

二维声场预测的快速多极基本解法^{*}

张炳荣¹ 陈 剑^{1,2} 陈立涛¹ 李家柱¹

(1 合肥工业大学噪声与振动工程研究所 合肥 230009)

(2 安徽省汽车 NVH 与可靠性重点实验室 合肥 230009)

2012 年 9 月 24 日收到

2013 年 1 月 28 日定稿

摘要 传统基本解法在二维大规模模型的声场求解过程中, 系统方程形成和求解的计算量正比于自由度 N 的二次方 $O(N^2)$ 和三次方 $O(N^3)$, 求解效率低; 为此, 引入快速多极子算法并采用广义极小残差法迭代求解, 提出一种用于二维声场预测的快速多极基本解法。对无限长圆柱体及二维类车体辐射模型的仿真结果表明, 当 N 为 3000 时, 分别采用快速多极基本解法与传统基本解法求解所需的时间比值约为百分之四, 且 N 越大比值越小; 最终实现系统方程的形成和求解的计算量降低到正比于自由度 $O(N)$, 提高了对二维大规模模型声场预测计算效率。

PACS 数: 43.40

A fast multipole method of fundamental solutions for two dimensional acoustic radiation problems

ZHANG Bingrong¹ CHEN Jian^{1,2} CHEN Litao¹ LI Jiazhu¹

(1 *Institute of sound and vibration Research, Hefei University of Technology* Hefei 230009)

(2 *Key Laboratory of Automotive NVH and Reliability Anhui Province* Hefei 230009)

Received Sept. 24, 2012

Revised Jan. 28, 2013

Abstract The method of fundamental solutions (MFS) for two dimensional (2D) large scale acoustic problems requires $O(N^2)$ operations in formulations and $O(N^3)$ in a direct solution of the linear system, where N is the number of unknowns, and it also needs large memory storage and has low computational efficiency. A fast multipole method of fundamental solutions (FMMFS) for two dimensional acoustic radiation problems is presented, by combining the method of fundamental solutions (MFS) with the fast multipole method (FMM), and an iterative equation solver called the Generalized Minimum Residual method (GMRES) is used in the FMMFS. The numerical examples of a long pulsating cylinder and 2D car-like model radiation problems are presented, and they clearly demonstrate that the ratio of solution time using the FMMFS and MFS respectively is approximately four percent, when the N is equal to 3000, and the larger N the smaller ratio. Compared with the traditional MFS, the operations in formulations and solution of the linear system with the developed FMMFS are both reduced to $O(N)$, and the efficiency for 2D large scale acoustic problems is greatly improved.

引言

基本解法 (MFS, Method of Fundamental Solutions), 其等效于波叠加法、等效源法^[1-2], 是一种无

网格分析方法, 其主要思想是: 分析域的解可以看作是由放置于分析域外部的若干个简单源产生的解叠加而成, 而这些简单源的强度可以通过匹配问题边界上的边界条件获得。与传统边界元法 (BEM, Boundary Element Method) 相比, 具有如下几个优点, 将边

^{*} 国家自然科学基金 (11274087) 资助

界离散点直接布置于自然边界上,且通过源强点的布置,避开对核函数的奇异积分,且其系统方程的形成相比于传统边界元法较为简便。Golberg M.A. 和 Chen C.S.^[3] 讨论了该方法求解拉普拉斯方程及其收敛性问题,最后采用该方法实现了声波及电磁波散射问题的计算。基本解法的主要不足之处在于对于特别复杂的结构声辐射问题,源强点位置的布置没有特定的理论公式,通常可以采用一个均方根误差的方式判断源强点布置是否合理^[4]。

