第 40 卷第 5 期　　声 学 学 报　　Vol. 40, No. 5
2015 年 9 月　　ACTA ACUSTICA　　Sept., 2015

不确定声场分析的二阶区间摄动有限元法*

尹盛文　于德介　夏百战
(湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室　长沙　410082)

2014 年 1 月 9 日收到
2014 年 4 月 14 日定稿

摘要　针对一阶区间摄动有限元法在声场参数不确定程度增大时误差过大的缺陷，在二阶 Taylor 展开的基础上推导了声学二阶区间摄动有限元法，并将其应用于区间不确定声场的声压响应分析。该方法先对声学区间有限元方程的声压响应向量进行二阶 Taylor 展开，获取声压响应的二阶近似响应向量；再根据二次函数极值定理获得声压响应向量的上下界。二维管道声场与轿车声腔模型的数值分析算例表明，与一阶区间摄动有限元法相比，二阶区间摄动有限元法有效提高了计算精度。因此二阶区间摄动有限元适合不确定度更大的区间不确定声场声压响应分析，具有良好的工程应用前景。

PACS 数：43.20

Second-order interval perturbation finite element method for the analysis of the acoustic filed with uncertain parameters

YIN Shengwen　YU Dejie　XIA Baizhan
(*State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University*　Changsha　410082)

Received Jan. 9, 2014
Revised Apr. 14, 2014

Abstract　Aiming at the problem that the accuracy of the first-order interval perturbation method is not satisfactory when it is used for the response analysis of the acoustic filed with large uncertain levels, the acoustical second-order interval perturbation finite element method is proposed based on the second-order Taylor series expansion and the acoustic FEM method. In the acoustical second-order perturbation finite element method, the non-deterministic sound pressure vector of the acoustic filed with interval parameters is expanded to the second order Taylor series. The upper and lower bounds of the sound pressure response are evaluated latter in the inner feasible domain of the interval parameters based on the extreme value theorem. Numerical results on a 2D acoustic tube and a 2D acoustic cavity of a car with interval parameters show that the second-order interval perturbation finite element method achieves higher accuracy compared with the first-order interval perturbation finite element method. Hence, the second-order interval perturbation finite element method can be well applied in analyzing the acoustic filed with larger uncertain levels, and has a wide application foreground.

引言

传统的声场预测是在确定的几何、材料、环境等因素下，借助数值分析技术求解声场的频率响应[1−2]。但由于实际声场分析模型中材料属性的多向性、载荷的不可预测性和环境影响因素的复杂性等，其几何、激励、密度、阻尼、声速等参数往往是不确定的，这些不确定性虽然在多数情况下数值较小，但耦合在一起可能使系统响应产生较大的偏差。工程中通常采用概率方法来处理不确定性问题，概率方法与传统的有限元方法结合产生随机有限元法[3]。随机有限元法将随机变量引入传统的有限元方程，并采用随机分析方法得到系统响应的期望、方差和

* 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主课题 (51375002) 资助

概率密度函数等，被广泛应用于结构分析问题[4]。然而，随机有限元法的使用前提是不确定参数的概率分布必须是确定的。在工程设计初期，我们往往难以获得足够的样本数据来构建不确定参数的准确概率分布模型。

