

有限长号筒中非线性声传播的数值模拟研究

侯 薇¹ 潘浩然² 宋卫华^{1,2} 景晓东^{1,3†} 孙晓峰^{1,3}

(1 北京航空航天大学 能源与动力工程学院流体与声学工程实验室 北京 100191)

(2 北京中航双兴科技有限公司 北京 100142)

(3 先进航空发动机协同创新中心 北京 100191)

2013 年 11 月 14 日收到

2014 年 6 月 11 日定稿

摘要 研究了大振幅活塞声源经有限长号筒向外辐射声波的非线性声学问题。采用具有频散保持特性的高精度计算格式求解了适用于变截面管道的一维非线性声场模型,并考虑到声波的非线性畸变及管口处的声反射,加入了宽频时域声阻抗边界条件。宽频阻抗模型的共轭复数系数采用优化拟合方法近似求解,并采用递推卷积算法快速求解出时域声阻抗。在弱非线性条件下模拟指数形号筒中的声传播取得了与已有实验相一致的结果,表明模型能够描述声波非线性畸变带来的宽频特性。进而采用本模型数值模拟了大振幅活塞声源在双曲形、锥形、指数形和正弦形号筒中的非线性声传播问题,结果表明号筒出口声压级受活塞振动速度、频率以及号筒形状的影响,并分析讨论了波形畸变与号筒几何形状之间的关系。

PACS 数: 43.25

Numerical simulation of nonlinear propagation of sound waves in a finite horn

HOU Wei¹ PAN Haoran² SONG Weihua^{1,2} JING Xiaodong^{1,3} SUN Xiaofeng^{1,3}

(1 School of Energy and Power Engineering, Beihang University Beijing 100191)

(2 China Aero Shuangxing Technology Co. Ltd. Beijing 100142)

(3 Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine Beijing 100191)

Received Nov. 14, 2013

Revised Jun. 11, 2014

Abstract Nonlinear acoustic propagation generated by a vibrating piston in a finite horn is numerically studied. A quasi-one-dimensional nonlinear model with varying cross-section uses high-order low-dispersion numerical schemes to solve the governing equation. Considering the nonlinear wave distortion and reflected sound waves at the mouth, broadband time-domain impedance boundary conditions are employed. The impedance approximation can be optimized to identify the complex-conjugate pole-residue pairs of the impedance functions, which can be calculated by fast and efficient recursive convolution. The numerical results agree very well with experimental data in the situations of weak nonlinear wave propagation in an exponential horn, it is shown that the model can describe the broadband characteristics caused by nonlinear distortion. Moreover, finite-amplitude acoustic propagation of a piston source in types of horns is simulated, including hyperbolic, conical, exponential and sinusoidal horns, it is found that the sound pressure level at the horn mouth are strongly affected by the driving velocity and frequency of the piston and the horn profiles, and the interplay between the waveform distortion and the horn geometry is discussed.

引言

高强声波问题的研究有两方面重要意义。一方面,在航空航天等领域,大功率推进系统的不断发展

必然带来高强噪声问题,这对发动机的薄壁结构和仪器设备有可能产生破坏性影响,所以需要模拟高强声波环境,研究高强噪声的产生机理和控制方法,并考核结构部件对声环境的适应性。另一方面,有些情况下需要利用强声波的特性,来满足工程技术发展的需

† 通讯作者: 景晓东, Email: jingxd@buaa.edu.cn

求。例如,利用强声源产生的大振幅脉动声压去除锅炉内壁的积灰,以及设计强声源进行长距离广播。由于这两方面的应用背景和近年来迫切的需求,强声源技术的发展越来越受到广泛的关注。

为了能有效输出声能,声源往往需要加装号筒以满足阻抗匹配关系^[1-2]。提高声源强度除了增加声源辐射功率外,最重要的物理问题之一是声波在号筒中的传播规律。长期以来,人们对于号筒的研究都集中在低声强线性范围内,并且已有基于线性理论的模型和方法来优化号筒的形状,以获得更高的辐射效率^[3-4]。对于高声强情况,Goldstein^[5]在1935年给出了前进波在指数形号筒中非线性畸变的表达式,而后Zamorski^[6-7]基于摄动理论给出了不同形状号筒中的非线性声传播,然而这些研究均未考虑有限长号筒管口处的声反射。随后Klipfel^[8]基于声传输线模型构建了一种单参数声场的求解方法,其中导向模块系统采用线性和非线性声学单元相结合的方式。Holland和Morfey^[9]提出一种求解有限长号筒非线性声传播的方法,此方法综合了频域内线性传播和时域内非线性畸变两种算法,并通过傅里叶变换对其进行相互转换。Béquin和Morfey^[10]通过扰动分析方法和格林定理给出了指数型号筒内的弱非线性解析解。虽然这些模型考虑了号筒管口声反射,但仍需借用线性理论来辅助求解号筒的非线性声传播,并且在考虑管口声反射时仅计及了基波和少数几阶谐波,只能研究弱非线性条件下的情况(不超过140 dB)。因此对于号筒中非线性声传播规律的研究仍有待于进一步完善,尤其是号筒几何形状对波形畸变有何种影响,反过来要最大限度控制波形失真度,应如何对号筒几何形状进行优化,对于此双方面的问题进行深入的研究将有助于指导非线性声波辐射号筒的设计,并将其用于发展强声源技术。

由于有限振幅声波的传播问题较为复杂,线性声学无法描述其传播过程中产生的波形畸变等非线性现象,解析方法也难以获得复杂条件下的非线性声传播,借助于数值方法求解则提供了另一种有效途径^[2]。近些年来,以气动声学和计算流体力学为基础的计算气动声学在求解波动问题上展现出了较大优势,例如高精度DRP^[11](Dispersion Relation Preserving)格式因具有低频散低耗散的特点而获得了广泛的应用。声波在号筒中传播的同时,在管口由于几何形状的不连续必然存在反射波从而叠加形成更加复杂的声场,并且由于声波在传播过程中发生的较强非线性畸变,管口声波的求解需叠加基波与各阶谐波,因此本文问题的模拟需采用相应的宽频时域

声阻抗边界条件。本文针对在喉口有大振幅活塞声源的有限长号筒,建立了一维非线性声场模型,利用七点四阶的DRP格式对其进行数值求解,并在号筒管口采用了一种适用于本文问题的宽频时域声阻抗边界条件,从而发展了一种可对大振幅活塞声源在有限长号筒内非线性声传播问题的模拟方法,并通过该方法着重研究了大振幅声波在双曲形、锥形、指数形和正弦形号筒中的非线性传播,并考虑了管口声反射的影响。