同传统边界元法一样,该方法在声场预测求解过程中,所形成的系统矩阵是满秩、非对称矩阵,其系统矩阵的形成和求解的计算量分别正比于所求问题自由度 N 的二次方 $O(N^2)$ 和三次方 $O(N^3)$,也因此其所需存储量比较大,求解速度比较慢,在实际计算及工程应用中受到了很大的限制。为此,在传统基本解法的基础上,引入快速多极子算法。快速多极子算法(FMM, Fast Multipole Method)是由 Rokhlin 和 Greengard^[5-6] 提出,该算法引入了多极展开和局部展开两个基本概念,并将其应用于 BEM 的求解,将 BEM 所需的计算量和存储量降低到线性正比于系统自由度 $O(N)$ 。该方法逐渐被引入到声辐射、散射计算方法中, Rokhlin 首先将其应用到二维散射问题的快速求解^[7],并发展了用于三维 Helmholtz 积分方程的快速多极子算法的对角转换形式^[8]。J.T. Chen 和 K. H. Chen^[9] 将快速多极子方法引入到双层势积分方程求解计算中,推导出一种新的适用于求解二维声辐射问题的快速多边界元算法。L. Shen, Y.J. Liu 和 M.S. Bapat^[10-12] 团队对快速多极边界元法及其在各个领域的应用做了深入广泛的研究。季振林教授课题组将快速多极边界元用于声学消声器声学性能的预测^[13]。姚振汉课题组对力学中快速多极边界元法展开研究,并致力于快速多极边界元法的高性能并行计算^[14-15]。

本文将快速多极子算法应用于基本解法中,针对二维声场辐射问题,推导了快速多极基本解法(FMMFS, Fast Multipole Method of Fundamental Solutions)的相关理论公式及算法实现的基本步骤,通过该过程,直接得到系统系数矩阵及未知向量的乘积,并通过广义极小残差法(GMRES, Generalized Minimum Residual method)迭代求解;而不用计算并存储系数矩阵,从而将系统方程的形成及求解、存储量均降低到线性正比于系统自由度 $O(N)$ 。同样,也可以将该方法扩展并应用于其他问题。本文首先简要介绍了传统基本解法理论基础;其次,针对二维声辐射问题,推导了快速多极基本解法的相关理论公

式及算法实现的基本步骤;最后通过算例说明该方法对求解二维声场预测问题的准确性及高效率。

1 基本解法理论

在均匀理想流体介质中,具有封闭结构的振动体 S ,如图 1,其稳态声辐射问题可通过 Helmholtz 方程表达为:

$$\nabla^2 p(x, \omega) + k^2 p(x, \omega) = 0, \quad x \in S \quad (1)$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子, $p(x, \omega)$ 为场点 x 处的声压, x 为分析域任意场点, ω 为圆频率, $k = \omega/c_0$ 为波数, c_0 为声速,表面边界 $S = S_1 \cup S_2$, 表面边界条件可以是:

Dirichlet 边界条件:

$$p = \bar{p}(x), \quad x \in S_2$$

Neumann 边界条件:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = i\rho\omega\bar{v}_n(x), \quad x \in S_1$$

其中 ρ 为空气密度, $\bar{p}$ 和 $\bar{v}_n$ 分别为已知表面声压与法向振速, $\mathbf{n}$ 为边界法向。

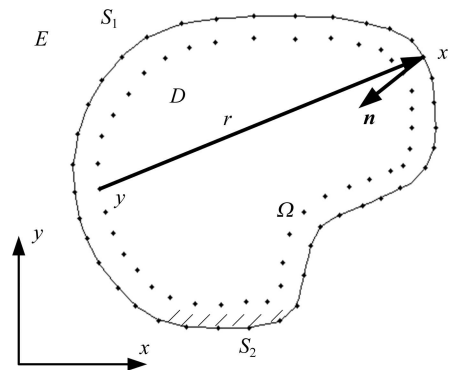


图 1 源强点用 y 表示,边界上场点用 x 表示

在基本解法中,式(1)中的声场可以表达为^[1-2]:

$$p(x) = i\rho\omega \int_D q(y)G(x, y)d\Omega(y), \quad (2)$$

二维声学问题的 GREEN 函数为:

$$G(x, y) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\|x - y\|), \quad (3)$$

$$\nabla_{\mathbf{n}}G(x, y) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}(x)} = \frac{-ik}{4}H_1^{(1)}(k\|x - y\|)\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}(x)}. \quad (4)$$

