶模态的共振频率从 0 变到了由空间声顺 - 孔内空气声质量构成的亥姆赫兹共振器的共振频率 [2] 。开多个孔时，孔总的声质量为各孔声质量并联之和 [20]，因此开两孔共振频率为开单孔共振频率的 $\sqrt{2}$ 倍。由式 (22) 可得同样结果。仿真计算中开两孔与开单孔共振频率之比 $16.5/11.6 = 1.42 \approx \sqrt{2}$, 仿真计算中包括了高阶模态的影响，式 (22) 仅考虑 (0, 0, 0) 阶模态，因此两者得到的比值略有不同。

对于高阶模态，如 (0, 1, 0) 模态，孔 1 开与未开孔比较，共振频率从 255.1 Hz 变为 255.6 Hz 。式 (16) 中 $D_2A_{22}\omega_H^2 > 0$, 故共振频率增加。当孔 1 、孔 2 全开与孔 1 开理论值比较，如 (0, 1, 0) 模态，共振频率从原来的 255.6 Hz 变为 256.2 Hz 。从共振频率的近似公式 (16) 和 (22) 可知，孔 1 、孔 2 全开与孔 1 开相比，耦合系数项 $D_2\omega_H^2(A_{22\_1} + A_{22\_2}) > D_2A_{22\_1}\omega_H^2 > 0$, 共振频率进一步增加。

对比表 1 中孔 1 开、孔 3 开及未开孔三种情况下空间共振频率，可看出，孔位于不同位置，共振频率偏移量不同。孔在位置 1, 开孔后共振频率均增加。孔在位置 3, (0, 1, 0) 、(0, 1, 1) 、(1, 1, 0) 阶共振频率不变，其它阶共振频率增加。由共振频率近似公式 (16) 可看出，孔在不同位置时 A_{nn} 不同，共振频率偏移量不同。孔 3 位置，对 (0, 0, 1) 模态， $A_{22} = 0.99 > 0$, 共振频率增加；对 (0, 1, 0) 模态，处于节点位置，其模态耦合系数 $A_{11} = 0$, 共振频率不变。

2.2 孔对封闭空间内共振频率激励下声压分布的影响

孔 1 圆心位置理论计算声压级见表 2 。可看出，高阶共振峰开孔声压小于未开孔时的声压，如 (0, 1, 0) 阶共振峰，未开孔声压级 130.6 dB, 开孔声压级 129.5 dB 。下面以该阶模态为例分析原因。以 $x = 0.432$ m 平面的声压分布为例，给出 (0, 1, 0) 阶共振频率 (孔 1 圆心处) 激励下，未开孔封闭空间和孔 1 开封闭空间的声压分布。见图 4 。

图 4(a) 为闭空间内平面的声压分布，近似 (0, 1, 0) 阶模态形状函数分布。原因为在 (0, 1, 0) 阶共振频率激励下， (0, 1, 0) 阶模态幅值远大于其它阶模态幅值，因此其声压分布主要由 (0, 1, 0) 阶模态形状函数 $\Phi_2(\boldsymbol{r})$ 决定。图 4(b) 为开孔封闭空间内声压分布。声压由 y 轴两端向中间逐渐减小，沿 z 轴方向，小孔附近声压小于处于同一 y 值但远离小孔处

表 2 孔 1 圆心位置理论和实测声压级 (dB)

阶次	模态序数			理论		实验	
	n_x	n_y	n_z	未开孔	孔 1 开	未开孔	孔 1 开
1	0	0	0				79.2
2	0	1	0	130.6	129.5	135.1	134.5
3	0	0	1	130.0	129.4	134.2	133.8
4	0	1	1	132.9	132.2	131.9	131.2
5	1	0	0	128.1	127.1	128.4	127.7
6	1	1	0	131.4	129.9	129.5	129.0
7	1	0	1	131.2	130.6	129.8	129.5

