第 39 卷第 3 期　　声 学 学 报　　Vol. 39, No. 3
2014 年 5 月　　ACTA ACUSTICA　　May, 2014

锥形颈部赫姆霍兹共振器声学性能预测*

刘海涛　郑四发　连小珉　但佳璧
(清华大学 汽车安全与节能国家重点实验室　北京　100084)

2012 年 12 月 19 日收到
2013 年 12 月 9 日定稿

摘要　锥形颈部赫姆霍兹共振器具有更好的低频消声能力，而其声学性能尚无准确解析预测方法。为了研究其声学性能，在声学长度修正的基础上，利用一维解析方法建立了用于计算传递损失的一维修正模型。运用分割法计算锥形管内部声传播的声学长度修正，并给出了声学修正长度计算公式。采用得到的锥形管声学修正长度和一维修正模型，计算出的锥形颈部赫姆霍兹共振器频率与有限元及实验测试结果偏差在 2 Hz 以内，明显优于不修正的计算结果。表明锥形管声学长度修正法提高了一维解析方法的精度，从而可以快捷准确的预测锥形颈部赫姆霍兹共振器的消声性能。

PACS 数：43.20, 43.50

The acoustic performance prediction of the Helmholtz resonator with a conical neck

LIU Haitao　ZHENG Sifa　LIAN Xiaomin　DAN Jiabi
(*State Key Laboratory of Automotive Safety and Energy, Tsinghua University*　Beijing　100084)

Received Dec. 19, 2012
Revised Dec. 9, 2013

Abstract　The Helmholtz resonator with a conical neck, which have broad acoustic attenuation band performance in the low frequency range, have no accurate analytical approach for the acoustic performance prediction. To investigate its acoustic performance, a general theory model based on the one-dimensional analysis approach with acoustic length corrections is developed to predict the transmission loss (TL). A segmentation method is used to calculate the acoustic correction lengths for the sound propagation in the conical tube. And then, an approximate formula is provided to give correction lengths for conical tubes with different geometries. The TL results obtained by the general theory and the acoustic correction lengths are compared with the results from the finite element method and experiment, which show that the deviations of the resonance frequency are less than 2 Hz and experiment, which show that the deviations of the resonance frequency are less than 2 Hz and much better than the results from one-dimensional approach without corrections. The method of the acoustic length correction for the conical neck, greatly improved the accuracy of the one-dimensional analysis approach, which will be quick and accurate to predict the sound attenuation property of the Helmholtz resonator with a conical neck.

引言

在管道噪声控制中，赫姆霍兹共振器具有较强的低频消声效果 [1]，且流动阻力损失较小，因而广泛应用于管道消声系统中。国内外许多学者对赫姆霍兹消声器的单个结构参数以及多个组合排列方式进行了深入研究。Dicky 和 selamet[2] 研究了共振器腔体的长径比对传递损失的影响。Selamet 和 Lee[3] 研究了具有延长颈的赫姆霍兹消声器的声学性能，发现延长颈的长度、形状以及穿孔率大小都会对共振器的共振频率以及传递损失产生影响。Griffin[4] 发现并联的双共振器结构可以产生更宽的消声频带。Xu 和 Selamet[5] 分析了可以获得两个传递损失峰值串联的双共振器结构。最近， Wang 和 Mark[6] 研究了周期并联排列的多个共振器的消声结构，以获得

* 国家自然科学基金 (20121302013, 20131308965) 资助

更宽频带以及更大的传递损失。

由于并联或串联多个共振器的消声结构在实际应用中会受到空间等因素限制，提高单个共振器的消声频带有重要意义。Tang[7] 通过实验发现带锥度颈部赫姆霍兹共振器可以显著提高消声能力。Tang 研究的这种结构颈部尺寸要远小于腔体尺寸，并且没有研究这种共振器的传递损失预测方法。