对式(2)离散为 N 个单元,若 $x_i \in S_2$, 得到:

$$i\rho\omega \sum_{m=1}^N q(y_m)G(x_i, y_m) = \bar{p}(x_i). \quad (5)$$

若 $x_i \in S_1$, 由欧拉公式得到:

$$\sum_{m=1}^N q(y_m) \nabla_{\mathbf{n}} G(x_i, y_m) = \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(x_i), \quad (6)$$

因此, 历遍所有的场点 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 可以得到系统方程如下:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix},$$

即

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{b}. \quad (7)$$

其中 $\mathbf{A}$ 为系数矩阵, $\mathbf{q}$ 为未知向量, $\mathbf{b}$ 为已知右边向量, 一旦求得源强 $\mathbf{q}$, 分析域 E 中的任意场点的声压均可通过式 (2) 求得.

2 用于二维声场预测的快速多极基本解法理论

2.1 快速多极基本解法

快速多极子算法的主要思想是通过多极展开、局部展开以及相应展开转移的过程, 将点和点之间的相互作用关系转化为单元和单元的相互关系, 并通过树结构实现关系信息的传递, 这样的传递比起点对点之间的直接传递更加有效.

根据 Graf' Addition 理论^[16], 若满足 $|x - y_1| > |y - y_1|$, 如图 2, 可以将式 (3) 和式 (4) 沿着 y_1 点展开为:

$$G(x, y) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n(y_1, x) R_n(y, y_1), \quad (8)$$

$$\nabla_{\mathbf{n}} G(x, y) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}(x)} = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial S_n(y_1, x)}{\partial \mathbf{n}(x)} R_n(y, y_1), \quad (9)$$

其中:

$$S_n(x, y) = i^n H_n^{(1)}(kr) e^{in\alpha}, \quad (10)$$

$$R_n(x, y) = (-i)^n J_n(kr) e^{in\alpha}, \quad (11)$$

$H_n^{(1)}(*)$ 为 n 阶 Hankel 函数, $J_n(*)$ 为 n 阶 Bessel 函数, (r, α) 为向量 $\vec{yx}$ 的极坐标.

若 $|x - y_1| > |y_j - y_1|$, 式 (5) 沿着 y_1 点多极展开为:

$$\sum_j q(y_j) G(x, y_j) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n(y_1, x) M_n(y_1), \quad (12)$$

其中多极矩:

$$M_n(y_1) = \sum_j q(y_j) R_n(y_j, y_1), \quad (13)$$

将多极展开点从 y_1 转移到 y_0 点, 多极矩之间的转化关系 (M2M) 为:

$$M_n(y_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{n-m}(y_1, y_0) M_m(y_1). \quad (14)$$

若 $|x - x_0| < |y_0 - x_0|$ 且 $|x - y_0| > |y - y_0|$, 式 (5) 沿着 x_0 点局部展开为:

$$\sum_j q(y_j) G(x, y_j) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n R_n(x_0, x) L_{-n}(x_0), \quad (15)$$

其中局部矩 (M2L) 为:

$$L_n(x_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_{n-m}(y_0, x_0) M_m(y_0). \quad (16)$$

假设有 $|x_1 - y| > |x_1 - x|$, 将展开点从 x_0 转移到 x_1 点, 局部矩之间的转化关系 (L2L) 为:

$$L_n(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{n-m}(x_0, x_1) L_m(x_0), \quad (17)$$

同理, 由式 (9), 经过上述过程, 可得到关于式 (6) 的展开公式:

$$\sum_j q(y_j) \frac{\partial G(x, y_j)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\partial R_n(x_1, x)}{\partial \mathbf{n}(x)} L_{-n}(x_1), \quad (18)$$