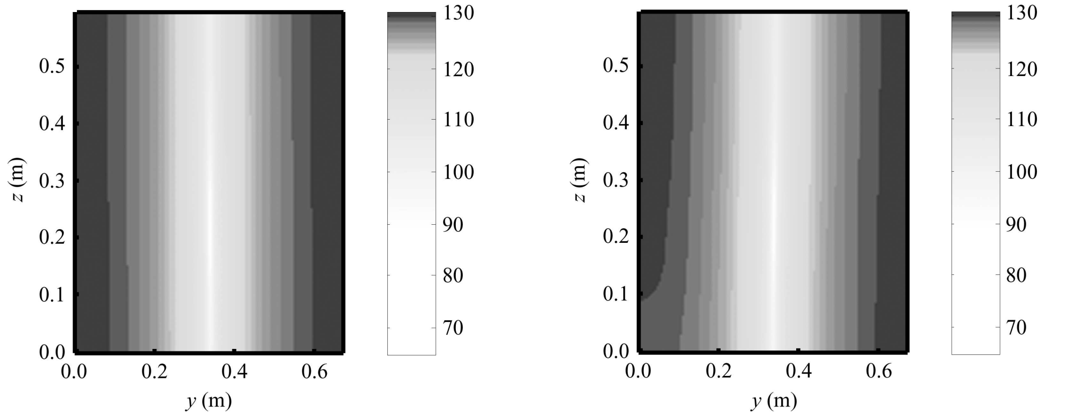
的声压，如 (l_x, a, a)(孔圆心) 声压级为 129.5 dB, 远离孔处 (l_x, a, l_z) 声压级为 130.7 dB 。

图 5 为点 (l_x, a, a) 处各阶模态声压 $P_n\Phi_n(\boldsymbol{r}_1)$ 。可知各阶模态声压的虚部远小于 (0, 1, 0) 阶 (第 2 阶) 模态声压的实部 94.7 Pa, 各阶模态声压的虚部对总声压的贡献远小于实部, 可忽略。在其它位置亦有类似的现象。因此令模态声压的虚部为 0, 对比 (l_x, a, a) 和 (l_x, a, l_z) 点模态声压的幅度 $|P_n\Phi_n(\boldsymbol{r}_1)|$ 和相位。见图 6 和图 7 。

图 6 为 (l_x, a, a) 点各模态的声压及相位。图 6(a) 为模态幅值 P_n 的幅度， (0, 1, 0) 阶模态幅值的幅度远大于其它阶。图 6(b) 为模态幅值的相位，为 0° 或 180°, 0° 表示其值为正， 180° 表示其值为负。图 6(c) 为 (l_x, a, a) 点模态形状函数值, 或正或负。图 6(d) 为各模态在 (l_x, a, a) 点的模态声压 $P_n\Phi_n(\boldsymbol{r}_1)$ 的幅度, (0, 1, 0) 阶模态声压的幅度远大于其它阶。图 6(e) 为各阶模态在 (l_x, a, a) 点的模态声压的相位，前 2 阶相位为 0°, 第 2 阶以上相位为 180°, 因此前 2 阶模态声压均为正值，第 2 阶以上模态声压均为负值。该点声压主要由 (0, 1, 0) 阶模态声压 94.7 Pa 决定，其它阶模态声压远小于该值, 但由于 (0, 1, 0) 阶以上模态声压均为负值, 而 (0, 1, 0) 阶以下模态声压虽为正值, 但仅有一项，故除 (0, 1, 0) 阶之外，各阶模态声压之和为负值 −10.3 Pa, 与 94.7 Pa 相比不可忽略。因此各模态声压之和为 84.4 Pa, 小于 (0, 1, 0) 阶模态声压 94.7 Pa 。