1 变截面管一维有限振幅波的控制方程

为提高大振幅活塞声源的辐射效率,往往在出口加装号筒以满足阻抗匹配关系,输出声能并改善波形。本文所模拟的活塞声源和号筒的示意图如图1所示,号筒长为 l ,一端受活塞声源激励,另一端开口向外辐射声波。沿号筒轴线建立坐标系,大振幅活塞声源位于坐标原点,则管口处坐标为 l ,从活塞声源向号筒管口端为 x 轴正方向。号筒截面积沿轴向的变化用 $S(x)$ 表示,活塞声源做余弦运动 $u_0 \cos(\omega t)$,其中 u_0 表示活塞声源最大振动速度, ω 表示角频率, t 表示时间。

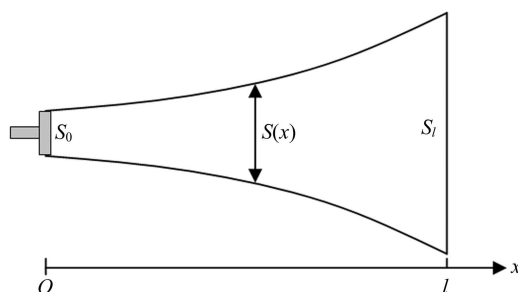


图1 大振幅活塞声源及号筒的结构尺寸示意图

忽略黏滞损耗的影响,有限振幅波在截面积平缓变化的刚壁号筒中的传播可考虑沿 x 方向传播的准一维情况,在计及非线性后的非定常流控制方程如下^[10,12-13]:

$$\text{质量守恒方程: } S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (S \rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\text{动量守恒方程: } \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\text{物态方程: } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (3)$$

其中 ρ , u 和 p 分别表示号筒内的气体密度、振动速度和压强,在理想介质中,可将声波的传播考虑为绝热过程,即 $\gamma = 1.4$ 。为了方便计算,上述方程(1),

(2), (3) 可写成如下矢量形式方程^[15]:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + \hat{s} = 0, \quad (4)$$

其中:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e + p) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ (e + p)u \end{pmatrix} \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad e = \frac{1}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho u^2.$$

为了更加明确各物理量之间的关系并方便进行数学处理, 对式 (4) 进行无量纲化处理, 并记形如 a 为有量纲量, a^* 为无量纲量, 则:

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad S^* = \frac{S}{l^2}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad u^* = \frac{u}{c_0}, \quad (6)$$

$$t^* = \frac{tc_0}{l}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \quad e^* = \frac{e}{\rho_0 c_0^2}, \quad \omega^* = \frac{\omega l}{c_0}.$$

其中 ρ_0 表示气体的静态密度, $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ 为小振幅条件下的声速。将式 (6) 中的变量代入式 (4), 得到无量纲的主控方程:

$$\frac{\partial \hat{Q}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \hat{F}^*}{\partial x^*} + \hat{s}^* = 0, \quad (7)$$

其中:

$$\hat{Q}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ \rho^* u^* \\ e^* \end{pmatrix}, \quad \hat{F}^* = \begin{pmatrix} \rho^* u^* \\ \rho^* u^{*2} + p^* \\ u^*(e^* + p^*) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{s}^* = \begin{pmatrix} \rho^* u^* \\ \rho^* u^{*2} \\ (e^* + p^*)u^* \end{pmatrix} \frac{1}{S^*} \frac{\partial S^*}{\partial x^*}.$$

由截面积变化引起的参量 $\hat{s}^*$ 可看出, 号筒截面积的变化对声传播的影响与无量纲的单位面积的变化率 $S^{*'}(x^*)/S^*(x^*)$ 有关^[14]。上式即为有限振幅波在号筒中的声传播模型, 该方程适用于截面积轴对称且沿轴向渐变的各种形状的变截面管道。给出准一维区间中无量纲 p^*, ρ^*, u^* 的初始条件和边值条件, 就能通过一种数值求解方法获得任意时刻的结果。

2 数值计算方法

为了更好地捕捉波形变化, 减少数值误差, 数值计算中采用了计算气动声学中高精度的 DRP 格式, 该格式具有低频散低耗散的特性。内场空间的 DRP 七点四阶中心差分格式如下^[11]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 \alpha_j f(x + j\Delta x), \quad \alpha_{-j} = -\alpha_j. \quad (9)$$

对时间积分采用基于 2N 存储的 LDDRK (Low Dissipation and Dispersion Runge-Kutta) 四阶五六步格式^[15], 具体格式如下:

$$\begin{cases} w_i = \alpha_i w_{i-1} + hF(t_i, u_{i-1}), & i = 1, \dots, 6 \\ u_i = u_{i-1} + \beta_i w_i, \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$w_0 = 0, \quad u_0 = u^{n-1}, \quad u^n = u_6, \quad h = \Delta t. \quad (11)$$

DRP 格式精度高, 但同时也比较敏感, 容易因初场、边界存在的间断而引起高频振荡伪波。为了消除这些伪波, 在主控方程右端适当加入了选择性人工黏性^[11]。

3 时域声阻抗边界条件

实际号筒为有限长, 声波在管口必然产生反射, 且反射波的大小与出口声阻抗的大小密切相关, 因此在号筒出口需采用时域声阻抗边界条件 (TDIBC-time-domain impedance boundary conditions)。根据号筒的实际几何形状确定出口的辐射阻抗比较复杂, 一般采用下面几种近似处理方法: 将号筒出口近似成无限大障板上的活塞^[1], 将号筒出口看作是同口径半无限长管道的出口^[16] 或安装有法兰的管道出口, 3 种假设下的出口无量纲辐射声阻抗随波数 ka 的变化关系如图 2 所示, 可根据号筒的实际情况对其进行选择。