现今，国内外学者发展出了多种管道声学计算方法，如一维解析法 [8−9]、二维解析法 [3,5]、三维解析法 [10]、三维边界元方法 [3,5] 以及三维有限元方法 [11−12]。其中一维解析方法相对于二维和三维解析法，省去了复杂的代数运算，可以简单快速计算消声结构的传递损失。但一维方法忽略了声波在截面变化处传播的高阶声模态的影响，使得计算结果与真实结果有偏差 [13]。许多学者采用声学长度修正的方法去修正高阶声模态的影响，以提高一维方法的计算精度 [14−15]。Kang 和 Ji[14] 提出了基于二维解析方法的声学修正长度计算公式，其计算结果能与三维有限元以及实验结果吻合。本文以一维直管道声学长度修正为基础，研究带锥形颈部的赫姆霍兹共振器结构传递损失的预测方法。

1 锥形颈部赫姆霍兹共振器一维预测模型

图 1 给出了锥形颈部赫姆霍兹共振器的结构示意图。腔部结构和颈部结构由圆形截面的管道构成，主管道由矩形截面 $(a\times a)$ 的方管构成。计算模型中假定介质为理想气体，壁面无摩擦且为绝对刚性壁面。

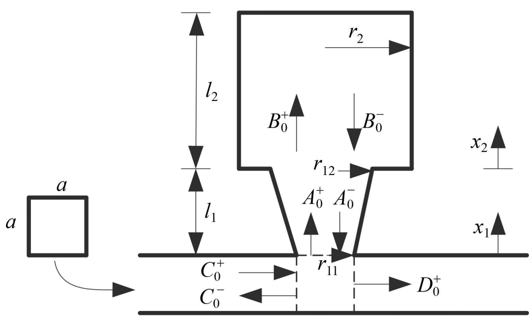


图 1 锥形颈部赫姆霍兹共振器示意图

图 1 中 a 为主管道边长，r_{11} 为锥形管入口截面半径，r_{12} 为锥形管出口截面半径，r_2 为腔体截面半径，l_1 为锥形颈部长度，l_2 为腔体长度；C_0^+ 和 C_0^- 分别为主管道上游部分入射和反射声压，D_0^+ 为下游透射声压，A_0^+ 和 A_0^- 分别为锥形管内沿 x 方向正向和反向传播的声压，B_0^+ 和 B_0^- 分别为腔体内沿 x 方向正向和反向传播的声压。此结构中，锥形管内部的声传播是本文研究的重点。

1.1 锥形管声传播

图 2 为锥形管结构示意图，其中 x_{c1} 为假想顶点到入口截面的距离，x_{c2} 为假想顶点到出口截面的距离。

对于静态介质，锥形管内基于平面波理论的传递矩阵方程 [8]:

$$\begin{bmatrix} p_{\rm in} \\ u_{\rm in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\rm out} \\ u_{\rm out} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

其中 $p_{\rm in}$ 和 $u_{\rm in}$ 分别为入口的声压和质点振速，$p_{\rm out}$ 和 $u_{\rm out}$ 分别为出口处的声压和质点振速，

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{x_{c2}}{x_{c1}}\cos(kl_1) - \frac{\sin(kl_1)}{x_{c1}k}, \\
C_{12} &= j\frac{\rho_0 c_0 x_{c2}}{x_{c1}}\sin(kl_1), \\
C_{21} &= \frac{jx_{c2}}{\rho_0 c_0 x_{c1}}\Big(1+\frac{1}{k^2 x_{c1}x_{c2}}\Big)\sin(kl_1) - \\
&\quad \frac{jx_{c2}}{\rho_0 c_0 k x_{c1}^2}\Big(1-\frac{x_{c1}}{x_{c2}}\Big)\cos(kl_1), \\
C_{22} &= \frac{x_{c2}}{x_{c1}}\cos(kl_1) + j\frac{x_{c2}}{x_{c1}^2 k}\sin(kl_1),
\end{aligned}$$