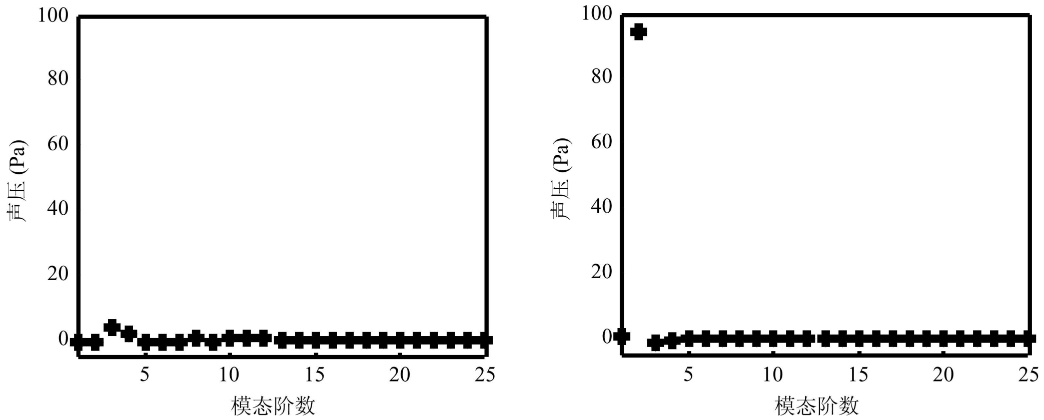
图 7 为 (l_x, a, l_z) 点各模态的声压及相位。图 7(a) 和图 7(b) 同图 6(a) 和图 6(b) 。图 7(c) 为 (l_x, a, l_z) 点模态形状函数值，或正或负。图 7(d) 为 (l_x, a, l_z) 点模态声压的幅度， (0, 1, 0) 阶模态声压幅度远大于其它阶。图 7(e) 为 (l_x, a, l_z) 点模态声压的相位，为 0° 或 180°, 因此各模态声压或正或负。该点声压主要由 (0, 1, 0) 阶模态声压 94.7 Pa 决定，其它各阶模态声压远小于该值，且正、负相互抵消，其和为 1.8 Pa, 远小于 94.7 Pa 。因此各阶模态声压之和为 96.5 Pa, 近似等于 (0, 1, 0) 阶模态声压。

在上述两位置处，模态幅值的幅度、相位均相同, 由于模态形状函数值的不同, 使得两点模态声压的相位不同。由于孔 1 开时，式 (8) 中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列元素对 (0, 1, 0) 阶共振峰声压的贡献最为重要,



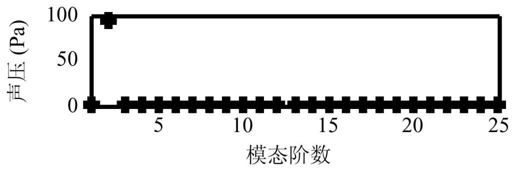
(a) 未开孔闭空间声压级分布，激励频率 255.0 Hz (b) 孔 1 开闭空间声压级分布，激励频率 255.6 Hz