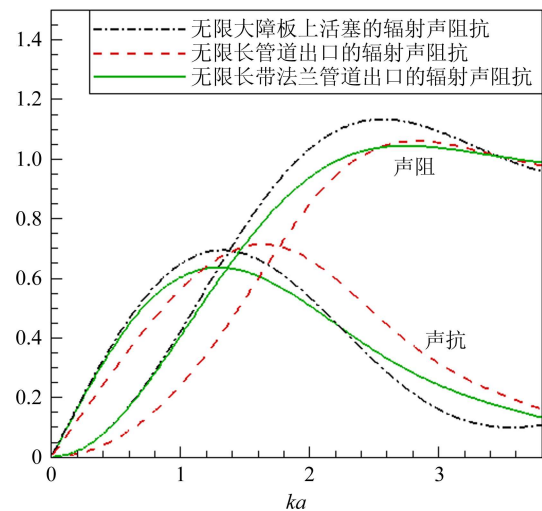


图 2 3 种假设下管口无量纲辐射声阻抗随波数的变化图

图 2 给出的是频域声阻抗, 为了将其应用于本文所发展的时域计算模型, 必须先将其转换成为时域声阻抗。当活塞声源振动幅值较大时, 号筒中声波具有较强的非线性特征, 随着声波的传播, 各谐波能量逐渐增加, 波形畸变逐渐加剧, 号筒中的声波可视作为基波与各阶谐波相互叠加的结果, 因此在号筒管

口处的声压具有一定的宽频特性, 此时需采用宽频时域声阻抗边界条件。由于声阻抗是在频域中定义的, 使用时域数值方法求解相关声传播问题时, 需要通过 Fourier 逆变换将频域条件变换为时域条件, 且当阻抗模型满足真实性、因果性和无源性时^[17], 才可能得到稳定的时域解。在频域条件下对于任意无量纲频率 ω^* , 某位置 x_b^* 的无量纲声压为 $P^*(x_b^*, \omega^*)$, 无量纲质点速度为 $V^*(x_b^*, \omega^*)$, 两者的关系可用声阻抗表示, 对其进行 Fourier 逆变换即为声阻抗的时域表达式。

$$P^*(x_b^*, \omega^*) = Z(\omega^*) V^*(x_b^*, \omega^*), \quad (12)$$

$$p^*(x_b^*, t^*) = z(t^*) * v^*(x_b^*, t^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau) v(x_b^*, t^* - \tau) d\tau. \quad (13)$$

为求解如式 (13) 所示的声阻抗 Fourier 逆变换, 需已知声阻抗 Z 在整个频域范围的值, 如此即可求得时域形式的声阻抗表达式:

$$z(t^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega^*) \exp(i\omega^* t^*) d\omega^* \quad (14)$$

由于频域下阻抗边界条件的 Fourier 逆变换在数学上就是卷积的表达式, 因此非常耗时且有较大的存储要求。本文遵循 Fung 等人^[18] 求解反射系数的思路, 根据本文问题的特点将阻抗模型写为一些特定的表达式, 使卷积的数值积分简化。在这里将 $z(t^*)$ 视为系统 $Z(\omega^*)$ 的单位脉冲响应, 当分子的阶数小于分母的阶数时^[19], 此系统能够写成 T 对共轭虚数对的留数 $\hat{A}_k$ 和极点 $\hat{\lambda}_k$ 分式表达式之和的形式, 考虑到当声源振动频率趋于无穷大时, 管口的无量纲声阻抗值为 1^[1], 所以声阻抗可表达为:

$$\begin{aligned} Z(\omega^*) &= 1 + \sum_{l=1}^{2T} \frac{\hat{A}_l}{i\omega^* + \hat{\lambda}_l} = \\ &1 + \sum_{l=1}^T \left(\frac{\hat{A}_{2l-1}}{i\omega^* + \hat{\lambda}_{2l-1}} + \frac{\hat{A}_{2l}}{i\omega^* + \hat{\lambda}_{2l}} \right) = \\ &1 + \sum_{l=1}^{2T} Z_l(\omega^*), \quad \text{Re}(\hat{\lambda}_l) \geq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

式中的复数极点 $\hat{\lambda}_{2l-1}$ 和 $\hat{\lambda}_{2l}$ 以及复数留数 $\hat{A}_{2l-1}$ 和 $\hat{A}_{2l}$ 互为共轭, 为确保表达式满足因果条件, 必须添加约束条件 $\text{Re}(\hat{\lambda}_l) \geq 0$ 。每对共轭虚数的极点可得到二阶系统, 对其进行 Fourier 逆变换可以得到对应的单位脉冲响应。

$$Z_0(\omega^*) = 1, \quad (16)$$

$$z_0(t^*) = \delta(t^*), \quad (17)$$

$$Z_l(\omega^*) = \frac{\hat{A}_l}{i\omega^* + \hat{\lambda}_l}, \quad \text{Re}(\hat{\lambda}_l) \geq 0 \quad (18)$$

$$z_l(t^*) = \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l t^*) H(t^*), \quad (19)$$

其中 $\delta(t^*)$ 为 Dirac δ 函数, $H(t^*)$ 为 Heaviside 函数。因此可以得到压力的表达式:

$$\begin{aligned} p^*(t^*) &= z(t^*) * v^*(t^*) = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \left[z_0(\tau) + \sum_{l=1}^{2T} z_l(\tau) \right] v^*(t^* - \tau) d\tau = \\ &v^*(t^*) + \sum_{l=1}^{2T} \hat{p}_l(t^*), \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $\hat{p}_l(t^*) = \int_0^{+\infty} \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \tau) v^*(t^* - \tau) d\tau$ 。假设计算过程中时间步长为 Δt^* , 为得到压力分量 $\hat{p}_l(t^*)$ 的递推卷积表达式, 将其写成如下分步形式, 可得:

$$\begin{aligned} \hat{p}_l(t^*) &= \int_0^{+\infty} \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \tau) v^*(t^* - \tau) d\tau = \\ &\int_{\Delta t^*}^{+\infty} \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \tau) v^*(t^* - \tau) d\tau + \\ &\int_0^{\Delta t^*} \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \tau) v^*(t^* - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

设 $\tau' = \tau - \Delta t^*$, 则 $\tau = \tau' + \Delta t^*$, 式 (21) 可写为:

$$\begin{aligned} \hat{p}_l(t^*) &= \exp(-\hat{\lambda}_l \Delta t^*) \hat{p}_l(t^* - \Delta t^*) + \\ &\int_0^{\Delta t^*} \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \tau) v^*(t^* - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

此时引入权重积分系数 $\vartheta \in [0, 1]$ ^[20], 因此积分,

$$\int_0^{\Delta t^*} \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \tau) v^*(t^* - \tau) d\tau \approx \left[\vartheta \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \Delta t^*) v^*(t^* - \Delta t^*) + (1 - \vartheta) \hat{A}_l v^*(t^*) \right] \Delta t^*. \quad (23)$$

