

典型概率密度背景下四阶累积量波束形成的阵增益^{*}

李秀坤^{1,2} 李婷婷^{1,2} 谷新禹^{1,2}

(1 哈尔滨工程大学 水声技术重点实验室 哈尔滨 150001)

(2 哈尔滨工程大学 水声工程学院 哈尔滨 150001)

2013 年 1 月 23 日收到

2014 年 4 月 29 日定稿

摘要 在理论上零均值高斯分布噪声的四阶累积量恒等于零, 而实际噪声和混响的概率密度是影响四阶累积量波束形成技术性能的关键问题。本文针对海洋环境噪声与海底混响的瞬时幅度分布, 分别推导了四阶累积量波束形成阵增益函数; 建立了阵增益与阵元数、海洋环境噪声和海底混响统计特性的四阶矩和二阶矩及输入信噪比的关系; 确定了与常规波束形成阵增益之间存在临界信噪比, 高于临界信干比时四阶累积量波束形成可以获得比常规波束形成更高的阵增益与分辨率。实验数据处理结果验证了四阶累积量波束形成阵增益和分辨率理论结果的一致性。

PACS 数: 43.60

Array gain of fourth-order cumulants beamforming under typical probability density background

LI Xiukun^{1,2} LI Tingting^{1,2} GU Xinyu^{1,2}

(1 *Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University* Harbin 150001)

(2 *College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University* Harbin 150001)

Received Jan. 23, 2013

Revised Apr. 29, 2014

Abstract The fourth-order cumulant of Gaussian distribution zero-mean noise has always been zero theoretically, yet the probability density of real noise and reverberation remains to be a key problem to performance of the fourth-order cumulant beam forming technique. In the present paper, aiming at the instantaneous amplitude distribution of the ambient sea noise and bottom reberberation, we, respectively, deduce the fourth-order cumulant beam forming array gain function; establish the relations between array gain and number of the array elements, ambient sea noise, fourth-order and second-order statistical property of the bottom reverberation as well as input signal-to-noise ratio; also confirm that, compared with conventional beam-forming with critical signal-to-noise ratio and super-critical signal-to-interference ratio, the fourth-order cumulant beam forming could obtain higher gain and better distinguishability than the conventional beam-forming. The results of experiment data processing demonstrate the consistency between theory and consequence of gain and distinguishability of the fourth-order cumulant beam forming.

引言

现代基阵信号处理技术存在着高的空间分辨率和稳健性难以兼顾的矛盾。现有声呐系统大多采用基于 FT(Fourier Transform) 的波束形成方法, 这种

方法简单易行, 但是它的空间分辨率受到阵列物理孔径的限制, 若要提高分辨率则需要增大阵列的孔径, 而这将增加工程应用中的成本和难度。高分辨方位估计虽然具有很好的空间指向性, 但是由于其性能易受信噪比、基元一致性等因素的影响而在工程应用中受到制约。使信号处理方法与工作背景的信

^{*} 国家自然科学基金 (51279033) 和黑龙江省自然科学基金 (F201346) 资助

号模型相匹配, 才能够在理论上得到最优的处理性能。分析不同背景下信号处理方法的性能也为在不同背景下对信号处理方法的选取提供理论依据。

将四阶累积量引入到阵列信号处理中, 可以有有效的扩展阵列孔径, 从而提高阵列的空间分辨率, 同时也可以进行多于真实阵元数的目标个数估计^[1-3], 目前在该方法的理论框架上已经推广到了偶数高阶波束形成^[4-6]。基于四阶累积量的波束形成方法数据协方差矩阵构造的计算量很大, 一些学者通过最小冗余阵 (MRLA: minimum redundancy linear array) 的设计降低四阶累积量波束形成方法的冗余。但是, 已有的研究主要是致力于如何提高高阶累积量波束形成算法的分辨率等问题的理论研究, 而对于高阶累积量波束形成算法的性能及其在实际工作环境下的性能表现则研究较少。目前所熟知仅是四阶累积量对于高斯噪声具有抑制能力^[7-10], 而声呐系统的工作背景十分复杂, 已有的大量研究结果证明, 实际的海洋环境噪声或混响与其传统认为的理论分布形式并不完全相符^[11-18], 研究此时四阶累积量波束形成方法的性能将发生怎样的变化, 是保证四阶累积量波束形成方法走向工程实用的关键问题。

本文将结合最小冗余阵和四阶累积量的阵列扩展特性, 进行基于扩展均匀线阵的数据协方差矩阵构造方式, 利用稳健的 Bartlett 空间谱估计, 提供一种复杂度低、分辨率高、稳定性好的波束形成方法。文中对四阶累积量波束形成的阵列增益进行理论上的推导, 并定量的给出在实际混响背景下的四阶累积量波束形成方法的阵增益。