图 4 $x = 0.432$ m 面声压级分布

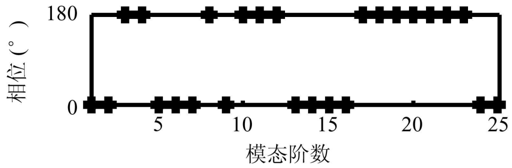


(a) (l_x, a, a) 点模态声压的虚部 (b) (l_x, a, a) 点模态声压的实部

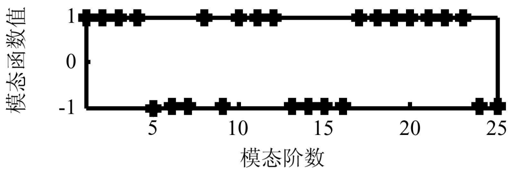
图 5 (l_x, a, a) 点模态声压



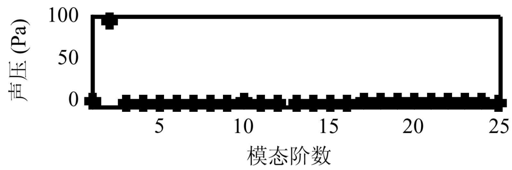
(a) 模态幅值的幅度



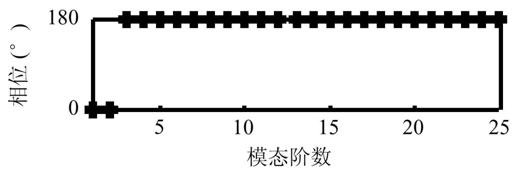
(b) 模态幅值的相位



(c) (l_x,a,a) 点模态形状函数值

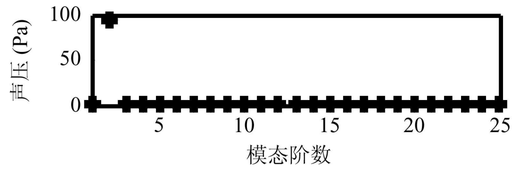


(d) (l_x,a,a) 点模态声压的幅度

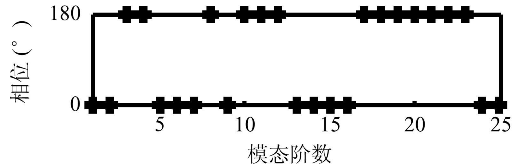


(e) (l_x,a,a) 点模态声压的相位

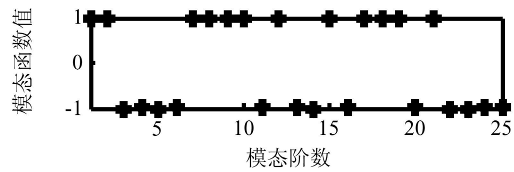
图 6 (l_x,a,a) 点声压及相位



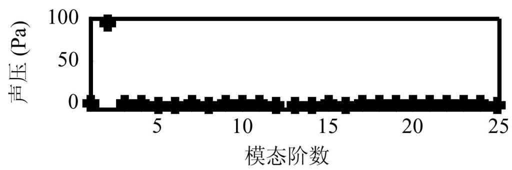
(a) 模态幅值的幅度



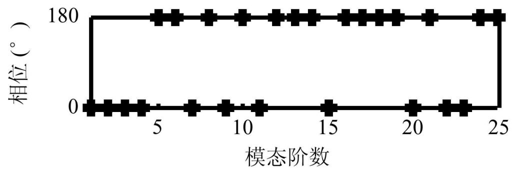
(b) 模态幅值的相位



(c) (l_x,a,l_z) 点模态形状函数值



(d) (l_x,a,l_z) 点模态声压的幅度



(e) (l_x,a,L_z) 点模态声压的相位

图 7 (l_x,a,l_z) 点声压及相位

如在开孔处 $\boldsymbol{r}_1(l_x,a,a)$ 点，考虑 $\boldsymbol{A}$ 的所有项和仅考虑 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列(且仅取 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 第 2 列) 两种情况下，共振峰声压理论值分别为 84.4 Pa 和 83.9 Pa 。为简单起见，仅保留矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 2 列，令其余元素为 0, 并仅取 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 第 2 列元素，由前述分析忽略虚部，对式 (13) 化简， $\boldsymbol{r}$ 点共振峰声压可近似表示为：

$$p_p(\boldsymbol{r},\omega_{r2}) \approx P_{p2}(\omega_{r2})\Phi_2(\boldsymbol{r})+ \sum_{n\neq 2} P_{p2}(\omega_{r2})\frac{a_{n2}}{b_{nn}b_{nn}^*}(\omega_{p2}-\omega_n)\Phi_n(\boldsymbol{r}), \tag{23}$$

式中 $P_{p2}(\omega_{p2})=\rho_0 c_0^2 Q_0 \Phi_2(\boldsymbol{r}_0)/(2\zeta_2\omega_2\Lambda_2)$ 为孔 1 开闭空间 (0, 1, 0) 阶模态幅值。