于是式 (22) 即可写为:

$$\hat{p}_l(t^*) = \exp(-\hat{\lambda}_l \Delta t^*) \hat{p}_l(t^* - \Delta t^*) + \left[\vartheta \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \Delta t^*) v^*(t^* - \Delta t^*) + (1 - \vartheta) \hat{A}_l v^*(t^*) \right] \Delta t^*. \quad (24)$$

为使权重积分达到二阶精度^[20]并方便积分计算, 本文取权重系数 $\vartheta = 1/2$ 。由于 $\hat{\lambda}_{2l-1}$ 和 $\hat{\lambda}_{2l}$, $\hat{A}_{2l-1}$ 和 $\hat{A}_{2l}$ 互为共轭, 由式 (24) 易得 $\hat{p}_{2l-1}(t^*)$ 和

$\hat{p}_{2l}(t^*)$ 也互为共轭, 因此其无量纲压力 $p^*(t^*)$ 始终为实数, 其时间离散表达式可写为:

$$p^*(n\Delta t^*) = v^*(n\Delta t^*) + \sum_{l=1}^{2T} \hat{p}_l(n\Delta t^*) = v^*(n\Delta t^*) + \sum_{l=1}^{2T} \left\{ \exp(-\hat{\lambda}_l \Delta t^*) \hat{p}_l((n-1)\Delta t^*) + \left[\vartheta \hat{A}_l \exp(-\hat{\lambda}_l \Delta t^*) v^*((n-1)\Delta t^*) + (1-\vartheta) \hat{A}_l v^*(n\Delta t^*) \right] \Delta t^* \right\}. \quad (25)$$

由式 (25) 可以看出, 本文所得时域阻抗条件的表达式非常简单, 普遍适用于各种离散格式, 只需对每个时间步长内进行简单的加法和乘法计算即可求解得出边界处的压力值, 没有出现时间导数项, 极大地减少了计算量; 并且本条件的施加仅仅需要存储前一时间步的压力分量和速度, 极大地减小了存储量。

4 声阻抗模型系数的确定

对于式 (15) 中声阻抗的表达式, 精确求解出复数极点和留数的解析值是非常困难的。因此在确定声阻抗模型的系数时, 本文方法与 Cotté Benjamin^[21] 等人的研究类似, 将声阻抗进行频域内的优化拟合。

Powell 优化方法是一种十分有效的避免复杂函数求导的优化方法^[22], 本文采用此方法对构造的目标函数进行最小值优化, 进而求解得出下式表示的声阻抗模型中的各个极点和留数。

$$Z(\omega^*) \approx 1 + \sum_{l=1}^T \left(\frac{\hat{A}_{2l-1}}{i\omega^* + \hat{\lambda}_{2l-1}} + \frac{\hat{A}_{2l}}{i\omega^* + \hat{\lambda}_{2l}} \right), \quad \text{Re}(\hat{\lambda}_{2l-1}) \geq 0, \text{Re}(\hat{\lambda}_{2l}) \geq 0 \quad (26)$$

设 $\hat{A}_{2l-1} = a_l + ib_l$, $\hat{\lambda}_{2l-1} = \alpha_l + i\beta_l$, 则根据共轭关系 $\hat{A}_{2l} = a_l - ib_l$, $\hat{\lambda}_{2l} = \alpha_l - i\beta_l$, 因此式 (26) 可转化为:

$$Z(\omega^*) \approx 1 + \sum_{l=1}^T \left(\frac{a_l + ib_l}{i\omega^* + \alpha_l + i\beta_l} + \frac{a_l - ib_l}{i\omega^* + \alpha_l - i\beta_l} \right), \alpha_l \geq 0 \quad (27)$$

则目标函数可设定为:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^N \left[\left| 1 + \sum_{l=1}^T \left(\frac{a_l + ib_l}{i\omega_k^* + \alpha_l + i\beta_l} + \frac{a_l - ib_l}{i\omega_k^* + \alpha_l - i\beta_l} \right) - Z(\omega_k^*) \right|^2 \right], \quad (28)$$

其中 N 为不同频率下的已知声阻抗 $Z(\omega^*)$ 的个数。由于 Powell 方法是一种无约束优化方法, 因此对于约束条件 $\alpha_l \geq 0$ 可以采用下列几种变量变换, 将有约束变量转化为无约束变量^[22]: (1) $\alpha_l = x_l^2$; (2) $\alpha_l = |x_l|$; (3) $\alpha_l = e^{x_l}$ 。因此本文无需计算目标函数导数, 即可采用 Powell 方法简单快速的求解出使得目标函数 ε 值最小的各个参量 a_l , b_l , x_l 和 β_l 的值, 进而确定声阻抗模型的系数。

5 数值计算结果

5.1 指数形号筒内的弱非线性声传播

Béquin 和 Morfey^[10] 在 2001 年设计并完成了某

型号指数形号筒内的弱非线性声传播实验, 实验结果与其发展的模型结果吻合较好。该实验的声源采用压缩型驱动器驱动纯钛振膜进行受迫振动, 实验号筒长为 180 mm, 喉口直径 25 mm, 管口直径 81 mm, 且管口装有直径为 110 mm 的法兰, 管形蜿蜒系数 $\delta = 13.06$, 截止频率 360 Hz。在应用本文方法模拟 Béquin 和 Morfey 的实验时, 由于实验号筒的出口端装有法兰, 因此需将号筒出口看作是同孔径半无限长安装有法兰的管道出口, 在时域声阻抗边界条件 (TDIBC) 的选择上, 分别采用单频和宽频时域声阻抗边界条件对其进行求解。单频时域声阻抗边界条件采用 Tam 发展的单频时域阻抗构建方法^[23], 此方法可根据声抗的正负分别采用不同的时域表达式以

保证计算的稳定性。在采用频域优化拟合的方法对宽频声阻抗模型进行系数优化求解时, 选取了 4 对共轭系数对声阻抗进行拟合, 并在求解过程中选择上述 (1) 的变量变换方法给定约束条件, 从而得到的各复数留数分别为: $\hat{A}_1 = \bar{\hat{A}}_2 = 37292.9 + 270929.6i$, $\hat{A}_3 = \bar{\hat{A}}_4 = 27511.06 + 336830.1i$, $\hat{A}_5 = \bar{\hat{A}}_6 = -41.73301 + 519.3206i$, $\hat{A}_7 = \bar{\hat{A}}_8 = -113.9328 - 132.8764i$ 。图 3 给出了拟合优化所得到的无量纲出口辐射声阻抗变化曲线。