区间分析方法在处理不确定性问题时仅需要知道不确定参数的变化范围，不需要知道变化范围内的概率密度函数，因此区间分析方法适用于样本数据有限而无法构建精确概率分布密度函数的不确定问题分析。区间分析方法与有限元法相结合形成区间有限元法，常用的区间有限元法包括直接 Monte Carlo 模拟法，区间摄动有限元法等[5−7]。其中，Monte Carlo 模拟法与有限元法的结合产生直接 Monte Carlo 模拟有限元法 (Direct Monte Carlo simulation finite element method)[5]。直接 Monte Carlo 模拟有限元法是求解不确定性问题最简单的方法，其精度依赖于样本点的数量。但 Monte Carlo 方法计算成本过高，难以应用于大规模工程计算问题。为了提高计算效率，邱志平等基于摄动思想提出了区间摄动法[6]。该方法对区间矩阵和区间向量进行一阶 Taylor 展开，然后取区间逆矩阵的一阶 Neumann 级数近似求解。在一阶区间摄动法和有限元法的基础上发展起来的一阶区间摄动有限元法被大规模的应用于计算力学问题[8−9]。一阶区间摄动法仅适合求解小变量区间参数的不确定性问题。随后，Xia 等提出了改进的一阶区间摄动有限元法并将其推广到声场和声固耦合问题的声压响应预测问题[10−11]。该方法在求解区间逆矩阵时仅忽略了 Neumann 展开级数的高阶耦合项，有效改善了一阶区间摄动有限元法的精度，但对于每个区间变量都需要计算一次区间逆矩阵，其计算效率随不确定参数的增多明显下降。最近，Chen 等提出了二阶 Taylor 展开区间分析方法，在单调包含论假设下求解系统响应区间的上下界，并将其用于结构的静态响应分析[13]。该方法对系统响应进行二阶 Taylor 展开获取系统响应的近似区间上下界，有效减少了截断误差，适合分析不确定度更大的不确定性问题。基于单调包含论假设下的二阶 Taylor 展开区间法是在区间端点求得近似响应函数的上下界，因此它容易陷入局部最优解。Fujita 等在求解二阶 Taylor 展开摄动量时，考虑了目标函数在不确定变量区间内的极值点，根据目标函数的抛物线特性，通过判断抛物线的开口方向和对称中心确定近似响应量的全局最优值，并将其用于建筑结构的动态响应分析[14]。

在声学领域，已有的一阶区间摄动有限元法在大不确定度区间变量下很难达到预定的精度，甚至会因为线性近似使响应结果失真；改进的一阶区间摄动有限元法在不确定参数增多时计算效率太低。二阶 Taylor 展开区间法对系统响应进行二阶 Taylor 展开，有效减少了由系统非线性参数引起的截断误差，提高了 Taylor 展开区间法的计算精度。系统响应的区间上下界利用系统在区间中点的响应特性快速求解，避免了求解区间逆矩阵，具有很高的计算效率。本文拟将二阶 Taylor 展开区间法引入声场数值分析，推导出基于二阶 Taylor 展开的声学区间摄动有限元法。首先，将声场中的不确定参数定义为区间变量，建立不确定声场的区间动态平衡方程。然后，对声压响应函数在变量区间中点进行二阶 Taylor 级数展开，获取声压响应的二阶近似响应向量。最后，基于二次函数极值定理求解二阶 Taylor 展开摄动量得到不确定声场响应的变化区间[12]。本文方法基于二次函数极值定理求解二阶 Taylor 展开摄动量，在优化过程中只判断极值点的位置，便于数值算法的程序实现。二维管道声场和轿车声腔模型分析结果表明，相比一阶区间摄动有限元，二阶区间摄动有限元的计算精度更高，具有很好的工程应用前景。

1 声学有限元方程

对于简谐激励的稳态声场，频域内的稳态声场声压方程，即 Helmholtz 方程为：

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \tag{1}$$

式中，$k = \omega/c$ 为波数，ω 为圆频率，c 为声速，∇ 为微分算子。

声场有下列几种边界条件：

(1) 狄利克雷边界条件，即声压边界条件：

$$p = p_{\mathrm{D}} \ \text{on} \ \varGamma_{\mathrm{D}}. \tag{2}$$

(2) 黎曼边界条件，即速度边界条件：

$$\nabla p \cdot \boldsymbol{n} = -\mathrm{j}\rho\omega v_n \ \text{on} \ \varGamma_{\mathrm{N}}. \tag{3}$$

(3) Robin 边界条件，即声阻抗边界条件：

$$\nabla p \cdot \boldsymbol{n} = -\mathrm{j}\rho A_n p \ \ \text{on} \ \ \varGamma_{\mathrm{R}}. \tag{4}$$

式 (2)— 式 (4) 中，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 为虚数，v_n 为质点振动速度。p_D 表示边界处声压，$\boldsymbol{n}$ 表示声腔边界表面法线方向，A_n 表示声导纳系数。