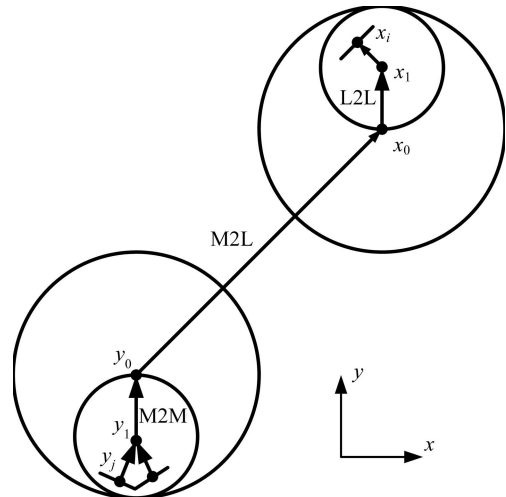


图 2 快速多极子算法多极展开、局部展开及其相应展开转移 (M2M, M2L, L2L)

2.2 快速多极基本解法实现步骤

快速多极基本解法的实现过程与快速多极边界元法^[17]相似,不同点在于,快速多极基本解法中场点、源强点是不同的两组节点,需要分别构建两组二叉树结构对应源强点和场点,并实现两者间的匹配,从而实现矩阵和向量乘积的效果。具体实现步骤如下:

第 1 步:边界离散。在边界“S”及背离分析域上,分别布置场点及源强点,如图 1。

第 2 步:确定分层二叉树结构。选取一个正方形区域,让所有的源强点和场点都包含在其中,并称这个方形区域为第 0 层单元,如图 3 所示。将 0 层单元 4 等分为 4 个正方形,并称之为第 1 层单元,依次将包含离散点的第 L 层单元四等分为 $L+1$ 层单元,直到第 $L+1$ 层单元内所包含的源强点或场点个数不多于某个给定的数值时(图 3 中给定这个数值为 1)停止划分。这样就建立起一个二叉树结构。这里,将上一层正方形单元划分而来的四个小正方形单元称为“子单元”,前者又称为“父单元”,树结构中,没有子单元的单元,称之为“叶单元”,如图 3 中用灰色标示的单元。通过执行这一过程,分别对场点及源强点建立分层二叉树结构。

第 3 步:上行历遍。首先,对源强点的二叉树结构中(图 3(a)),通过式 (13) 计算所有叶单元的多极矩,其次,通过式 (14)(M2M) 逐层向上计算树结构中所有父单元的多极矩,父单元的多极矩是其子单元多极矩转化后之和。如此逐层上行历遍转化多极矩,直至第 2 层单元。

第 4 步:下行历遍。首先给出树结构中单元之间关系的定义:在 L 层的任意两个单元,如果两个单元共有一个点或边时,则这两个单元互为“邻近单元”;如果两个单元不是邻近单元,但其 $L-1$ 层的父单元是邻近单元,则这两个单元互为“相互作用单元”;如果两个单元不邻近,其父层单元也不邻近,则这两个单元互为“远程单元”。

对场点的二叉树结构中(图 3(b)),从第 2 层开始计算所有单元的局部展开系数。第 2 层某单元的局部展开系数是由该单元的所有相互作用单元,通过式 (16)(M2L) 转化后的加和求得。

第 3 层的单元,其局部展开系数分为两部分:第 1 部分是由其所有相互作用单元通过式 (16)(M2L) 转化而来;第 2 部分是其父单元的局部展开系数通过式 (17)(L2L) 转化实现的,这部分实质上是通过其父单元将其所有远程单元的信息传递过来。如此向下历遍,直至最低层,求出所有单元的局部展开系数。

第 5 步:式 (7) 的求和计算。这里假设某一场点 x_i 在叶单元 C 内。叶单元 C 及其邻近单元内的源强点对场点 x_i 的贡献,可以通过传统基本解法(式 (5) 或式 (6)) 直接求得;而其他单元内(这里包含单元 C 的所有远程单元和相互作用单元)所有的源强点对 x_i 的贡献则可以通过式 (15) 或式 (18) 计算得到。

第 6 步:迭代求解。对于给定的初始向量 q_0 ,通过第 3、4、5 步,求得方程系数矩阵与该向量的乘积,通过迭代得到新的求解向量 q_1 后,重复以上步骤得出新的矩阵向量乘积,依次迭代下去,直到迭代满足一个事先给定的收敛条件,从而就求出问题的解。