孔 1 圆心位置， $a_{n2}\Phi_n(\boldsymbol{r})=a_{nn}\Phi_2(\boldsymbol{r}_1)$, 在该点 (0, 1, 0) 阶模态声压为正值。其它阶模态声压，当孔 1 位于其模态节点位置时，$a_{nn}=0$, 该模态声压为 0 。当孔 1 位于非模态节点时， $a_{nn}>0$, (0, 1, 0) 阶以上模态，共振频率 ω_n 高于激励频率 ω_{p2}, 其模态声压为负值； (0, 1, 0) 阶以下模态，共振频率 ω_n 低于激励频率 ω_{p2}, 其模态声压为正值。由此可见，模态幅值与模态形状函数值相乘之后，得到了一个非负项 a_{nn}, 使得对于 (0, 1, 0) 阶以上模态声压与 (0, 1, 0) 阶模态声压相位相反， (0, 1, 0) 阶以下模态声压与 (0, 1, 0) 阶模态声压相位相同。且由图 6 分析可知，该点声压小于 (0, 1, 0) 阶模态声压。对于孔 1 附近的点， $\Phi_n(\boldsymbol{r})\approx\Phi_n(\boldsymbol{r}_1)$, 因此其声压近似等于 $\boldsymbol{r}_1$ 点声压，亦小于开孔封闭空间 (0, 1, 0) 阶模态声压。在远离 $\boldsymbol{r}_1$ 的位置， $a_{n2}\Phi_n(\boldsymbol{r})=\Phi_n(\boldsymbol{r}_1)\Phi_n(\boldsymbol{r})\Phi_2(\boldsymbol{r}_1)$, $\Phi_n(\boldsymbol{r}_1)\Phi_n(\boldsymbol{r})$ 或正或负，故其模态声压或正或负，如图 7 所示，各项相互抵消，其和远小于 (0, 1, 0) 阶模态声压，因此在该位置声压近似等于开孔封闭空间 (0, 1, 0) 阶模态声压。

3 实验

实验用水泥箱体见图 8, 壁厚 0.135 m, 顶板厚 0.07 m, 其它参数同仿真计算。测试用扬声器频响范围是 90 ~ 4000 Hz, 低于 90 Hz 其辐射声压较小，但激励频率接近空间共振频率时，箱体内会被激发起较高的声压级，因此 90 Hz 以下共振频率测试值也较准确。孔 1 附近箱体内、外声压与测点的选择有关，本实验中箱体内测点在孔 1 轴线上、距箱体内壁 0.05 m, 箱体外测点在孔 1 轴线上、距箱体外壁 0.05 m 。

图 8　开孔和封闭空间频响测试实验装置

图 9 显示，孔 1 开时，孔 1 处箱体内、外声压级差在 30 dB 左右。箱体内声压约为箱体外声压的 32 倍，孔向外部辐射声压远小于箱体内部声压。由表 2 可知，孔 1 开与未开孔比较，孔 1 位置高阶共振峰 (共振频率不同) 声压减小 0.3 ~ 0.7 dB 。

图 10 是孔 1 开实验和理论频响曲线, 第 2 ~ 7 个峰值吻合得较好。 (0, 0, 0) 阶共振峰声压，理论计算高于实验。原因是，仿真中计算频率范围内点声源源强为一常数，各共振频率均对应较高的峰值；实验中虽然各频率下扬声器驱动电压均相同，但扬声器频率响应在测试频率范围内并不平直，在低频，其灵敏度非常低，使实验中 (0, 0, 0) 阶共振峰声压级较低。

孔 1 开时共振频率理论值和实测值见表 1 。可看出，实验值和理论值略有不同，但从未开孔到开孔，各阶共振频率变化趋势一致，对应模态下，共振频率值增加。 (1, 0, 0) 模态孔 1 开与未开孔除外，其原因可能是实验中频率增量小于扫频步长。实验值和理论值略有不同可能与两方面因素有关，模态阻尼、矩形箱体的规则程度。理论计算中，各模态阻尼为一常数，实际上模态阻尼随频率发生变化 [22] 。实验测试用箱体由于制作误差，非绝对规则矩形箱体。

图 11 为全封、孔 1 开、全开 (孔 1 和孔 2 全开) 三种情况下的频响曲线，为使三条曲线明显区分开，全封和全开曲线在实测值基础上分别减小和增加了 10 dB 。可看出，无论孔开、闭，在 200 Hz 以上均有较明显的峰值，峰值对应的频率从低到高依次为第 2 ~ 7 阶共振频率。孔 1 开和全开分别在 12.1 Hz 和 16.1 Hz 新增一峰值，由第 2 节可知，该峰值对应频率为亥姆赫兹共振器的共振频率，即空间 (0, 0, 0) 阶共振频率。封闭空间与开孔封闭空间共振频率值见表 1 。可看出，开两个孔与开一个相比共振频率的偏移量增加。