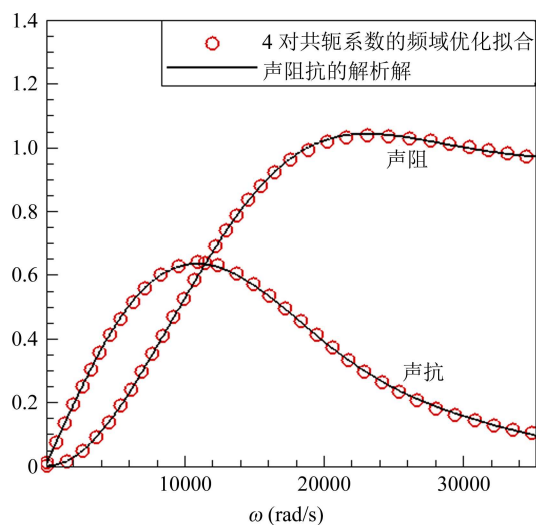


图 3 半无限长安装有法兰的管道出口无量纲辐射声阻抗随角频率的变化图

图 4 为保持指数形号筒喉口声压级 140 dB 时, 不同频率激励下的号筒管口声压级。由图可知, 本文宽频模型和单频模型的计算结果均与实验结果吻合较好, 并且在频率大于 1000 Hz 时, 宽频模型更接近于实验结果, 因此在模拟号筒内的弱非线性声传播时, 宽频模型能够更加准确预测号筒管口的声压幅

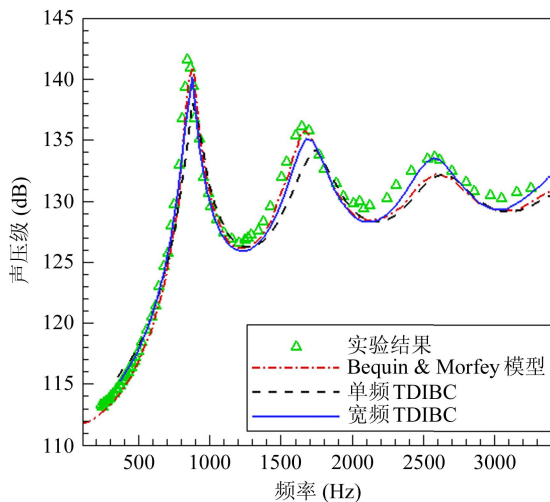


图 4 不同频率下的号筒管口声压级

值。图 5 为号筒管口二阶谐波声压级随频率的变化图, 能够看出本文的宽频模型能够很好的反应波形非线性变化程度, 与实验结果吻合较其他模型更好。并且在声源振动频率低于号筒的截止频率时, 号筒无法传输基波的能量, 而谐波频率高于截止频率, 因此能够通过号筒进行振幅放大^[7], 此时管口处谐波的反射不可忽略, 因此在使用单频时域声阻抗边界条件时具有一定的局限性。而由图 5 可以看出, 声源振动频率较低时管口的二阶谐波振动幅值较大, 本文的宽频模型能够较好的模拟出这一现象。因此在研究号筒中弱非线性声传播问题时, 采用单频模型在模拟号筒出口处已经发生的非线性畸变声波时会产生一定的误差, 而采用宽频模型能够得到与实验更加吻合的结果。

5.2 有限振幅波在不同形状号筒中的非线性传播

为了研究有限振幅波在号筒中的非线性传播规律, 分析号筒几何形状对波形畸变的影响, 本文采用上述模型及数值方法, 分别对圆锥形、双曲形、指数形和正弦形 4 种常见的变截面管道^[24] 号筒内的非线性声传播进行了高精度数值模拟。4 种号筒的无量纲长度均为 1, 进出口无量纲截面积 $S^*(x^*)$ 相同, 表 1 给出了各号筒的无量纲面积变化规律、无量纲单位面积的变化率以及管形系数, 图 6 表示各号筒的无量纲管形结构示意图。由图 6 可知, 由正弦形、锥形、指数形到双曲形, 号筒向管道中心轴的弯曲程度逐渐增大, 且其无量纲单位面积的变化率沿轴向的变化规律各不相同, 正弦形与锥形号筒的无量纲单位面积变化率逐渐减小, 且正弦形减小速率更快, 指数形号筒的无量纲单位面积变化率保持不变, 双曲形则为逐渐增大的趋势。

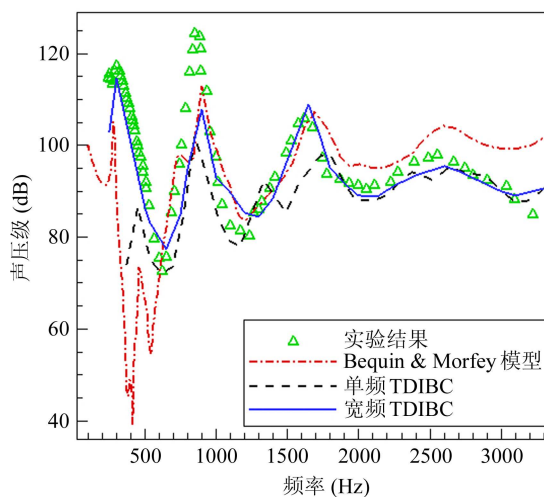


图 5 不同频率下的号筒管口二阶谐波声压级

表 1 不同形状号筒的无量纲面积变化规律、无量纲单位面积变化率及管形系数

号筒形状	无量纲面积变化规律 $S^*(x^*)$	无量纲单位面积变化率 $S^{*'}(x^*)/S^*(x^*)$	管形系数
双曲形	$S^*(x^*) = A \cosh^2 \delta x^*$	$S^{*'}(x^*)/S^*(x^*) = 2\delta \tanh \delta x^*$	$A = 0.0314$ $\delta = 2.2924$
锥形	$S^*(x^*) = A(ax^* + b)^2$	$S^{*'}(x^*)/S^*(x^*) = \frac{2a}{ax^* + b}$	$A = 0.5024$ $a = 1.0$ $b = 0.25$
指数形	$S^*(x^*) = Ae^{\delta x^*}$	$S^{*'}(x^*)/S^*(x^*) = \delta$	$A = 0.0314$ $\delta = 3.2189$
正弦形	$S^*(x^*) = A \sin^2(ax^* + b)$	$S^{*'}(x^*)/S^*(x^*) = 2a \cot(ax^* + b)$	$A = 0.7855$ $a = 1.3467$ $b = 0.2013$