基于有限元法，得到离散声域的系统方程为：

$$(\boldsymbol{K} - k^2\boldsymbol{M} + \mathrm{j}k\boldsymbol{C})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{p}$ 为节点声压向量，$\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{F}$ 分别为系统刚度矩阵，系统质量矩阵，系统阻尼矩阵和系统激励向量

$$\boldsymbol{K} = \int_{\varOmega} (\nabla \boldsymbol{N})^{\mathrm{T}} (\nabla \boldsymbol{N}) \mathrm{d}\varOmega, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{M}=\int_{\Omega}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Omega, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{C}=\rho c A_n\int_{\Gamma_R}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Gamma, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{F}=-\mathrm{j}\rho\Omega\int_{\Gamma_N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}v_n\mathrm{d}\Gamma, \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{N}$ 为单元各节点形函数的组合矩阵，对于四边形等参单元。$\boldsymbol{N}$ 可以写成：

$$\boldsymbol{N}=[\begin{array}{cccc} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{array}], \tag{10}$$

其中：

$$\begin{aligned} &N_1=(1-\varepsilon)(1-\eta)/4,\quad N_2=(1+\varepsilon)(1-\eta)/4,\\ &N_3=(1+\varepsilon)(1+\eta)/4,\quad N_4=(1-\varepsilon)(1+\eta)/4, \end{aligned} \tag{11}$$

式中，ε 和 η 为等参四边形单元的局部坐标变量。

2 声学区间摄动有限元

2.1 声学一阶区间摄动有限元法

际声场分析模型的几何、激励、密度、阻尼、声速等系统参数往往是不确定的。可以用独立变化的区间变量来表示声场中的不确定参数，所有的区间变量构成了区间变量向量，可表示为：

$$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{x}^I=[\underline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{x}}]=[\boldsymbol{x}^m-\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^m+\Delta\boldsymbol{x}], \tag{12}$$

其元素形式为：

$$\begin{gathered} x_i\in x_i^I=[\underline{x}_i,\overline{x}_i]=[x_i^m-\Delta x_i,x_i^m+\Delta x_i],\\ (i=1,2,\cdots,N) \end{gathered} \tag{13}$$

式中，N 是区间变量的总数；x_i 为第 i 个不确定变量。$\overline{\boldsymbol{x}}$, $\underline{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x}^m$ 和 $\Delta\boldsymbol{x}$ 分别表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的区间上界、区间下界、区间中点和区间半径。$\overline{x}$, $\underline{x}$, x^m 和 Δx 分别表示区间变量 x_i 的区间上界、区间下界、区间中点和区间半径。

区间参数的不确定程度用不确定系数来表示，定义不确定系数 α:

$$\alpha=\frac{\overline{x}_i-\underline{x}_i}{x_i^m}. \tag{14}$$

将区间参数引入声场数值分析模型，声学有限元方程可重写为：

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \tag{15}$$

式中，$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 分别为系统动态刚度矩阵和激励向量在区间参数 $\boldsymbol{x}$ 处的取值，其中：

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})-k(\boldsymbol{x})^2\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})+\mathrm{j}k(x)\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}), \tag{16}$$

式中，$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ 分别表示系统刚度矩阵、系统质量矩阵和系统阻尼矩阵在区间参数 $\boldsymbol{x}$ 处的取值。

根据声学区间有限元方程 (15) 计算的声压响应为：

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}). \tag{17}$$

对声压响应 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 在区间中点 $\boldsymbol{x}^m$ 处进行一阶 Taylor 展开：

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{,x_i}(x-x_i), \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)$ 表示区间中点处的声压响应值，$\boldsymbol{p}_{,x_i}$ 表示声压响应关于变量 x_i 的一阶偏导数在区间中点的取值 $\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})/\partial x_i|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^m}$。在方程 (15) 两边对变量 x_i 求一阶偏导数，可得声压响应关于变量 x_i 的一阶偏导数：

$$\frac{\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}-\frac{\partial\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\right). \tag{19}$$