ρ_0 为空气密度，c_0 为声速，k 为波数。

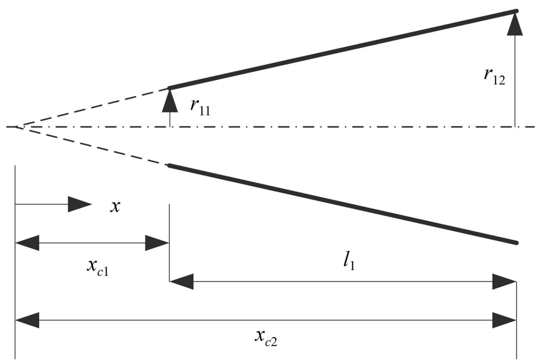


图 2 锥形管结构示意图

由于锥形管的截面是沿轴向逐渐变化的，声波在传播过程中会产生高阶非平面波声模态 [18]，使得锥形管内的声音不再以准平面波的形式传播，而更接近球面波的形式，如图 3 所示。因而基于平面波理论的式 (1) 计算结果会出现误差。而应用声学长度修正去等效非平面波效应是减小结果误差的一种简单实用的方法 [15]，故本文拟采用声学长度修正去消除锥形管内部声传播的非平面波效应。

截面连续变化的管道边界可以近似等效成平行于轴线的分段阶梯边界 [17]。将管壁连续边界离散为小的突变阶梯边界，并考虑用微小突变截面处产生的高阶非平面波声模态去等效实际锥形管内的高阶非平面波。对于微小突变截面处产生的高阶非平面波

声模态运用管道声学修正长度去等效，进而得出整个锥形管内部声传播的声学修正长度。

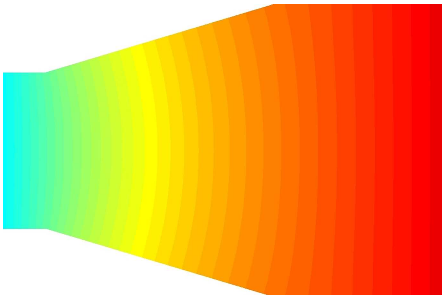


图 3　锥形管内的声场分布 (频率 240 Hz)

首先将锥形管沿轴向方向进行分割离散，每一段近似为等截面直管，而两段之间连接处视为一个突变截面，如图 4 所示，其中 $\tilde{r}_n$ 为分割后第 n 段的截面半径。在本文中这种方法简称为分割法 (SM) 。

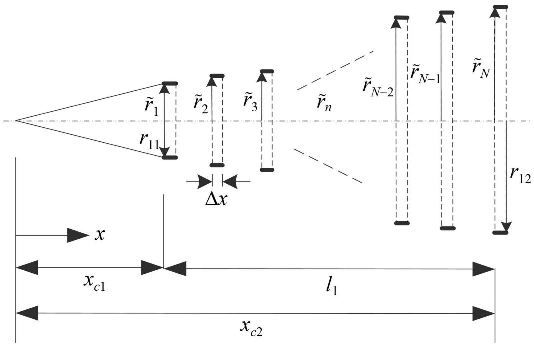


图 4　锥形管分割示意图

声波经过突变截面时会产生高阶声模态，可将其等效为集总声阻抗 [8,15]。突变截面处结构参量如图 5 所示。其中 P_1^+ 和 P_1^- 分别为突变截面颈部入口处的入射声压和反射声压，P_2^+ 和 P_2^- 分别为突变截面出口处的透射声压和反射声压。

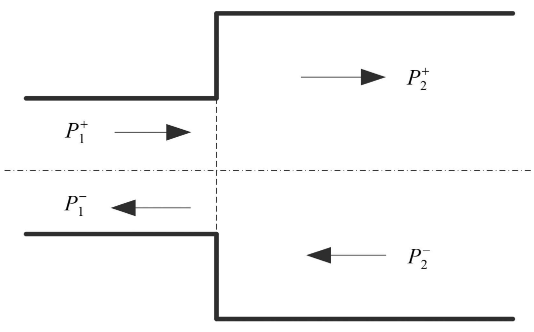


图 5　突变截面声学结构参量示意图

在突变截面处，高阶波的影响可由式 (2) 表示 [14]:

$$p_{1,0} = p_{2,0} + Z_a u_{1,0}, \tag{2}$$

其中，$p_{1,0}$ 是突变截面颈部入口的 (0,0) 阶模态声压，$p_{2,0}$ 是出口处的 (0,0) 阶模态声压，Z_a 为表示高阶波影响的等效集总声阻抗率，$u_{1,0}$ 为颈部入口处的体积速度。