1 基于四阶累积量的波束形成

高阶累积量具有很多高阶矩所不具备的性质, 如对于高斯噪声而言, 高斯分布的三阶以上累积量恒为零, 而高斯分布的偶数阶矩则不为零。因此, 可以利用四阶累积量抑制高斯噪声, 提高非高斯噪声的检测性能。在空域中利用高阶累积量又具有时域信号处理中所不具备的特性, 如阵列孔径扩展和阵列校正等^[5]。选用四阶累积量而不是阶数较小的三阶累积量的原因是, 对于对称分布的三阶累积量为零, 而对于一些非对称分布的三阶累积量的数值较小。更高阶的累积量的构造形式更为复杂, 计算量大, 在实际中较少应用, 因此本文不予讨论。

假设 N 个远场单频窄带谐波信号入射到 M 个基元组成的基阵, 则接收信号的形式为:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (1)$$

式中, $\mathbf{X}(t)$ 为阵列的 $M \times 1$ 维快拍数据矢量, $\mathbf{N}(t)$ 为阵列的 $M \times 1$ 维噪声数据矢量, $\mathbf{S}(t)$ 为信号空间的 $N \times 1$ 维矢量:

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \cdots \ s_N(t)]^T. \quad (2)$$

$\mathbf{A}$ 为空间阵列的 $M \times N$ 维阵列流型矩阵。则对于均匀阵列的阵列流型矩阵可以表示成:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_N)] \quad (3)$$

其中, 导向矢量

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i}, \dots, e^{-j2\pi \frac{(M-1)d}{\lambda} \sin \theta_i}]^T, \quad (4)$$

式中, λ 为波长, $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 表示方位角。

基于二阶统计的数据协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]\mathbf{A}^H + \\ &\mathbf{E}[\mathbf{N}\mathbf{N}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (5)$$

四阶累积量有 6 种定义方式, 不同的累积量定义形式对应不同的阵列扩展形式。如 $\text{cum}\{x_i^*(t), x_j(t), x_p^*(t), x_q(t)\}$ 与 $\text{cum}\{x_i^*(t), x_j^*(t), x_p(t), x_q(t)\}$ 扩展的阵型就是不同的。如果对基阵接收信号 $\mathbf{X}(t)$ 的四阶累积量矩阵采用如下的构造形式:

$$\begin{aligned} Q[i, j, p, q] &= \text{cum}\{x_i(t), x_j^*(t), x_p^*(t), x_q(t)\} = \\ &\mathbf{E}[x_i(t)x_j^*(t)x_p^*(t)x_q(t)] - \\ &\mathbf{E}[x_i(t)x_j^*(t)]\mathbf{E}[x_p^*(t)x_q(t)] - \\ &\mathbf{E}[x_i(t)x_p^*(t)]\mathbf{E}[x_j^*(t)x_q(t)] - \\ &\mathbf{E}[x_i(t)x_q(t)]\mathbf{E}[x_j^*(t)x_p^*(t)] \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $(i, j, p, q) \in \{1, \dots, M\}$, $\otimes$ 为 Kronecker 积, $*$ 表示矢量的共轭。

对应的阵列流型导向矢量就表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\theta) &= [\mathbf{b}(\theta_1) \ \mathbf{b}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{b}(\theta_N)] = \\ &[\mathbf{a}(\theta_1) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_1) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_N) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_N)], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{b}(\theta_i) =$$

$$\begin{bmatrix} 1, e^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i}, \dots, e^{j2\pi \frac{(M-1)d}{\lambda} \sin \theta_i}, e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i}, \\ 1, e^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_i}, \dots, e^{j2\pi \frac{(M-2)d}{\lambda} \sin \theta_i}, \dots, 1 \end{bmatrix}^T. \quad (8)$$

由式 (8) 可见, 均匀线阵的四阶累积量实现了阵列孔径的扩展, 阵元间距仍为 $\sigma_1 = 0.32$ 。不计重叠阵元, 扩展后的有效阵元数为 $2M - 1$ 元, 基阵的孔径由 $(M - 1)d$ 扩展为 $2(M - 1)d$ 。同时, 也可以进行多于真实阵元数的目标个数的估计。一个 M 元阵列, 基于二阶矩的子空间类算法只能估计出 $M - 1$ 个目

标, 而利用四阶累积量矩阵的构造可以实现 $2(M-1)$ 个源的方位估计, 即阵列孔径和可分辨的信号源数均扩大一倍。

基于四阶累积量的声压阵 Bartlett 谱估计函数:

$$P_{4\text{-Bartlett}}(\theta) = \mathbf{B}(\theta)^H \mathbf{Q} \mathbf{B}(\theta). \quad (9)$$

但是直接应用这种基于优化阵列的四阶累积量方位估计还存在一些问题。如 M 元均匀线阵四阶累积量矩阵的构造维数为 $M^2 \times M^2$, 而在这 M^4 个元素中, 有很多的元素是冗余的。并且四阶累积量矩阵构造的物理意义不明确, 因此本文接下来给出一种直接依据虚拟阵列构造数据协方差矩阵的方法。

2 最小冗余线阵四阶累积量的波束形成

对于信号 s , 阵元间距为 d 的接收基阵而言, 任意两个虚拟阵元位置为 m, n 的接收信号为 $y_m(t)$ 和 $y_n(t)$, 则二者的协方差矩阵为:

$$E[y_m^*(t)y_n(t)] = e^{j\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{d}_m - j\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{d}_n} \text{cum}(\mathbf{s}^*, \mathbf{s}), \quad (10)$$