根据式 (18), 声压响应在区间 $\boldsymbol{x}^I$ 内的取值为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^I)=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{,x_i}(x^I-x_i)=\\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_{,x_i}\Delta x_i e^I, \end{aligned} \tag{20}$$

式中，$e^I=[-1,1]$。

基于一阶 Taylor 展开线性近似，声压响应的最大值和最小值分别为：

$$\overline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{p}_{,x_i}\Delta x_i|, \tag{21}$$

$$\underline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)-\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{p}_{,x_i}\Delta x_i|. \tag{22}$$

2.2 声学二阶区间摄动有限元法

为了提高区间声学数值计算的精度，本文将二阶 Taylor 展开法引入区间参数声场数值分析，建立声学二阶区间摄动有限元法。对声压响应 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 在区间中点进行二阶 Taylor 展开：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^m)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^m)+\\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^m)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^m)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^m), \end{aligned} \tag{23}$$

式中，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^m)$ 和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^m)$ 分别表示梯度向量和 Hessian 矩阵在区间中点 $\boldsymbol{x}^m$ 的取值，相应的梯度向量和 Hessian 矩阵分别为：

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\left[\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_N} \end{array}\right], \tag{24}$$

$$
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_N} \\ \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_N\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_N\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_N\partial x_N} \end{bmatrix}, \tag{25}
$$

其中：

$$
\frac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2}=\boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\right)- \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{x})\left(2\frac{\partial\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\frac{\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right), \tag{26}
$$

$$
\frac{\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}=\boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\right)- \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\frac{\partial\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\frac{\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}-\frac{\partial\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\frac{\partial\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right), \tag{27}
$$

式中， $i,j=1,2,\cdots,N$。

对于 N 维区间变量，矩阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^m)$ 为 N 维方阵，当不确定变量总数 N 较大时，计算成本很高。此外，声压响应二阶 Taylor 展开摄动量表达式 (23) 含有不同区间变量的乘积项，其区间计算较为复杂。为了简化计算和提高计算效率，文献 13 提出用近似的二阶 Taylor 展开级数表示二阶 Taylor 展开摄动量。只考虑 Hessian 矩阵的对角线元素，则声压响应向量可以近似为 [13]：

$$
\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{p}_{,x_k}(x_k-x_k^m)+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{p}_{,x_kx_k}(x_k-x_k^m)^2, \tag{28}
$$

式中， $\boldsymbol{p}_{,x_kx_k}$ 为声压响应关于变量 x_k 的二阶偏导数在区间中点的取值 $\partial^2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})/\partial x_i^2|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^m}$。

声压响应向量的元素形式为：

$$
p_j(\boldsymbol{x})=p_j(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{k=1}^{N}p_{j,x_k}(x_k-x_k^m)+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}p_{j,x_kx_k}(x_k-x_k^m)^2,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{29}
$$

式中， n 为声压响应的节点总数， $p_j(\boldsymbol{x})$ 和 $p_j(\boldsymbol{x}^m)$ 分别表示第 j 个节点在变量 $\boldsymbol{x}$ 和区间中点的声压响应值。 p_{j,x_k} 和 p_{j,x_kx_k} 分别为声压响应 p_j 关于变量 x_k 的一阶、二阶偏导数在区间中点的取值。

用 $\Delta p_{jk}(x_k)$ 表示声压响应 p_j 关于变量 x_k 的二阶 Taylor 展开摄动量：

$$
\Delta p_{jk}(x_k)=p_{j,x_k}(x_k-x_k^m)+\frac{1}{2}p_{j,x_kx_k}(x_k-x_k^m)^2. \tag{30}
$$

将式 (30) 代入式 (29)，则声压响应的元素形式可化为：

$$
p_j(\boldsymbol{x})=p_j(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{k=1}^{N}\Delta p_{jk}(x_k). \tag{31}
$$