式 (2) 可改写成阻抗率表达式：

$$Z_1 = \left(\frac{S_1}{S_2}\right) Z_2 + Z_a \tag{3}$$

其中 Z_1 为突变截面入口的阻抗率，Z_2 为截面出口的阻抗率；S_1 为入口截面积，S_2 为出口截面积。

集总声阻抗率可进一步换算为管道声学长度修正 [8]:

$$Z_a = j\rho_0\omega\delta, \tag{4}$$

其中 ω 是角频率，δ 为声学修正长度。

锥形管分割以后每两段之间的突变截面处需要运用集总声阻抗率进行修正。将一个长度为 l_1 的锥形管均匀的分割成 N 片，则每一片的轴向长度为 $\Delta x = l_1/N$ 。其中第 n 片和第 $n+1$ 片 ($n = 1, 2, 3 \cdots, N-1$) 之间突变截面的阻抗为：

$$Z_n = \left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right) Z_{n+1} + Z_{a(n)}, \tag{5}$$

其中 $Z_{a(n)}$ 为第 n 片和第 $n+1$ 片之间的集总声阻抗率。

然后进行迭代运算，可得到式 (6):

$$Z_1 = \left(\frac{S_1}{S_N}\right) Z_N + Z_{ac}, \tag{6}$$

其中 Z_{ac} 为整段锥形管的集总声阻抗，即，

$$Z_{ac} = Z_{a(1)} + \sum_{n=2}^{N-1}\left[\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) Z_{a(n)}\right]. \tag{7}$$

联立式 (4) 和式 (7), 可得到整段锥形管声学修正长度：

$$\delta_c = \delta_1 + \sum_{n=2}^{N-1}\left[\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)\delta_n\right]. \tag{8}$$

针对突变截面声学结构，Kang 和 Ji[14] 基于二维解析方法研究了突变截面的声学长度修正。结果显示当进出口半径比趋进于 1 时，出口处的腔体长度对于声学长度修正系数的影响基本可以忽略。因而，对于本文中的微小突变截面处的声学修正长度采用 Kang 和 Ji[14] 提出的近似修正公式进行计算。修正系数的近似表达式为：

$$\alpha(r_i, r_o) = \frac{\delta}{r_i} = 0.8216 - 1.0920\left(\frac{r_i}{r_o}\right) - 0.1091\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2 + 0.3795\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^3 {}^{[15]}, \tag{9}$$

其中 $\alpha = \delta/r_i$ 是声学长度修正系数，r_i 是突变截面颈部入口截面半径，r_o 是出口截面半径。

对于锥形管分割后第 n 段的截面半径为：

$$\widetilde{r}_n = \frac{x_{c1} + (n-1)\Delta x}{x_{c1}} r_{11}. \tag{10}$$

联立式 (9) 和式 (10) 可得第 n 片和第 $n+1$ 片之间突变截面的声学修正长度：

$$\delta_n = \widetilde{r}_n \alpha(\widetilde{r}_n, \widetilde{r}_{n+1}). \tag{11}$$

再联立式 (8) 和式 (11) 即可计算得到整段锥形管的声学修正长度 δ_c 。从式 (8) 中可以看出分割段数 N 的大小将直接决定声学修正长度的精度。本文 2.1 部分将对分割段数选取进行详细分析。

1.2 锥形颈部赫姆霍兹共振器的传递损失

为了计算共振器的传递损失，建立颈部入口处到腔体顶部的传递矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} p_{x_1=0} \\ u_{x_1=0} \end{bmatrix} = [\widetilde{\boldsymbol{T}}_1][\widetilde{\boldsymbol{T}}_2][\widetilde{\boldsymbol{T}}_3][\widetilde{\boldsymbol{T}}_4] \begin{bmatrix} p_{x_2=l} \\ u_{x_2=l} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中 $p_{x_1=0}$ 和 $u_{x_1=0}$ 是共振器颈部与主管道连接交接面处的声压和质点振速， $p_{x_2=l}$ 和 $u_{x_2=l}$ 是共振器腔体顶部处的声压和质点振速； $[\widetilde{\boldsymbol{T}}_1]$ 为主管道到锥形管入口突变截面处带声学长度修正的传递矩阵[15]，$[\widetilde{\boldsymbol{T}}_2]$ 是锥形管带声学长度修正的传递矩阵方程， $[\widetilde{\boldsymbol{T}}_3]$ 是锥形管颈部出口到腔体突变截面处带声学长度修正的传递矩阵方程[15], $[\widetilde{\boldsymbol{T}}_4]$ 是腔体的传递矩阵方程。