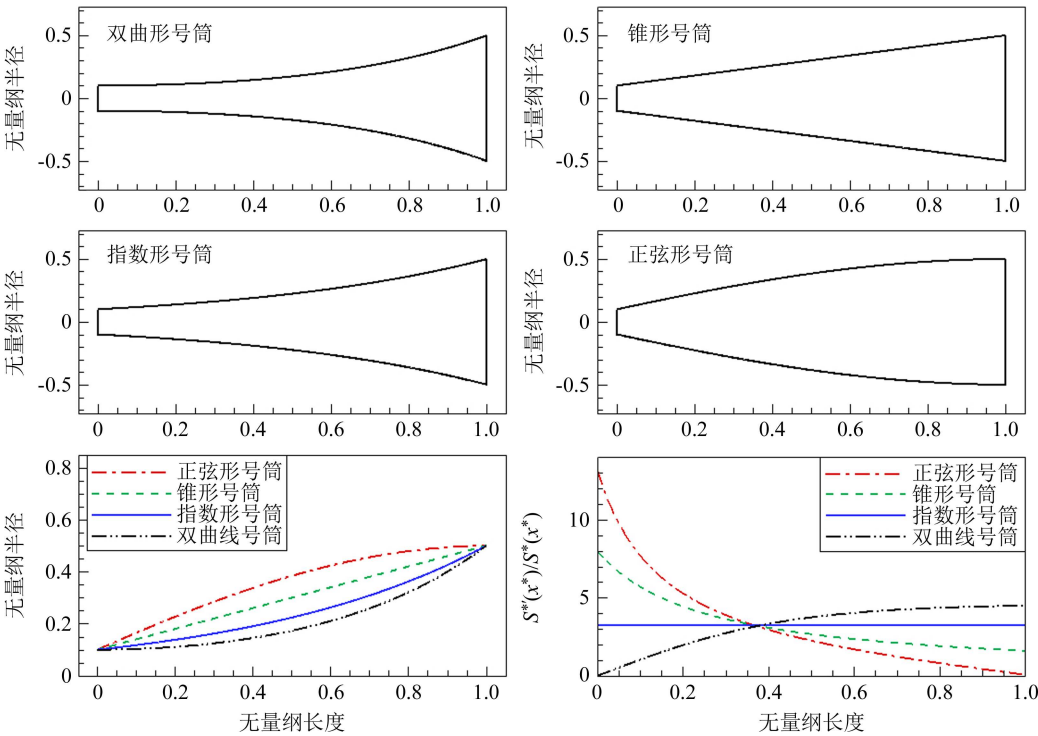


图 6 不同形状号筒的管形结构示意图

对于上述 4 种形状的号筒，本文在确定号筒出口辐射声阻抗时，将其出口看作是同孔径半无限长管道的出口，进而选取 4 对共轭系数对声阻抗进行拟合，并采用频域优化拟合的方法对系数进行求解。在求解过程中选择上述 (1) 的变量变换方法给定约束条件，从而求解得出声阻抗模型的各复数留数分别为： $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = -4.427015 \times 10^{-2} - 0.3774024i$ ， $\hat{A}_3 = \hat{A}_4 = 5.094049 \times 10^{-2} + 2.460095i$ ， $\hat{A}_5 = \hat{A}_6 = -6.137207 \times 10^{-2} + 0.7637068i$ ， $\hat{A}_7 = \hat{A}_8 = -0.1675482 - 0.1954065i$ 。由图 7 可看出，拟合优化所得的出口无量纲辐射声阻抗变化曲线与声阻抗的解析解^[25]及近似解^[26]吻合的非常好，能够确保下一步宽频时域声阻抗边界条件使用的正确性和准确性。

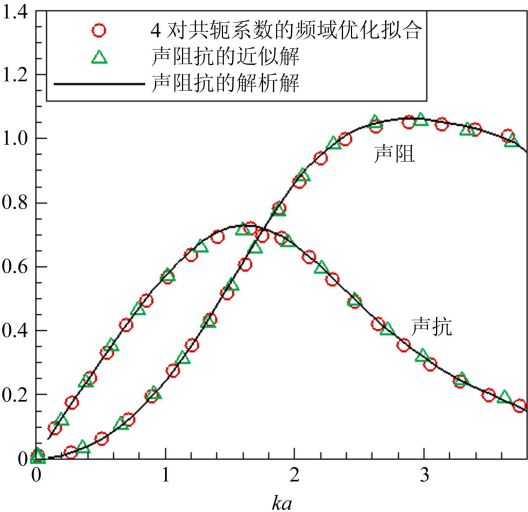


图 7 半无限长管道出口无量纲辐射声阻抗随波数的变化图

当号筒入口处的活塞运动速度增加到一定程度时,将产生较强的非线性现象,此时线性声学模型将无法对其进行有效描述,而本文所提出的宽频模型可解决这一问题,且可适用于不同形状的有限长号筒。针对表 1 所示的 4 种不同形状的号筒,将活塞最大无量纲振动速度设定为 $u_0^* = 0.005$,图 8 为不同形状号筒的管口声压级随活塞无量纲振动频率的变化图,此时出口声波的声压级约为 140 dB 左右,因此声传播属于弱非线性声传播。由图 8 可知,在弱非线性条件下,双曲形号筒的出口声压级最大,指数形号筒次之,正弦形号筒出口声压级最小,可以看出双曲形号筒和指数形号筒能够输送更多的声能,具有较高的声波辐射效率,这与现有的线性声学结论相一致^[13]。由式 (7) 可知,不同号筒形状对声传播的影响与无量纲单位面积的变化率 $S'^*(x^*)/S^*(x^*)$ 有关,因此对比图 8 可以看出,无量纲单位面积变化率随号筒轴向方向逐渐增大,有利于提高号筒的声辐射效率。图 9 为 4 种号筒对应的二阶谐波声压级变化图,与 Béquin 和 Morfey 的实验结果相类似,当声源振动频率较低时,谐波的放大效应体现的非常明显。由图 9 可见双曲形号筒的二阶谐波的声压级最高,正弦形号筒的二阶谐波声压级最低。当无量纲频率高于 0.6 时,双曲形号筒的二阶谐波声压级普遍高于指数形号筒约 4 dB,而对比图 8 可知此时双曲形号筒和指数形号筒的管口声压级差别不大,说明有限振幅波在双曲形号筒内的传播更易产生非线性畸变,这是由于在号筒喉口附近,双曲形号筒的截面积变化比较缓慢,此时的波形非线性畸变累积较为严重,从而导致管口波形的非线性变化较强,而其他形状的号筒截面积在喉口处就有较大的变化,在一定程度上可以改善波形形状。