根据式 (31)，在变化区间 $\boldsymbol{x}^I$ 内， N 维不确定声场声压响应的上下界可以表示成：

$$
\overline{p}_j(\boldsymbol{x})=p_j(\boldsymbol{x}^m)+\max\sum_{k=1}^{N}\Delta p_{jk}(x_k)= p_j(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{k=1}^{N}\max\left(\Delta p_{jk}(x_k)\right), \tag{32}
$$

$$
\underline{p}_j(\boldsymbol{x})=p_j(\boldsymbol{x}^m)+\min\sum_{k=1}^{N}\Delta p_{jk}(x_k)= p_j(\boldsymbol{x}^m)+\sum_{k=1}^{N}\min\left(\Delta p_{jk}(x_k)\right), \tag{33}
$$

$\Delta p_{jk}(x_k)$ 为关于变量 x_k 的二次连续函数。根据极值定理，极值点为函数定义域内单调区间的分界点，且满足 [12]：

$$
\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=0, \tag{34}
$$

式中 x_0 为函数 $f(x)$ 的极值点。

二次函数 $\Delta p_{jk}(x_k)$ 仅存在一个极值点。极值点将二次函数的定义域分为两个不同单调性的单调区间，单调区间内二次函数的上下界在相应区间的端点处取得，比较函数在两个单调区间端点的函数值即可得到二次函数在定义域内的上下界。针对特定区间内二次函数的最值问题，需要判断极值点的位置。如果二次函数 $\Delta p_{jk}(x_k)$ 的极值点在特定区间 x_k^I 内，先求二次函数在极值点处的函数值，再求二次函数在特定区间端点的函数值，最后比较极值和端点值得到二次函数的最大值和最小值；否则，该二次函数在区间 x_k^I 内是单调的，其上下界在相应的区间端点取得。

令摄动量 $\Delta p_{jk}(x_k)$ 关于 x_k 的一阶偏导数为 0，可以获得其相应的极值点。即由

$$
\frac{\partial\Delta p_{jk}(x_k)}{\partial x_k}=0, \tag{35}
$$

可得 $\Delta p_{jk}(x_k)$ 的极值点 x_{jk}，

$$
x_{jk}=-\frac{p_{j,x_k}}{p_{j,x_kx_k}}+x_k^m. \tag{36}
$$

则二阶摄动量 $\Delta p_{jk}(x_k)$ 在区间 x_k^I 内的最大值和最小值可以描述为：

$$\max\left(\Delta p_{jk}(x_k)\right)=\begin{cases}\max\left(p_j(\overline{x}_k),p_j(\underline{x}_k),p_j(x_{jk})\right), & \underline{x}_k<x_{jk}<\overline{x}_k,\\ \max\left(p_j(\overline{x}_k),p_j(\underline{x}_k)\right), & \text{其它}.\end{cases}\tag{37}$$

$$\min\left(\Delta p_{jk}(x_k)\right)=\begin{cases}\min\left(p_j(\overline{x}_k),p_j(\underline{x}_k),p_j(x_{jk})\right), & \underline{x}_k<x_{jk}<\overline{x}_k,\\ \min\left(p_j(\overline{x}_k),p_j(\underline{x}_k)\right), & \text{其它}.\end{cases}\tag{38}$$

基于区间端点和极值点的全局寻优求解声压响应二阶 Taylor 展开摄动量，并在此基上获得声压响应的上下界。声学二阶区间摄动有限元数值算法的流程为：

(1) 建立声学有限元数值模型，在不确定参数区间中点计算声场的均值响应 $p_j(\boldsymbol{x}^m)$ 。

(2) 对不确定声场声压响应进行二阶 Taylor 展开，获得声压响应的近似目标函数式 (29) 。

(3) 根据式(36)计算摄动量$\Delta p_{jk}(x_k)$的极值点。

(4) 先判断极值点是否在区间 x_k^I 内，再根据式(37)和式(38)求摄动量在不确定区间内的最优解。

(5) 基于摄动理论，按式 (32) 和式 (33) 得到声压响应的上下界。

3 数值算例

3.1 管道声场模型

图 1 所示为一管道声场模型，内部声腔离散为规则的四边形网格，管长 1 m 、宽 0.1 m, 内部由空气填充，空气密度为 ρ, 声波在空气中的速度为 c, 管子一端施加速度边界条件：法向速度 $v_n=1$ m/s; 其余边界为刚性壁。二维管道声腔网格的四边形单元数个数为 640, 节点数为 729, 单元长度为 0.0125 m 。