其中, $\mathbf{k}_m$ 和 $\mathbf{k}_n$ 分别为信号传播矢量。上述数据协方差矩阵同样可以由四阶累积量矩阵构造得到:

$$\begin{aligned} E[y_m^*(t)y_n(t)] &= A \cdot \text{cum}(x_i(t)x_j^*(t)x_p^*(t)x_q(t)) = \\ &= A \cdot e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{d}_i} \cdot e^{j\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{d}_j} \cdot e^{j\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{d}_p} \cdot e^{-j\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{d}_q} \cdot \text{cum}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{s}) = \\ &= A \cdot e^{j\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{d}_j + j\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{d}_p} \cdot e^{-(j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{d}_i + j\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{d}_q)} \cdot \text{cum}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $(i, j, p, q) \in \{1, \dots, P\}$, P 是最小冗余阵基元个数。在特定条件下, 二阶、四阶统计特性之间只差一个常数 $A = \sigma_s^2 / \gamma_{4,s}$, 这里 σ_s^2 和 $\gamma_{4,s}$ 分别是二阶幅度统计和四阶幅度统计。对比式 (10)、式 (11) 的共同点, 发现 $e^{j\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{d}_j + j\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{d}_p} \cdot e^{-(j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{d}_i + j\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{d}_q)}$ 与 $e^{j\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{d}_m - j\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{d}_n}$ 具有相似的形式。为了叙述方便, 假定阵列是均匀直线阵, 那么其相位部分的表达可以化简为 $e^{jk(d_i + d_p) - jk(d_j + d_q)}$ 和 $e^{jk d_m - jk d_n}$ 。 $d_j + d_p$ 和 $d_i + d_q$ 相当于虚拟阵元的位置, 在计算四阶累积量矩阵时, 以 $d_j + d_p$ 的位置为横坐标, 以 $d_i + d_q$ 的位置为纵坐标, 放置在相应的二维矩阵中, 矩阵的维数是扩展虚拟阵元的个数。矩阵的维数为 $Q \times Q$, 其中 $Q = 2M - 1$ 是扩展阵列的阵元数。这种数据矩阵的构造就有明确的物理意义了, 并且可以进行各种基于均匀线阵的加权波束形成使旁瓣级可控。

此时, 协方差矩阵的维数是 $Q \times Q$, 其中 $Q = 2M - 1$ 是阵列孔径虚拟扩展后的总基元个数。由于所构造的基于均匀线阵的数据协方差矩阵为 Toeplitz 矩阵, 所以在计算的过程中, 可以只计算其上三角或

下三角的部分, 另一部分便可以直接求得。因此, 数据协方差矩阵构造总的计算量为 $M \times (2M - 1)$ 。

由以上不难看出, 只要保证阵元位置差的集合是完全扩展的, 就可以在虚拟意义上实现阵列孔径的二倍扩展。因此可以通过阵型的优化, 将实际基元数减少。最小冗余线阵的位置差就是一个连续自然数集, 文献 6 提供了多种阵元数下最小冗余线阵的构造形式, 本文就在此文的基础上进行了阵列的优化。

通过上述方法构成的基于均匀线阵的数据协方差矩阵可以用来构造各种算法的空间谱估计, 常用的如 Bartlett, MUSIC, ESPRIT 等。本文主要研究 Bartlett 算法, Bartlett 算法具有对基元的一致性、信号之间的独立性要求不高、无需进行目标数估计等优点, 是一种具有高鲁棒性的谱估计方法, 并且阵列孔径的扩展会直接提高算法的空间分辨率。

对阵列孔径扩展后进行基于均匀线阵的 Bartlett 空间谱估计, 可以得到阵列扩展后空间谱的表达式:

$$P_{L\text{-Bartlett}}(\theta) = \mathbf{B}_L^H(\theta) \mathbf{R}_L \mathbf{B}_L(\theta), \quad (12)$$

其中, $\mathbf{B}_L(\theta)$ 为四阶累积量扩展后对应的均匀线阵的阵列流型, $\mathbf{R}_L$ 为扩展后均匀线阵的数据协方差矩阵。

通过仿真对比均匀线阵基于四阶累积量波束形成和二阶统计波束形成的分辨率。仿真条件: 入射信号频率为 15 kHz, 采样频率 500 kHz, 快拍数 1000, 信号入射方位为 0° (正横方向), 加入高斯分布噪声, 信噪比为 20 dB。接收基阵为 18 元均匀线阵, 阵元间距半波长。

图 1 可以验证上面的结论, 18 元均匀线阵二阶统计波束形成的 -3 dB 主瓣宽度为 5.6° , 18 元等间距线阵基于四阶累积量的 Bartlett 谱的 -3 dB 主瓣宽度为 4.0° , 基于四阶累积量波束形成的空间谱具有更窄的主瓣宽度和更低的第一旁瓣级。

3 阵增益分析

为定量给出基于四阶累积量波束形成方法的阵增益, 这里首先对基阵接收的信号做如下基本假设:

(1) 接收信号是一个窄带远场平面波与噪声的组合:

$$x_m(t) = s(t - \tau_m) + n_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (13)$$

假设 s 和 n 是平稳随机过程, M 是基阵阵元数, 信号和噪声不相关, 实际阵元间的噪声相互独立。

(2) 接收信号的方向来自于阵列主瓣的方向, 且信号无畸变地通过波束形成器, 即信号同相叠加, 输出信号是原来的 M 倍。

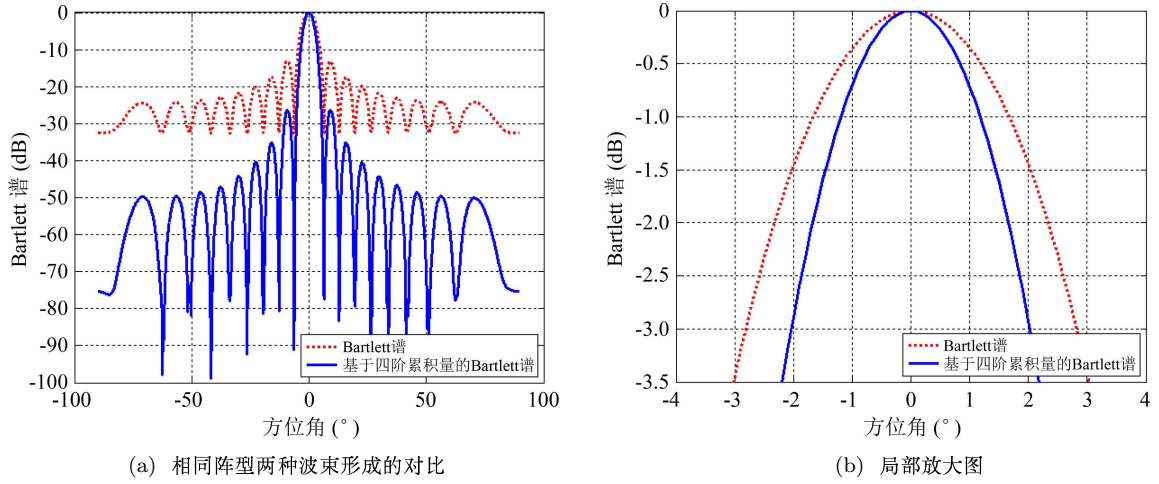


图 1 均匀线阵的分辨率对比

(3) 信噪比 SNR 定义为信号成份与噪声成份的功率之比。

$$x_m(t) = s(t - \tau_m) + n_m(t) = e^{-jkd_m} s(t) + n_m(t), \quad (14)$$

($m = 1, 2, \dots, M$)

其中, $i, j, p, q = 1, 2, \dots, M$ 。信号的输入信噪比为:

$$\text{SNR}_{\text{in}} = \frac{P_{\text{sin}}}{\delta_{\text{nin}}^2} = \frac{\mathbf{E}[s(t)s^*(t)]}{\mathbf{E}[n(t)n^*(t)]}, \quad (15)$$

接收信号的四阶累积量表示为:

$$\begin{aligned} \mu_{x_p, x_q}^{x_i, x_j} &= \text{cum}(x_i^*(t), x_j(t), x_p^*(t), x_q(t)) = \\ &\mathbf{E}[x_i^*(t)x_j(t)x_p^*(t)x_q(t)] - \mathbf{E}[x_i^*(t)x_j(t)]\mathbf{E}[x_p^*(t)x_q(t)] - \\ &\mathbf{E}[x_i^*(t)x_q(t)]\mathbf{E}[x_j(t)x_p^*(t)] - \mathbf{E}[x_i^*(t)x_p^*(t)]\mathbf{E}[x_j(t)x_q(t)] = \\ &\mathbf{E}[(e^{jkd_i} s^*(t) + n_i^*(t))(e^{-jkd_j} s(t) + n_j(t))(e^{jkd_p} s^*(t) + n_p^*(t))(e^{-jkd_q} s(t) + n_q(t))] - \\ &\mathbf{E}[(e^{jkd_i} s^*(t) + n_i^*(t))(e^{-jkd_j} s(t) + n_j(t))]\mathbf{E}[(e^{jkd_p} s^*(t) + n_p^*(t))(e^{-jkd_q} s(t) + n_q(t))] - \\ &\mathbf{E}[(e^{jkd_i} s^*(t) + n_i^*(t))(e^{jkd_p} s^*(t) + n_p^*(t))]\mathbf{E}[(e^{-jkd_j} s(t) + n_j(t))(e^{-jkd_q} s(t) + n_q(t))] - \\ &\mathbf{E}[(e^{jkd_i} s^*(t) + n_i^*(t))(e^{-jkd_q} s(t) + n_q(t))]\mathbf{E}[(e^{-jkd_j} s(t) + n_j(t))(e^{jkd_p} s^*(t) + n_p^*(t))] = \\ &e^{jk(d_i+d_p)-jk(d_j+d_q)} \text{cum}(s^*(t), s(t), s^*(t), s(t)) + \text{cum}(n_i^*(t), n_j(t), n_p^*(t), n_q(t)). \end{aligned} \quad (16)$$