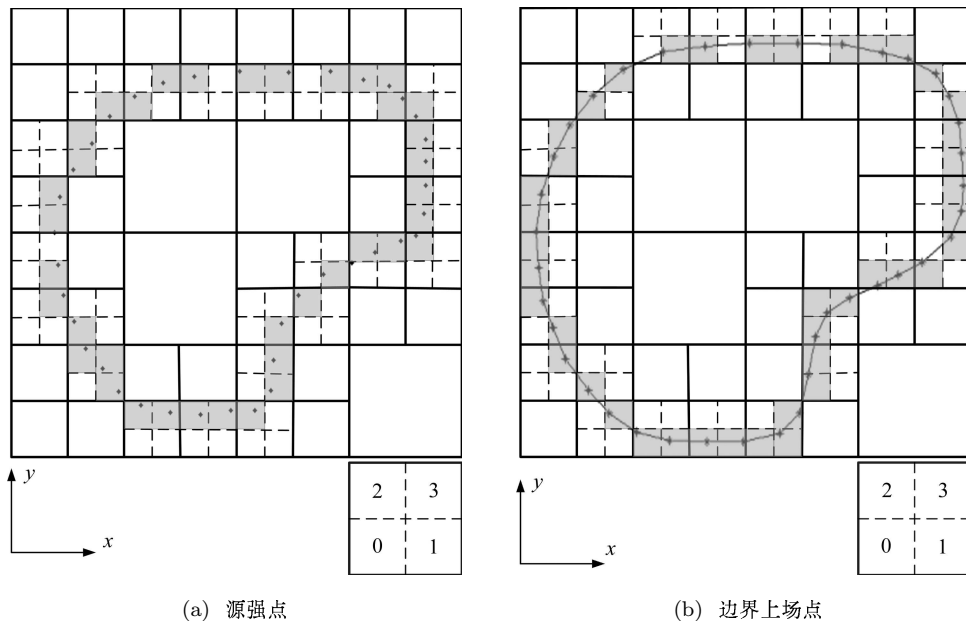


图 3 二叉树结构示意图

3 数值算例及结论

本节用上述快速多极基本解法求解算例, 通过比较解析解及传统的基本解法求解, 证明了该方法对二维声场预测的准确性、高效性与可行性。本文的算例在 Intel Dual Core 2.2 GHz 处理器, 1 GB 内存的电脑上运行得到。程序代码均使用 Fortran 90 编写, 采用广义极小残差法 (GMRES)^[18] 求解器进行迭代求解。在算法执行过程中, 式 (12) — 式 (18) 的展开阶数均设置为 10, 限定每个单元内所包含的最大节点数为 100, 求解的迭代误差设置为 10^{-3} 。

求解截面半径 $a = 1$ m、法向振速幅值为 $V_0 = 1$ m/s 的无限长圆柱体声辐射问题, 其截面圆心位于 (0,0), 解析公式为:

$$P_{th}(r) = -i\rho c_0 V_0 H_0^{(1)}(kr) / H_1^{(1)}(ka),$$

其中 $\rho = 1.21$ kg/m³, $c_0 = 343$ m/s, 波数 $k = 2 * \pi * (200 \text{ Hz}) / c_0$, 同图 1 类似, 在圆上和背离分析域上分别布置了 $N = 500 \sim 20000$ 个场点及源强点, 求解并计算相应坐标点的声压值。

图 4 为快速多极基本解法和传统基本解法在求解不同规模模型所消耗的计算时间, 图 4 中可以看出采用快速多极基本解法求解, CPU 计算时间呈线性正比于自由度 $O(N)$, 在 $N = 5000$ 时, 采用 FMMFS 求解仅用了 3.69 s, 而采用传统基本解法则需要 1449.226 s。图 5 为解析公式求得的声压幅值与采用快速多极基本解法求得的声压幅值之间的绝对误差。图中可以看出, 在所求坐标点中, 最大绝对误差仅为 $7.4E-6$, 远远小于其声压幅值 289.3454 Pa, 且离中心点越远, 计算精度越高。