由图 8 和图 9 可以看出,4 种号筒出口声压的二阶谐波已经出现并且声压级较低,说明此时非线性效应已经显现,波形的传播属于弱非线性传播,因此增大活塞的最大无量纲振动速度至 $u_0^* = 0.1$,当无量纲振动频率为 0.65 时,4 种号筒出口无量纲声压随无量纲时间的变化如图 10 所示,可以看出有限振幅波在 4 种号筒中的声传播会产生一定的相位差,而频率则保持一致。这是因为活塞激励初期为暂态过程,此时号筒内声波振动较为复杂,由于号筒形状及管口声反射的影响,不同号筒中的声波会显现出不同的暂态振动从而产生相位差。而经一定时间后暂态振动消失,系统达到稳定状态,4 种号筒内的声波均保持为激励频率下的受迫振动。与弱非线性条件下的情况相似,双曲形和指数形号筒出口的无量

纲声压幅值较高,正弦形号筒出口的无量纲声压幅值最低。从图 10 中可以明显看出无量纲声压波形正负值并不对称,波形已经发生了非线性变化。不同形状号筒的喉口和出口处的声压级如表 2 所示,分别

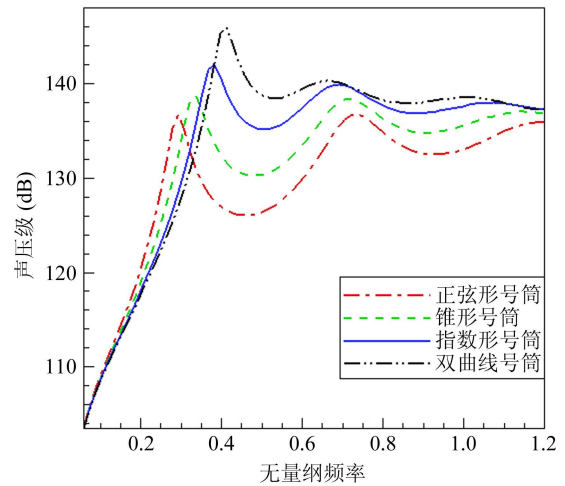


图 8 不同形状号筒的管口声压级随无量纲频率的变化图

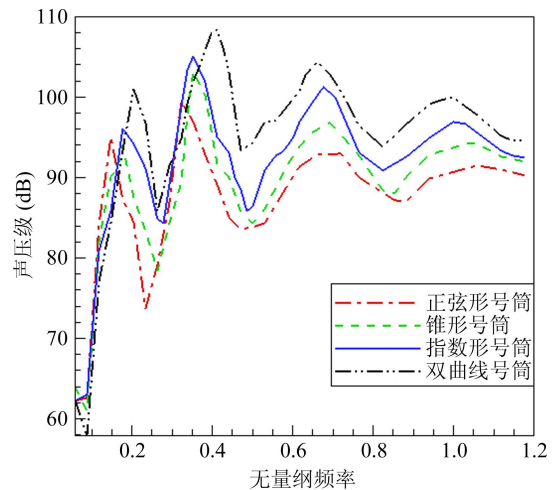


图 9 不同形状号筒的管口二阶谐波声压级随无量纲频率的变化图

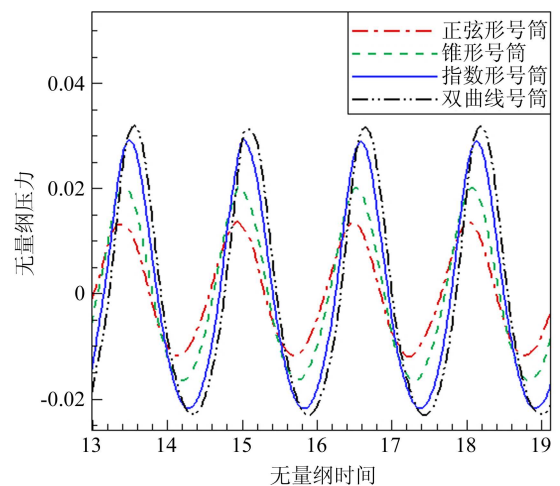


图 10 不同形状号筒出口无量纲声压随无量纲时间的变化图

表 2 活塞最大无量纲振动速度 0.1 时不同形状号筒喉口和出口处的声压级

号筒形状	声源喉口 声压级 (dB)	号筒出口处 声压级 (dB)	号筒出口处一阶 谐波声压级 (dB)	号筒出口处二阶 谐波声压级 (dB)	号筒出口处三阶 谐波声压级 (dB)	号筒出口处四阶 谐波声压级 (dB)
双曲形	180.8	166.1	162.4	150.1	134.5	130.7
锥形	177.4	162.0	158.4	140.1	118.2	110.0
指数形	180.2	165.3	161.4	145.1	127.5	120.9
正弦形	174.5	157.0	155.2	135.0	111.9	108.6

对 4 种号筒的出口声压进行傅里叶分析, 可发现频谱中已有高阶谐波出现且幅值较大。此时的管口声压级明显高于图 8 中相同无量纲频率下的声压级, 因此保持相同频率并增大活塞的最大无量纲振动速度时, 可以增大声源辐射功率从而获得更高声压级的声波。一阶谐波与二阶谐波声压级之差越小, 表明声波的非线性变化越剧烈, 从表 2 中的计算结果来看, 双曲形号筒的一阶谐波幅值比二阶高 12.3 dB, 比三阶高 27.9 dB; 指数形号筒的一阶谐波比二阶高 16.3 dB, 比三阶高 33.9 dB, 按这样幅值比例合成的波形, 其失真度已经较为明显; 锥形和正弦形号筒的一阶谐波与二阶谐波声压级之差较大, 表明声波的非线性变化并不剧烈。因此, 在活塞最大无量纲振动速度为 0.1 时非线性效应已经显现且较为剧烈, 双曲形和指数形号筒的出口声压波形较标准的正弦波形有一定程度的偏离, 且双曲形号筒声压波形的非线性畸变更明显。综合有限振幅波在 4 种号筒的声传播计算结果, 双曲形和指数形号筒具有较高的声波辐射效率, 能够输送更多的声能, 鉴于两者声波传输能力相近, 而双曲形号筒传输的声波非线性变化比指数形更为剧烈, 并考虑工程实际中制作成本, 故此建议在实际工程应用中采用指数形号筒, 并根据实际需求合理优化号筒的结构参数。