总之，实验结果显示开孔后共振频率增加，开多个孔时共振频率进一步增加。验证了理论模型的正确性。说明开孔相当于孔处声质量减小，一般会使得开孔封闭空间共振频率增加。

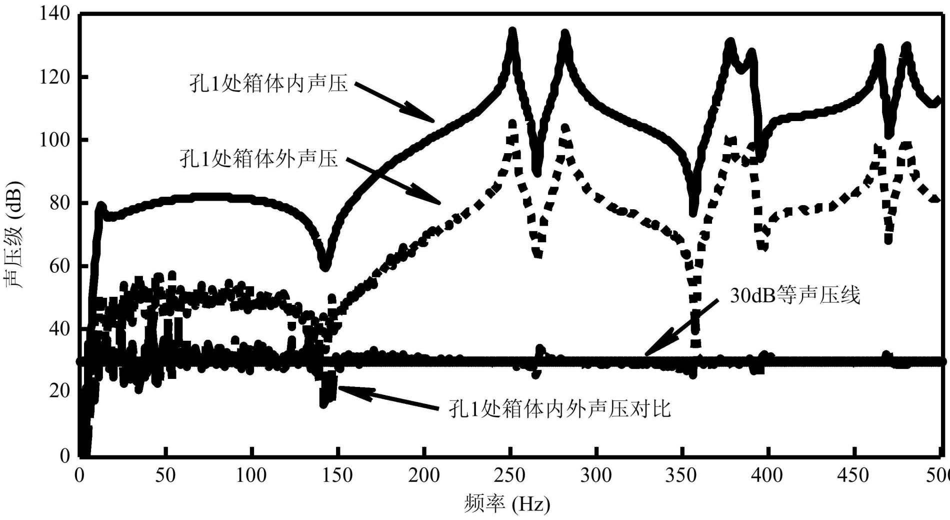


图 9　孔 1 处箱体内外声压对比

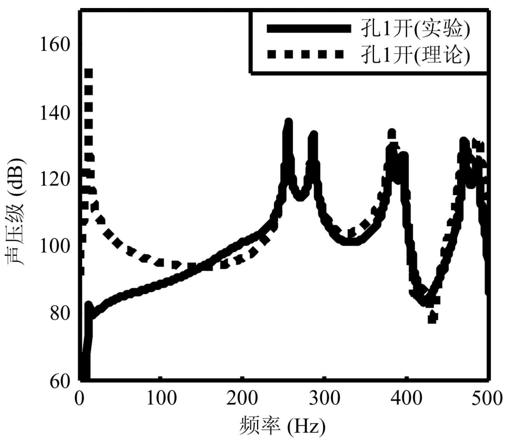


图 10 孔 1 开实验和理论频响曲线

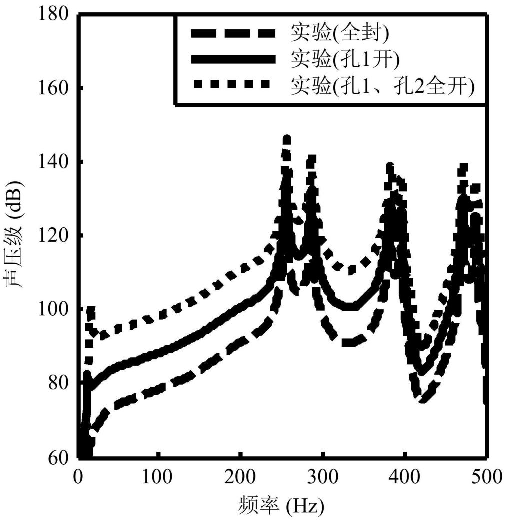


图 11 箱体内实测频响曲线

4 结论

本文将开孔对 (0, 0, 0) 阶模态共振频率影响的研究扩展到高阶模态，并分析了开孔封闭空间在高阶共振频率激励下的声压分布。将孔内振动空气等效为点源，用模态展开法建立了开孔封闭空间受迫振动的声场模型。仿真和实验表明，开孔后相当于孔处声质量减小使得开孔封闭空间共振频率增加，(0, 0, 0) 阶共振频率偏移量较大，高阶共振频率偏移量较小。当孔位于某模态节点位置，则该阶模态共振频率不变。对开孔封闭空间，增加孔径或减小壁面厚度会使共振频率增加。进一步的仿真计算显示，在高阶共振频率激励下，远离小孔位置声压分布与该共振峰同阶的闭空间模态形状函数基本一致，靠近孔位置声压小于该阶模态声压值。原因是远离与靠近孔位置声压均主要由与该共振峰同阶的开孔封闭空间模态声压值决定，靠近小孔位置，对应于激励频率的模态声压和其它阶模态声压之和的相位相反使得该处声压减小。

参 考 文 献

1 马大猷主编. 噪声与振动控制工程手册. 北京：机械工业出版社，2002: 447

2 Pan J, Elliot S J, Baek K H. *J. Sound Vib.*, 1999; **223**(4): 543—566

3 Spence R D. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1948; **20**(4): 380—386

4 Mulholland K A, Parbrook H D. Transmission of sound through apertures of negligible thickness. *J. Sound Vib.*, 1967; **5**(3): 499—508

5 Jun K H, Eom H J. Acoustic scattering from a circular aperture in a thick. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995; **98**(4): 2324—2327

6 Pees E H. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2010; **127**(3): 1381—1390

7 Franck S, Nelisse H, Atalla H. On the modelling of the diffuse field sound transmission loss of finite thickness apertures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007; **122**(1): 302—313

8 Morse P M, Ingard U. Theoretical acoustics. New York: McGraw-Hill book company, 1968: 70—73, 679—688

9 库特鲁夫 H (沈嵘译). 室内声学. 北京：中国建筑工业出版社，1982: 112—116

10 Dowell E H, Gorman G F, Smith D A. Acoustoelasticity: general theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparisons with experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977; **52**(4): 519—542