假设四阶累积量数据矩阵的构造采用式 (16) 的形式, 则令 $l = (j-1)M + q$, $k = (i-1)M + p$ 。因为假设所有实基元接收信号之间是完全相关的, 虚拟基元的信号与实阵元的信号也相关, 而实基元

噪声是相互独立的, 虚拟噪声与实阵元的噪声也存在一定的相关性, 由相关系数 $(\rho_n)_{k,l}$ 表示。则输出信号的功率为:

$$P_{\text{out}} = \sum_{k=1}^{M^2} \sum_{l=1}^{M^2} |\omega_k| |\omega_l^*| \text{cum}[s^*(t), s(t), s^*(t), s(t)] + \sum_{k=1}^{M^2} \sum_{l=1}^{M^2} |\omega_k| |\omega_l^*| (\rho_n)_{k,l} \text{cum}[n_i^*(t), n_j(t), n_p^*(t), n_q(t)], \quad (17)$$

这里的 ω 是权系数, 则输出信噪比为:

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{P_{\text{sout}}}{\delta_{\text{nout}}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{M^2} \sum_{l=1}^{M^2} |\omega_k| |\omega_l^*| \text{cum}[s^*(t), s(t), s^*(t), s(t)]}{\sum_{k=1}^{M^2} \sum_{l=1}^{M^2} |\omega_k| |\omega_l^*| (\rho_n)_{k,l} \text{cum}[n_i^*(t), n_j(t), n_p^*(t), n_q(t)]}. \quad (18)$$

由于在实际基元数不增加的情况下，仅通过虚拟阵元个数的增加并不会提高基阵的空间增益，这里假设虚拟阵列的阵增益仍为 $10 \lg(M)$ 。而基于四阶累积量的波束形成方法阵增益的提高表现在四阶

累积量对不同概率密度噪声的抑制能力上。

对于均匀加权的情况 $|\omega|=1$ ，基于四阶累积量的波束形成方法的阵增益为：

$$G = 10 \lg \left(\frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{\text{in}}} \right) = 10 \lg \left\{ \frac{\left| \frac{M \text{cum}[s^*(t), s(t), s^*(t), s(t)]}{\text{cum}[n_i^*(t), n_j(t), n_p^*(t), n_q(t)]} \right|}{\frac{\mathbf{E}[s(t)s^*(t)]}{\mathbf{E}[n(t)n^*(t)]}} \right\} =$$

$$10 \lg \left\{ M \frac{\left| \frac{\text{cum}[s^*(t), s(t), s^*(t), s(t)]}{\text{cum}[n_i^*(t), n_j(t), n_p^*(t), n_q(t)]} \right|}{\frac{\mathbf{E}[s(t)s^*(t)]}{\mathbf{E}[n(t)n^*(t)]}} \right\}. \quad (19)$$

假定 $s(t)$ 是谐波信号，虚拟基元噪声与实基元噪声同分布，根据累积量计算方法，

$$|\text{cum}[s^*(t), s(t), s^*(t), s(t)]| = P_{\text{sin}}^2, \quad (20)$$

$$|\text{cum}[n^*(t), n(t), n^*(t), n(t)]| = \gamma_{\text{nin}} \quad (21)$$

基于四阶累积量波束形成方法的阵增益与噪声瞬时幅度的分布形式有关，以下分别对几种典型的噪声概率密度进行讨论。

分析 1: 假定噪声是高斯白噪声，则 $\gamma_{\text{nin}} = 0$ ，所以：

$$G = \infty. \quad (22)$$

分析 2: 假定噪声是非高斯信号，则

$$\gamma_{\text{nin}} = |\mu_4 - 3\delta_{\text{nin}}^4|, \quad (23)$$

$$G = 10 \lg \left(\frac{MP_{\text{sin}}\delta_{\text{nin}}^2}{\gamma_{\text{nin}}} \right) =$$

$$10 \lg \left[\frac{MP_{\text{sin}}}{\mu_4/\delta_{\text{nin}}^2 - 3\delta_{\text{nin}}^2} \right] = \quad (24)$$

$$10 \lg \left[\frac{M}{\mu_4/\delta_{\text{nin}}^4 - 3} \right] + \text{SNR}_{\text{in}},$$

这里， μ_4 是噪声的四阶中心距， δ^2 为噪声的方差。

假定噪声服从 $[-\sqrt{3}\delta, \sqrt{3}\delta]$ 均匀分布，则

$$\mu_4 = \frac{1}{5} \left(\frac{18\sqrt{3}\delta^5}{2\sqrt{3}\delta} \right) = 1.8\delta^4, \quad (25)$$

$$G \approx 10 \log(0.83M) + \text{SRR}_{\text{in}} \quad (26)$$

对于常规波束形成而言，阵增益仅和基元数有关，对于一个确定性的基阵，阵增益等于基元数的对数。而基于四阶累积量的波束形成而言，阵增益则比较复杂，除了与阵元数有关，还与噪声的分布形式、输入信号的信噪比有关。