6 结论

有限振幅波的非线性传播问题无法采用线性声学方法进行解析求解, 在数值求解此问题时, 考虑到号筒中声传播及管口声反射的复杂性, 数值方法需要有较高的精度。本文基于流体力学基本动力学方程建立了可用于求解变截面管道中声传播的一维非线性声场模型, 并采用计算气动声学中广泛应用的 DRP 和 LDDRK 格式求解该模型。考虑到声波非线性畸变所带来的宽频特性和号筒出口辐射声阻抗的影响, 采用了一种适用于本文问题的宽频时域声阻抗边界条件。宽频阻抗模型采用共轭复数极点和留数的特定分式之和来表示, 这使得声阻抗时域求解时卷积的数值积分可通过递推方式快速求出。阻抗模型的共

轭复数系数采用频域内优化拟合方法来近似求解。

本文采用上述方法数值模拟了某型号指数形号筒内的弱非线性声传播, 取得了与参考文献 10 中实验结果相吻合的结果, 并且在声源振动频率较低时, 能够比其它模型更好地模拟出谐波放大效应, 证明了本文方法的正确性和可靠性。进而采用本模型数值模拟了大振幅活塞声源在双曲形、指数形、锥形和正弦形 4 种有限长号筒中的非线性声传播问题, 结果表明号筒出口声压级受活塞振动速度、频率以及号筒形状的影响, 且指数形号筒和双曲形号筒具有较高的声波辐射效率。当声源活塞振动速度较大时 4 种号筒的声波波形均有较大程度的非线性畸变, 并且双曲形号筒非线性畸变程度更加剧烈。综合有限振幅波在 4 种号筒中的声传播特点并考虑成本等因素, 工程研制时建议采用指数形号筒, 并可根据实际需求对号筒结构做进一步的优化设计。应用本方法可以计算有限振幅波在其他变截面管道中的非线性声传播问题, 并且考虑了声波非线性畸变引起的宽频效应, 具有一定的工程应用价值。

参 考 文 献

1 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础. 南京: 南京大学出版社, 2001

2 Tsuchiya T, Kagawa Y, Doi M *et al.* Finite element simulation of non-linear acoustic generation in a horn loudspeaker. *Journal of Sound And Vibration*, 2003; **266**(5): 993—1008

3 Bångtsson E, Noreland D, Berggren M. Shape optimization of an acoustic horn. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 2003; **192**(11): 1533—1571

4 Wadbro E, Berggren M. Topology optimization of an acoustic horn. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 2006; **196**(1): 420—436

5 Goldstein S, McLachlan N W. Sound waves of finite amplitude in an exponential horn. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1935; **6**(4): 275—278

6 Zamorski T. Waves with finite amplitude in Bessel horns. *Arch. Acoust.*, 1990; **15**(3—4): 531—540

7 Zamorski T. Propagation of sound waves of finite amplitude in a horn at frequencies below the cut-off frequency. *Arch. Acoust.*, 1997; **22**(4):411—421

- 8 Klippel W. Nonlinear wave propagation in horns and duct. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1995; **98**(1): 431
- 9 Holland K R, Morfey C L. A model of nonlinear wave propagation in horns. *Journal of the Audio Engineering Society*, 1996; **44**(7/8): 569—580
- 10 Béquin P, Morfey C L. Weak nonlinear propagation of sound in a finite exponential horn. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2001; **109**(6): 2649—2659
- 11 Tam C K W. Computational aeroacoustics-Issues and methods. *AIAA Journal*, 1995; **33**(10): 1788—1796
- 12 Kinder L E, Frey A R. Fundamentals of acoustics, 4th Edition, New York: John Wiley & Sons Inc., 1999
- 13 马大猷. 现代声学理论基础. 北京: 科学出版社, 2004
- 14 Yuan H, Karpov S, Prosperetti A. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers II: Nonlinear oscillations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1997; **102**(6): 3497—3506
- 15 Stanescu D, Habashi W G. 2N-Storage low dissipation and dispersion runge-kutta schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 1998; **143**(2): 674—681
- 16 Eveno P, Dalmont J P, Caussé R *et al.* Wave propagation and radiation in a horn: comparisons between models and measurements. *Acta Acustica united with Acustica*, 2012; **98**(1): 158—165
- 17 Rienstra S W. Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model. Twelfth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, Massachusetts, AIAA Paper 2006-2686, 2006.
- 18 Fung K Y, Ju H. Broadband time-domain impedance models. *AIAA Journal*, 2001; **39**(8): 1449—1454
- 19 Reymen Y, Baelmans M, Desmet W. Time-domain impedance formulation based on recursive convolution. Twelfth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, Massachusetts, AIAA Paper 2006-2685, 2006
- 20 Fung K Y, Ju H. Time-domain impedance boundary conditions for computational acoustics and aeroacoustics. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2004; **18**(6): 503—511
- 21 Cotté B, Blanc-Benon P, Bogey C *et al.* Time-domain impedance boundary conditions for simulations of outdoor sound propagation. *AIAA Journal*, 2009; **47**(10): 2391—2403
- 22 Box M J. A comparison of several current optimization methods, and the use of transformations in constrained problems. *The Computer Journal*, 1966; **9**(1): 67—77
- 23 Tam C K W, Auriault L. Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA Journal*, 1996; **34**(5): 917—923
- 24 刘丹晓, 周城光, 刘克. 谐振管形状对热声发动机内非线性声场的影响. *声学学报*, 2012; **37**(1): 36—44
- 25 Levine H, Schwinger J. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Physical Review*, 1948; **73**(4): 383
- 26 Silva F, Guillemain P, Kergomard J *et al.* Approximation formulae for the acoustic radiation impedance of a cylindrical pipe. *Journal of Sound and Vibration*, 2009; **322**(1): 255—263