二维类车体模型的声辐射仿真分析, 如图 6 所示, 其表面边界条件是由放置于坐标 (0.25, 0.25) 的点声源产生的边界法向振速代替。在辐射体边界及背离分析域方向分别布置 $N = 22000$ 个场点及源强点, 在分析域内划分了 3905 个单元作为所要分析的声场。对于该模型, 采用本文的方法计算历时 33 s, 而采用传统基本解法, 其所需的存储量过大、时间过长, 无法求解。图 6(a) 为快速多极基本解法计算得到的声压幅值分布云图, 图 6(b) 为点声源直接计算得到的声压幅值分布云图, 两者计算得到的声压幅值均方根误差仅为 0.2958%。对该模型的声辐射仿真分析, 进一步说明了快速多极基本解法的高效性和可行性。

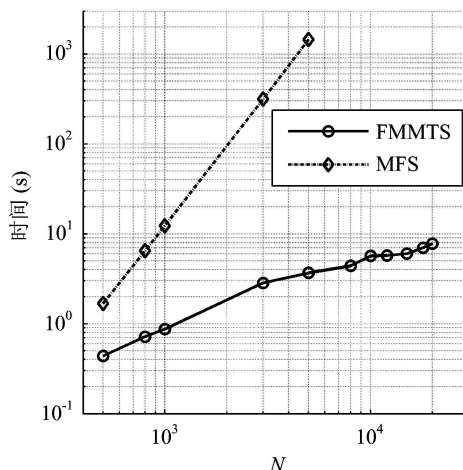


图 4 快速多极基本解法和传统基本解法 CPU 计算时间对比

4 结论

本文将快速多极子算法的“单元对单元”代替“点对点”的思想应用于基本解法中, 推导了快速多

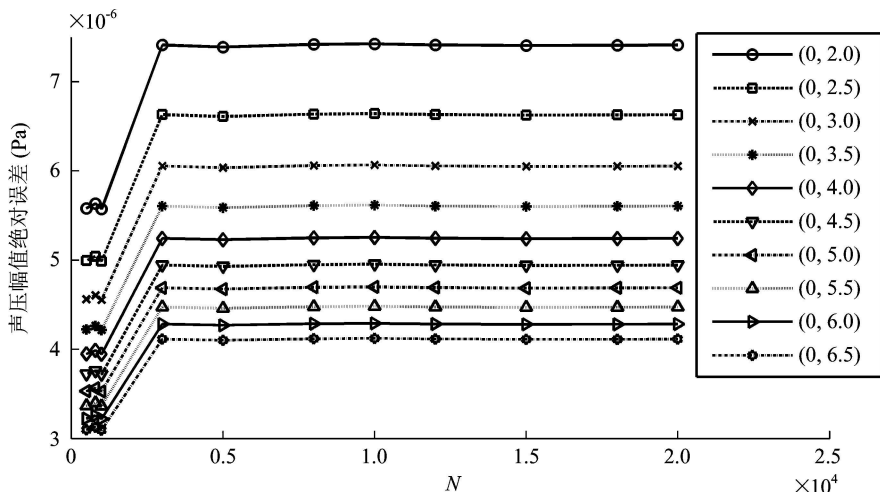


图 5 不同坐标场点声压幅值的绝对误差

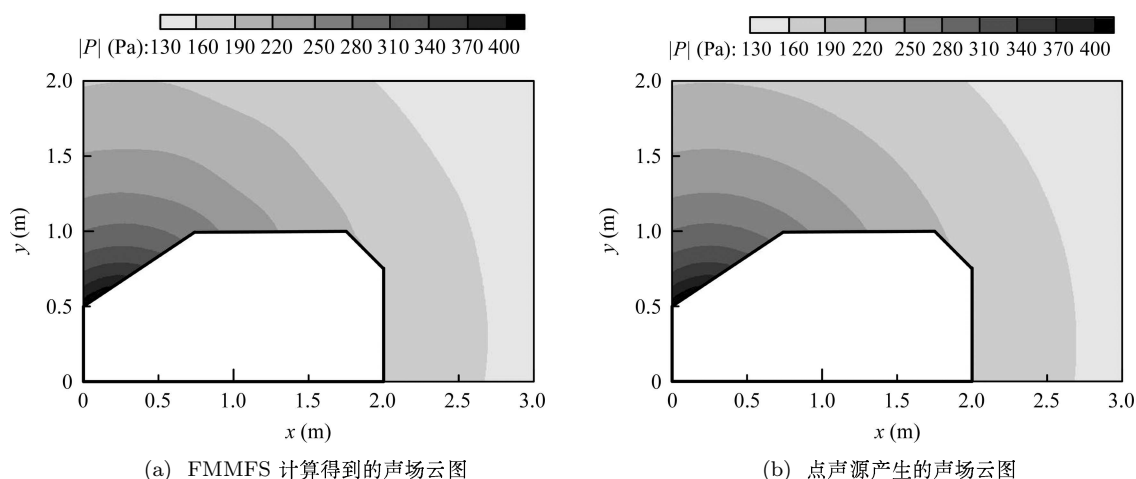


图 6 二维类车体模型的声辐射仿真

极基本解法的相关理论公式及算法实现的基本步骤,提出一种用于二维声场预测的快速多极基本解法,并采用广义极小残差法迭代求解,最终实现了二维声场预测问题的快速求解。与传统基本解法相比,该方法避开对核函数的奇异积分,同时系统方程求解的计算量也降低到线性正比于自由度 $O(N)$,充分发挥了快速多极子算法及基本解法的各自优势。仿真实验结果充分说明了该方法对处理大规模二维声场预测问题的准确性及高效率。应该指出的是,合理的源强点布置及预处理对迭代求解具有积极的作用。

参 考 文 献

- Koopmann G H, Song Limin, John B. Fahnlne. A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989; **86**(6): 2433—2439
- Alexandre Leblanc, Ros Kiri Ing, Antoine Lavie. A wave superposition method based on monopole sources with unique solution for all wave numbers. *Acta Acustica United with Acustica*, 2010; **96**: 1—6
- Golberg M A, Chen C S. The method of fundamental solutions for potential Helmholtz and diffusion problems. Boston: Computational Mechanics Publications, 1998:131—136
- Song Limin, Koopmann G H, John B. Fahnlne. Numerical errors associated with the method of superposition for computing acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991; **89**(8): 2625—2634
- Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comput. Phys.*, 1985; **60**(2): 187—207
- Greengard L F, Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 1987; **73**(2): 325—348
- Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *J. Comput. Phys.*, 1990; **86**(2): 414—439
- Rokhlin V. Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1993; **1**(1): 82—93
- Chen J T, Chen K H. Applications of the dual integral formulation in conjunction with fast multipole method in large-scale problems for 2D exterior acoustics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004; **28**(8): 685—709
- Liu Y J. Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and Applications in Engineering. New York: Cambridge University Press, 2009: 157—159
- Bapat M S, Shen L, Liu Y J. Adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional half-space acoustic wave problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2009; **33**(8): 1113—1123
- Shen L, Liu Y J. An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional acoustic wave problems based on the Burton-Miller formulation. *Computational Mechanics*, 2007; **40**(3): 461—472
- 王雪仁, 季振林. 快速多极边界元法应用于预测消声器的声学性能. *中国科学技术大学学报*, 2008; **38**(2): 207—214
- 雷霆, 姚振汉, 王海涛. 三维快速多极边界元高性能并行计算. *清华大学学报*. 2007; **47**(2): 29—34
- 王海涛, 姚振汉. 一种新的用于二维弹性静力学的快速多极边界元法. *燕山大学学报*, 2004; **28**(2): 146—150
- Abramowitz M, Stegun I *et al.* Handbook of mathematical functions. Dover, New York, 1965: 363—363
- Liu Y J, Nishimura N. The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutorial. *Engineering Analysis with boundary Element*, 2006; **30**: 371—381
- Frayssé V, Giraud L, Gratton S, Langou J. A set of GMRES routines for real and complex arithmetic on high performance computers. CERFACS Technical Report TR/PA/03/3, public domain software available on www.cerfacs.org/Softs, 2003: 1—20