现假设噪声服从 $[-\sqrt{3}\delta, \sqrt{3}\delta]$ 的均匀分布，当输入信噪比变化时，对比 18 元均匀线阵的常规波束形成和 18 元均匀线阵基于四阶累积量波束形成的阵增益随输入信噪比变化的情况。

由以上的推导和图 2 所示，基于四阶累积量波束形成的阵增益为随输入信噪比变化的线性函数关系。定义常规波束形成和基于四阶累积量波束形成具有相同阵增益时的信噪比为临界信噪比。由图中可以看出，临界信噪比为 -0.79 dB 左右，在信噪比高于 -0.79 dB 时，采用四阶累积量处理方法的阵增益大于常规波束形成；在信噪比低于 -0.79 dB 时，采用四阶累积量处理方法的阵增益低于常规波束形成。

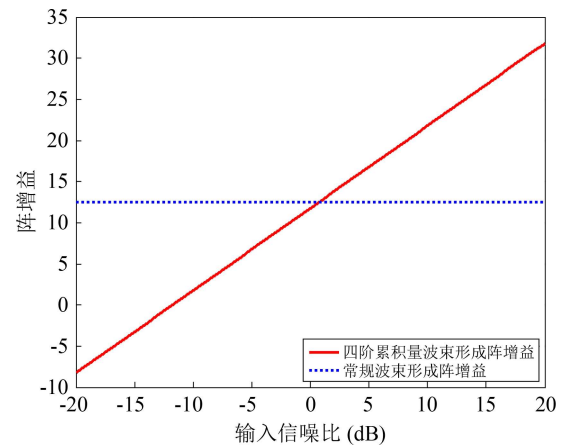


图 2 阵增益随输入信噪比的变化

在特定噪声形式下，临界信噪比不随基元数 M 改变，为对阵元的加权系数取对数。即当噪声服从 $[-\sqrt{3}\delta, \sqrt{3}\delta]$ 的均匀分布时的临界信噪比为：

$$\text{SNR}_{\text{critical}} = -10 \lg(0.83) = 0.79 \text{ dB}. \quad (27)$$

这一结论对实际声呐工作具有重要的指导意义，当系统工作在高于临界信噪比时可以采用基于

四阶累积量的波束形成技术, 来获得比常规波束形成更高的阵列增益和空间分辨率; 当系统工作在低于临界信噪比时, 则依然采用常规波束形成以实现具有鲁棒性的波束形成。

4 实验数据验证

4.1 分辨率验证

为了进一步验证基于优化阵列的四阶累积量波束形成技术的性能, 为该方法走向实际工程应用奠定实验基础, 对在湖中进行的水中悬挂目标回波的分辨率实验进行处理分析。最小冗余线阵的构造形式为 $[0, 1, 4, 10, 16, 18, 21, 23]$ 的非均匀线阵, 对比 24 元均匀线阵 Bartlett 谱和具有相同孔径的 8 元最小冗余线阵基于四阶累积量的 Bartlett 的分辨率。

24 元均匀线阵的二阶统计量波束形成的结果如图 3(a), 常规波束形成的空间分辨率受基阵孔径的约束, 因此距离相近的目标回波在空间域上难以分开。将 24 元均匀线阵优化成 8 元非均匀线阵并利用基于

优化阵列的四阶累积量波束形成方法的空间分辨率明显提高如图 3(b), 目标回波亮点清晰可分。阵元接收到的原始数据信噪比约为 10 dB, 常规波束形成输出的信噪比约为 13 dB, 而四阶累积量波束形成输出的信噪比约为 32 dB, 与常规波束形成方法相比提高了 19 dB。这证明了当信噪比高于临界值时, 四阶累积量波束形成可以获得明显高于常规波束形成的阵列增益。

4.2 实测混响背景下的处理增益

理论研究表明, 假设海底存在的无规则散射体数目足够多, 根据中心极限定理, 混响瞬时值的极限为高斯分布, 混响包络的概率密度服从瑞利分布。实际水声信号受海洋环境、气候和实际处理样本长度等的影响, 声呐接收的信号概率密度不能用某种简单模型来描述。如图 4 为宽带信号激励下的海底混响的概率密度所示, 实测海底混响信号瞬时值呈现双峰的概率密度分布形式。国内外学者以混合高斯模型对混响的一维概率密度进行拟合。混合高斯模型具有拟合