共振器的边界条件为：

$$\begin{cases} A_0^+ + A_0^- = p_{x_1=0}, \\ \dfrac{1}{\rho_0 c_0}(A_0^+ - A_0^-) = u_{x_1=0}, \\ u_{x_2=l} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

其中 A_0^+ 和 A_0^- 是共振器颈部入口处正向和反向声波传播的幅值。

为方便推导，将式 (12) 中的传递矩阵乘积改写如下形式：

$$[\widetilde{\boldsymbol{T}}_1][\widetilde{\boldsymbol{T}}_2][\widetilde{\boldsymbol{T}}_3][\widetilde{\boldsymbol{T}}_4] = \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{bmatrix}. \tag{14}$$

将边界条件式 (13) 代入式 (12) 中可求得：

$$A_0^+ = \frac{A_h + \rho_0 c_0 C_h}{A_h - \rho_0 c_0 C_h} A_0^-, \tag{15}$$

由主管道和共振器锥形颈部交接面处声压连续和体积速度连续 [8], 联立式 (15) 可计算得到传递损失计算公式：

$$\mathrm{TL} = 20\log_{10}\left|1 + \frac{C_h \rho_0 c_0}{2A_h}\right|. \tag{16}$$

2 锥形管声学修正长度

2.1 分割段数选取分析

分割段数 N 越大，分割所形成的阶梯状边界越接近锥形管的斜直线边界， δ_c 将越接近准确的声学修正长度。即 δ_c 随着分割段数的增加将收敛于一个恒定的长度。

为验证锥形管声学修正长度的收敛性，选取一系列不同锥度的锥形管进行计算。锥形管的几何参数如下列所示：$r_{11}=0.03$ m; $l_1=0.1$ m; $r_{12}=0.04$ m ~ 0.10 m, 其间隔为 0.01 m 。锥形管的锥度可采用式 $\theta=\arctan((r_{12}-r_{11})/l)$ 进行计算。联立式 (8) 和式 (11) 可计算得到不同锥度锥形管的修正长度，修正长度随分割段数的变化曲线如图 6 所示。

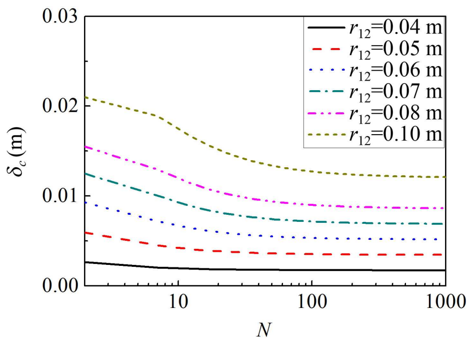


图 6 锥形管的声学修正长度计算结果

如图 6 所示，随着分割段数的增加，不同锥度的锥形管的声学修正长度都收敛为恒定值。同时，随着锥度的增加，声学修正长度的收敛速度逐渐降低。从图 6 可以得知，为了获得准确的声学修正长度，需要将锥形管分割足够的段数。而且锥形管锥度越大，所需分割的段数越多。为了找出其中的关系，先分析单片分割结构。单片分割结构示意图如图 7 所示。

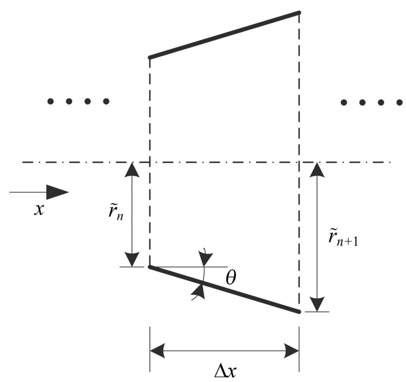


图 7 单片分割结构示意图

从图 7 可以看出，锥管的锥角 θ 越大，在一定轴向长度 Δx 情况下，进出口半径差 $(\widetilde{r}_{n+1} - \widetilde{r}_n)$ 越