11 Jing Y, Xiang N. Visualizations of sound energy across coupled rooms using a diffusion equation model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008; **124**(6): 360—365

12 Xiang N, Jing Y, Bockman A C. Investigation of acoustically coupled enclosures using a diffusion-equation model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2009; **126**(3): 1187—1198

13 浦宏杰，邱小军，王季卿. 耦合空间中不同衰变类型声场的边界研究. 声学学报，2009; **34**(6): 533—538

14 靳国永，张洪田，李玩幽，叶黎明，杨铁军. 基于可调频亥姆霍兹共振器的封闭空间噪声自适应半主动控制. 声学学报，2010; **35**(3): 309—320

15 Lin L, Wang Z, Jiang Z. Effect of sound-absorbing material on a microperforated absorbing construction. *Chinese Journal of Acoustics*, 2011; **30**(2): 191—202

16 Wang Z, Lin L, Jiang Z. The effect of grazing mean flow on acoustical characteristics of the micro-perforated panel absorber. *Chinese Journal of Acoustics*, 2011; **30**(1): 1—9

17 Pierce A D. Acoustics-an introduction to its physical principles and applications. New York: McGraw-Hill book company, 1981: 284—287, 330—336

18 Bladel J V. Coupling through a small aperture in a waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1970; **47**(1): 202—210

19 Lam H F, Ng C T, Lee Y Y, Sun H Y. System identification of an enclosure with leakage using a probabilistic approach. *J. Sound Vib.*, 2009; **322**(4): 756—771

20 杜功换，朱哲民，龚秀芬. 声学基础. 南京：南京大学出版社，2001: 446, 139—140

21 Pan J, David A B. The effect of fluid-structural coupling on sound waves in an enclosure-Theoretical part. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989; **87**(2): 691—707

22 Nelson P A, Elliot S J. Active control of sound. London: Academic Press, 1992: 318—321