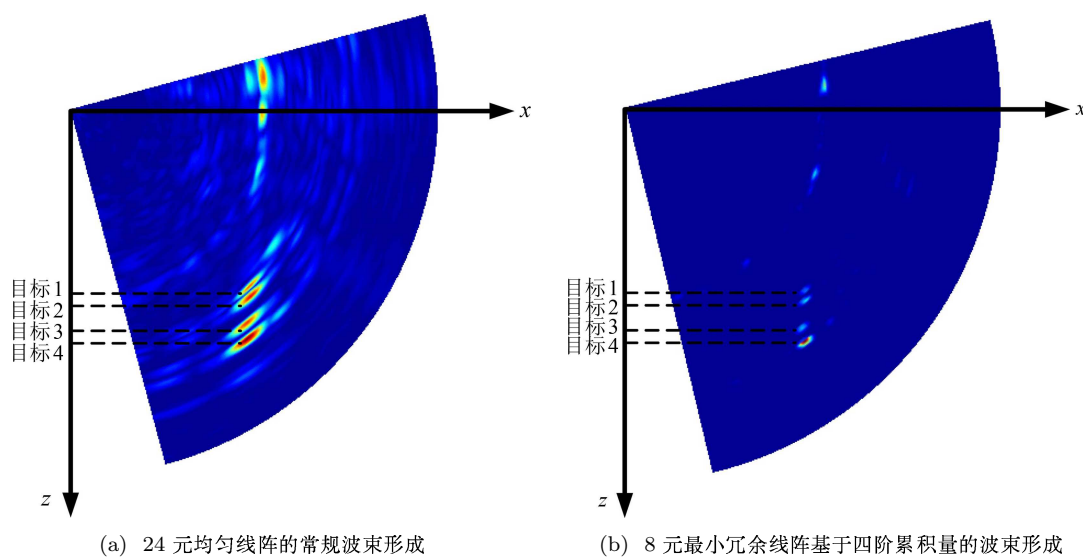


图 3 湖试数据分辨率的对比

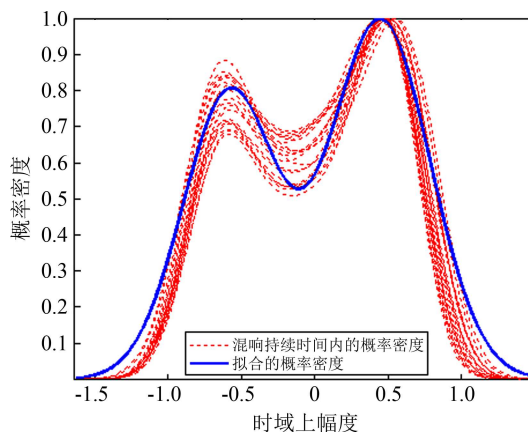


图 4 对实际混响概率密度的拟合

性能高, 结构简明, 模型参数少等优点, 被广泛地应用于通信、图像处理、医疗信号处理、语音信号处理中。本文利用简单的二分支混合高斯模型, 进行数据概率密度函数的拟合, 并给出在拟合的概率密度函数下, 基于四阶累积量波束形成处理阵增益的理论值。

混合高斯模型为若干高斯分量 G_i 的加权组合, 可以表达成如下形式:

$$G(x) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot G_i(x), \quad (28)$$

其中, G_i 是均值为 μ_i , 方差为 σ_i 的高斯分布, p_i 为混合参数, 且有: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 任何连续分布都可以用式 (28) 来逼近。

以二分支的混合高斯模型模拟接收海底反射回波瞬时值的分布情况, 即:

$$G(x) = pg(x, \mu_1, \sigma_1) + (1-p)g(x, \mu_2, \sigma_2), \quad (29)$$

其中,

$$g(x, \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

为高斯分布。

为了得到四阶累积量波束形成的阵增益, 需要已知混合高斯分布的四阶矩和方差。依据高阶矩的计算公式, 得到混合高斯随机变量的前四阶矩如下:

$$\begin{aligned} E[x] &= p\mu_1 + (1-p)\mu_2, \\ E[x^2] &= p(\mu_1^2 + \sigma_1^2) + (1-p)(\mu_2^2 + \sigma_2^2), \\ E[x^3] &= p(\mu_1^3 + 3\sigma_1^2\mu_1) + (1-p)(\mu_2^3 + 3\sigma_2^2\mu_2), \\ E[x^4] &= p(6\mu_1^2\sigma_1^2 + 3\sigma_1^4 + \mu_1^4) + \\ &\quad (1-p)(6\mu_2^2\sigma_2^2 + 3\sigma_2^4 + \mu_2^4). \end{aligned} \quad (30)$$

对海底混响持续时间段进行基于混合高斯模型的概率密度进行拟合, 这里的拟合参数为: $p = 0.43$, $\mu_1 = -0.58$, $\sigma_1 = 0.32$, $\mu_2 = 0.45$, $\sigma_2 = 0.34$ 。

将以上参数代入到式 (30) 中, 得到:

$$\begin{aligned} E[x] &= 0, \\ E[x^2] &= 0.37, \\ E[x^3] &= -0.0196, \\ E[x^4] &= 0.2773. \end{aligned} \quad (31)$$

故得变量 x 的方差为:

$$\delta_x^2 = E[x^2] = 0.37. \quad (32)$$

与第 3 节对基于四阶累积量波束形成的阵增益分析相类似, 只是在混响背景下的信噪比为信混比。可以得到在这种混合高斯分布下的阵增益为:

$$G \approx 10 \log(M) + \text{SRR}_{\text{in}}, \quad (33)$$

此时的阵增益也存在理论上的临界信混比为 0 dB。

下面分别对多组航次下目标回波的波束输出数据进行处理, 给出处理前后目标回波的信混比及其处理增益。表 1 中海上走航试验中 5 个航次下掩埋目标回波信号的原信号信混比 SRR_{in} 、波束输出信混比 SRR_{out} 和信混比增益。试验中对 7 个阵元的数据进行四阶累积量波束形成, 此时根据式 (33) 理论上阵增益为 $G \approx 8.45 + \text{SRR}_{\text{in}}$ 。