大。然而从图 6 可知，锥形管的锥角越大，锥形管需要分割更多的段数，即声学修正长度的准确程度与进出口半径差有关。为获取准确的声学修正长度，进出口半径差应该在合理范围内，故：

$$\widetilde{r}_{n+1}-\widetilde{r}_{n}=\Delta x\cdot\tan\theta\leqslant\phi, \tag{17}$$

其中 $\widetilde{r}_{n+1}$ 是单片分割结构的出口半径， $\widetilde{r}_{n}$ 是入口半径； $\Delta x=l/N$, N 是锥形管分割的段数； ϕ 是进出口半径差的范围限值。

从图 6 可知最小锥度情况下 ($r_{12}=0.04$ m), 声学修正长度收敛速度最快，最容易判定收敛到恒定值时所分割的段数，故可选择最小锥度情况时的收敛曲线来估计 ϕ 的值。图 6 中最小锥度情况下，当分割段数超过 200 时声学修正长度基本收敛为恒定值。可认为此种情况下 $N=200$ 即可获得准确的声学修正长度，此时 ϕ 的计算值是 5×10^{-5} m 。因而对于不同锥形管，为获得收敛的声学修正长度，分割段数 N 的取值范围为：

$$N\geqslant\frac{r_{12}-r_{11}}{5\times10^{-5}}. \tag{18}$$

从式 (18) 可以看出，随着锥形管的锥角越大 (即 $r_{12}-r_{11}$ 的差值越大)，分割断数 N 的取值下限也越来越大，刚好合乎图 6 中声学修正长度的收敛趋势，从而保证各种锥角情况下的声学修正长度收敛精度。

2.2 锥形管声学修正长度计算公式

为了方便不同锥形管声学修正长度的计算，采用近似拟合公式法 (AFM) 获取声学修正长度的计算公式。从图 7 可以得出单片分割结构的几何参数满足式 (19):

$$\frac{\widetilde{r}_n}{\widetilde{r}_{n+1}}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Delta x}{\widetilde{r}_n}\right)\tan\theta}. \tag{19}$$

由于 $\Delta x\ll\widetilde{r}_n$, $\widetilde{r}_n$ 微小变化对 $\Delta x/\widetilde{r}_n$ 的值的影响基本可以忽略，故 $\widetilde{r}_n$ 的值可近似取 $(r_{11}+r_{12})/2$ 。因此，

$$\frac{\widetilde{r}_n}{\widetilde{r}_{n+1}}\approx\frac{1}{1+\dfrac{2(r_{12}-r_{11})}{N(r_{11}+r_{12})}}. \tag{20}$$

联立式 (20) 、式 (11) 、式 (9) 可得：

$$\frac{\delta_n}{\widetilde{r}_n}=\alpha(N,r_{11,12}). \tag{21}$$

联立式 (8) 、式 (18) 、式 (21) 可得锥形管声学修正长度计算公式：

$$\delta_c=[(1+K_1K_2)r_{11}+K_1K_3r_{12}]\,\alpha(N,r_{11},r_{12}), \tag{22}$$

其中：

$$\begin{aligned}K_1&=\left[\frac{N(r_{11}+r_{12})}{(N+2)r_{12}+(N-2)r_{11}}\right]^2,\\ K_2&=\frac{(N-2)(N+1)}{2N},\\ K_3&=\frac{(N-2)(N-1)}{2N}.\end{aligned} \tag{23}$$

从式 (22) 式可以看出，锥形管的声学修正长度只与锥形管的进出口半径以及所分割的段数有关系。为了验证近似法计算声学修正长度的准确性，将分割法 (SM) 的计算结果与近似法 (AFM) 的结果进行对比，如图 8 所示。