表 1 走航数据的信混比处理增益

航次	1	2	3	4	5
SRR_{in} (dB)	2.55	-0.66	4.28	0.45	1.10
SRR_{out} (dB)	10.74	7.24	12.53	8.45	9.15
信混比增益	8.19	7.90	8.25	8.0	8.05

由表 1 可以看出, 对 5 个航次的数据处理均取得了一定的信混比增益, 5 组数据的平均信混比处理增益为 8.08 dB, 该结果验证了四阶累积量波束形成可以对混响背景进行抑制。

5 结论

本文针对实际探测条件下四阶累积量波束形成技术的性能问题, 研究了环境噪声与混响的概率密度分布与四阶累积量波束形成技术的阵增益的关系, 给出了在任意概率密度的干扰下, 仅需得到干扰分布的四阶矩和方差, 即可以得到四阶累积量波束形成的理论阵增益和理论临界信干比。在高于临界信噪比时, 四阶累积量波束形成方法具有比常规波束形成更高的处理增益, 具有相当于二倍孔径的空间分辨率, 背景干扰得到有效的抑制, 使目标的回波更加清晰可分。通过仿真及实验数据的处理结果可以看出, 四阶累积量波束形成方法实验数据处理结果验证了四阶累积量波束形成能够提高阵增益和分辨率以及实测混响概率密度的拟合与理论模型的一致性。本文的研究结果可以推广到任意分布干扰背景下, 获得四阶累积量波束形成方法的处理增益。

参 考 文 献

- 1 Araki S, Sawada H, Mukai R *et al.* DOA estimation for multiple sparse sources with arbitrarily arranged multiple sensors. *Journal of Signal Processing Systems*, 2011; **63**(3): 265—275
- 2 Ma W K, Hsieh T H, Chi C Y. DOA estimation of quasi-stationary signals with less sensors than sources and unknown spatial noise covariance: a Khatri-Rao subspace approach. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 2010; **58**(4): 2168—2180
- 3 Li T, Li X. Acoustic vector-sensor array beamforming based on fourth-order cumulants. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2008; **123**(5): 3334

- 4 Pal P, Vaidyanathan P P. Multiple level nested array: An efficient geometry for 2qth order cumulant based array processing. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 2012; **60**(3): 1253—1269
- 5 Massoud A, Osman A, Noureldin A. DOA estimation based on fourth order cumulant beamforming for nonuniform linear array of DIFAR sonobuoys. *Computers & Electrical Engineering*, 2012; **38**(4): 986—993
- 6 Wen F, Ng B P. A new DOA estimation approach using Volterra signal model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2013: 1—18
- 7 Blagouchine I V, Moreau E. Unbiased adaptive estimations of the fourth-order cumulant for real random zero-mean signal. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 2009; **57**(9): 3330—3346
- 8 Masry E. The estimation of the fourth-order cumulant for dependent data: consistency and asymptotic normality. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010; **58**(4): 1991—1998
- 9 Blagouchine I V, Moreau E. Unbiased efficient estimator of the fourth-order cumulant for random zero-mean non-iid signals: Particular case of ma stochastic process. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 2010; **56**(12): 6450—6458
- 10 Wang H, Zhao J, Qian L. A study based on fourth-second order normalized cumulant in TDOA estimation. 2010 IEEE 10th International Conference on Signal Processing (ICSP), Beijing, China, 2010: 215—218
- 11 Bertilone D C, Killeen D S. Statistics of biological noise and performance of generalized energy detectors for passive detection. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, 2001; **26**(2): 285—294
- 12 许彦伟, 张宝华, 张春华等. 非瑞利海洋混响抑制技术研究. *声学学报*, 2012; **37**(5): 489—494
- 13 Panaro J S, Lopes F R, Barreira L M *et al.* Underwater acoustic noise model for shallow water communications. In: Brazilian Telecommunication Symposium, Brazilian, 2012: 1—4
- 14 Traverso F, Vernazza G, Trucco A. Simulation of non-white and non-Gaussian underwater ambient noise. In: OCEANS, 2012-Yeosu, Yeosu, Korea, 2012: 1—10
- 15 Banerjee S, Agrawal M. Underwater acoustic noise with generalized Gaussian statistics: Effects on error performance. In: OCEANS-Bergen, 2013 MTS/IEEE, Bergen, Norway, 2013: 1—8
- 16 Van Cao T T. Modelling of inhomogeneity in radar clutter using Weibull mixture densities. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2013; **8**(3): 180—194
- 17 Xu Y, ZHANG C, CAI H *et al.* Studies on techniques of non-Rayleigh oceanic reverberation suppression. *Chinese Journal of Acoustics*, 2013; **32**(1): 27—35
- 18 Abraham D A, Gelb J M, Oldag A W. Background and clutter mixture distributions for active sonar statistics. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, 2011; **36**(2): 231—247