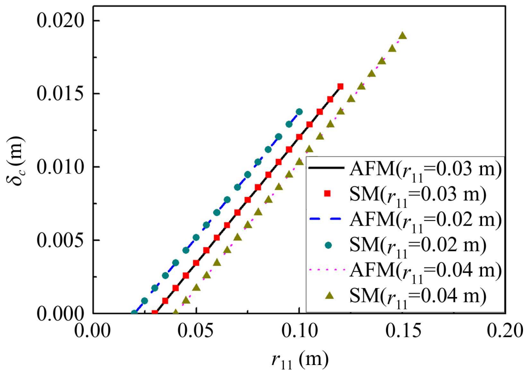


图 8　声学修正长度计算结果对比

(SM: 分割法；　AFM: 近似法)

从图 8 可以看出近似法的声学修正长度计算结果与分割法吻合良好。因而可以直接采用式 (18) 和式 (21) 对锥形管修正长度进行计算。

3 传递损失计算结果分析与验证

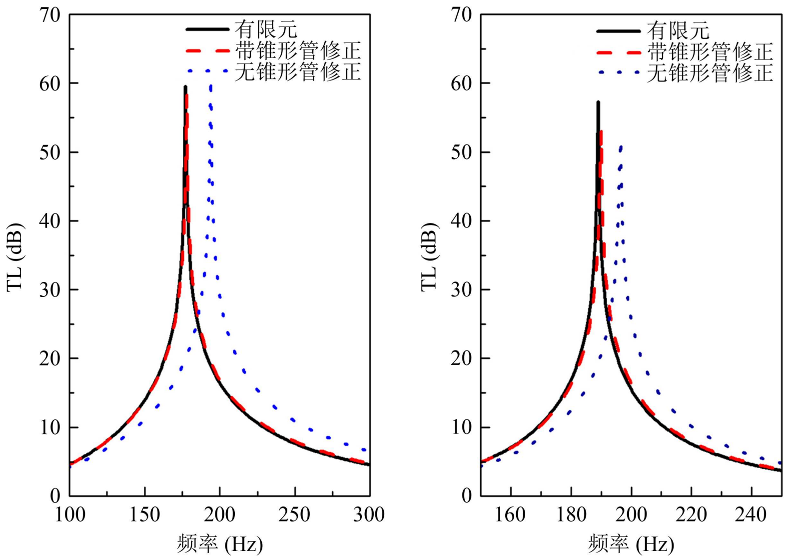
为了验证锥形管进行声学长度修正后的传递损失计算结果精度，现选取两组共振器结构几何参数，分别采用本文提出的锥形管声学长度修正方法、不带锥形管声学长度修正的方法以及三维有限元方法进行计算。第 1 组几何参数：$r_{11}=0.03$ m, $r_{12}=0.08$ m, $l_1=0.1$ m, $l_2=0.2$ m, $r_2=0.08$ m; 第 2 组几何参数：$r_{11}=0.02$ m, $r_{12}=0.04$ m, $r_2=0.06$ m, $l_1=0.08$ m, $l_2=0.15$ m 。

从图 9 可以看出，带锥形管声学长度修正的计算结果与 FEM 计算结果吻合良好，两组几何参数计算结果的共振频率误差不超过 2 Hz 。不带锥形管声学长度修正计算结果与 FEM 计算结果差距较大，图 9(a) 中偏差 17 Hz, 图 9(b) 中偏差 7.5 Hz 。

同时加工了样件，采用双负载方法[16] 对样件进行了传递损失实验测试，进一步验证计算结果。样件图及参数如表 1 所示。

表 1 实验参数表

样件实物图片	尺寸参数	环境参数
	$a = 0.0735$ m $r_{11} = 0.025$ m $r_{12} = 0.0788$ m $r_2 = 0.0788$ m $l_1 = 0.1110$ m $l_2 = 0.2037$ m	温度 : 25℃ 声速 : 346 m/s 密度 : 1.16 kg/m^3



(a) 第 1 组参数 (b) 第 2 组参数

图 9 不同计算方法的结果比较

从图 10 可以看出，带锥形管声学长度修正的计算方法与有限元结果以及实验结果吻合良好，共振频率偏差均在 2 Hz 以内；而不带锥形管声学修正的计算方法结果偏差较大，共振频率偏差为 16.5 Hz 。因而，锥形管声学长度修正提高了锥形颈部共振器传递损失一维计算精度。

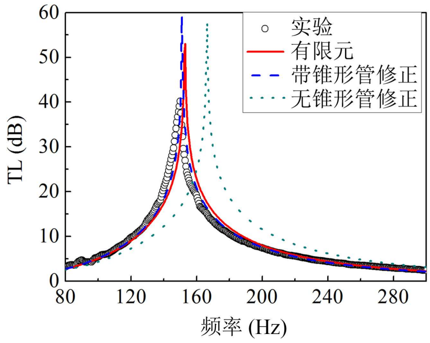


图 10 实验结果与仿真结果对比图

4 结论

本文建立了带锥形颈部赫姆霍兹共振器的一维修正计算模型，对该共振器的传递损失进行预测，预测结果与三维数值计算以及实验测试结果进行了对比。主要结论如下：

(1) 采用分割法计算分析了分割段数对不同锥度的锥形管声学修正长度精度的影响规律，并推导出了分割段数的选取范围。并在此基础上建立了锥形管声学修正长度计算公式，计算结果与分割法计算结果吻合良好。

(2) 利用声学修正长度近似计算公式，计算锥形颈部共振器的传递损失。与有限元结果以及实验结果对比表明，采用声学修正结果明显优于不修正的计算结果。表明本文提出的锥形管修正计算方法提高了一维方法计算精度，并为锥形颈部共振器的性能研究提供了简便方法。

参 考 文 献

1 Chen K T, Chen Y H, Lin K Y, Weng C C. The improvement on the transmission loss of a duct by adding Helmholtz resonators. *Applied Acoustics*, 1998; **54**: 71—82

2 Dickey N S, Selamet A. Helmholtz resonators: one-dimensional limit for small cavity length-to-diameter ratios.

Journal of Sound and Vibration, 1996; **195**: 512—517

3 Selamet A, Lee I J. Helmholtz resonator with extended neck. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2003; **113**: 1975—1985

4 Griffin S, Lane S A, Huybrechts S. Coupled Helmhotz resonators for acoustic attenuation, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2001; **123**: 11—17

5 Xu M B, Selamet A, Kim H. Dual Helmholtz resonator. *Applied Acoustics*, 2010; **71**: 822—829

6 Wang Xu, Cheuk-Ming Mak. Wave propagation in a duct with a periodic Helmholtz resonators array. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2012; **131**: 1172—1182

7 Tang S K. On Helmholtz resonators with tapered necks. *Journal of Sound and Vibration*, 2005; **279**: 1085—1096

8 Munjal M L. Acoustics of ducts and mufflers with application to exhaust and ventilation system design. New York, 1987: 42—85

9 Chanaud R C. Effects of geometry on the resonance frequency of Helmholtz resonators. *Journal of Sound and Vibration*, 1994; **178**: 337—348

10 Selamet A, Ji Z L. Circular asymmetric Helmholtz resonators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2000; **107**: 2360—2369

11 Tsuji T, Tsuchiya, Kagawa Y. Finite element and boundary element modeling for the acoustic wave transmission in mean flow medium. *Journal of Sound and Vibration*, 2002; **255**: 849—866

12 Mehdizadeh O Z, Paraschivoiu M. A three-dimensional finite element approach for predicting the transmission loss in mufflers and silencers with no mean flow. *Applied Acoustics*, 2005; **66**: 902—918

13 Eriksson L J. Higher order mode effects in circular ducts and expansion chamber. *Journal of the Acoustical Society of Americal*, 1980; **68**: 545—550

14 Kang Zhongxu, Ji Zhenlin. Acoustic length correction of duct extension into a cylindrical chamber. *Journal of Sound and Vibration*, 2008; **310**: 782—791

15 康钟绪，郑四发，连小珉，刘海涛．膨胀腔消声器声学仿真的一维修正方法．声学学报， 2011; **36**(6): 652—657

16 Tao Z, Seybert A F. A review of current techniques for measuring muffler transmission loss. SAE Noise and Vibration Conf., 2003

17 Alfredson R J. The propagation of sound in a circular duct of continuously varying cross-section area. *Journal of Sound and Vibration*, 1972; **23**(4): 433—442

18 Utsumi M. An analytical method for expansion chambers with continuously varying cross-sectional area. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2004; **126**: 173—183