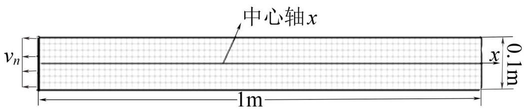

图 1 二维管道声腔网格模型

管道沿 x 轴的声压精确解为：

$$p=-\mathrm{j}\rho c v_n\frac{\cos(k(1-x))}{\sin(k)}.\tag{39}$$

考虑声场中的不确定因素，将空气密度和声速视为区间变量. 假定空气密度 ρ 的变化范围为1.182~1.326 kg/m^3, 声速 c 的变化范围为 324.8~358.6 m/s 。根据式 (14), 空气密度 ρ 和声速 c 的不确定系数均为 0.1 。分别运用一阶区间摄动有限元法 (F-IPFEM) 、二阶区间摄动有限元法 (S-IPFEM) 和 Monte-Carlo 法对管道声场二维网格模型进行计算，并对不同频率下的声压虚部计算结果进行对比分析研究。图 2 和图 3 表示频率为 300 Hz 和 400 Hz 时沿管道中心轴 x 方向的声压虚部分布。在图 2 、图 3 及以下各图中，F-IPFEM(upper) 和 F-IPFEM(lower) 表示用一阶区间摄动有限元法计算的上下界；S-IPFEM(upper) 和 S-IPFEM(lower) 表示用二阶区间摄动有限元法计算的上下界；用 Monte-Carlo 迭代 10000 次获得的区间上下界作为数值算法的参考解。

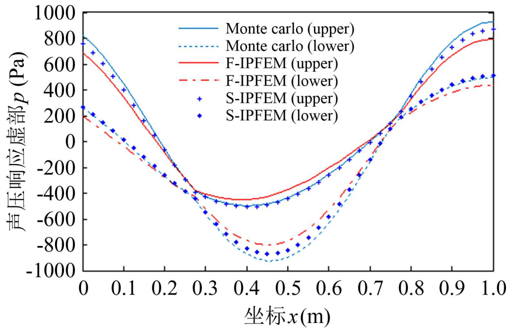

图 2 沿管道 x 轴的声压虚部上下界 ($f=300$ Hz)

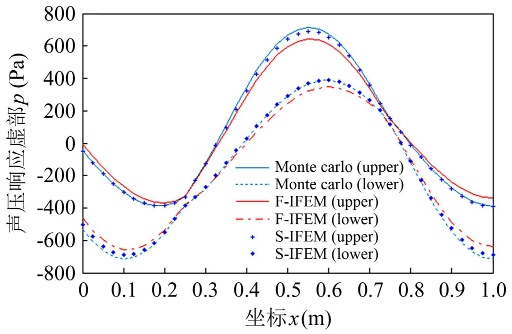

图 3 沿管道 x 轴的声压虚部上下界 ($f=400$ Hz)

从图 2 和图 3 可以看出, 对二维管道声学问题，S-IPFEM 比 F-IPFEM 的计算精度高, 能够得到较为准确的声压响应区间上下界，验证了 S-IPFEM 的有效性。

为了便于分析对比，定义局部误差 (Le)

$$\mathrm{Le}=\frac{p^{\mathrm{monte}}-p}{p^{\mathrm{monte}}}\times 100\%,\tag{40}$$

式中， p^{monte} 为 Monte Carlo 计算的声压上下界， p 为近似区间方法计算的声压上下界。

S-IPFEM 求解声压响应的二阶 Taylor 展开摄动量时忽略了 Hessian 矩阵的非对角线元素。为了分析 Hessian 矩阵非对角线元素对 S-IPFEM 计算精度的影响，运用含 Hessian 矩阵所有元素的二阶区间摄动有限元法 (S-IPFEM (full)) 对不确定声场进行计算，并与 S-IPFEM 的计算结果进行对比分析。S-IPFEM(full) 先对声压响应进行二阶 Taylor 展开获得二阶 Taylor 展开摄动量表达式 (23), 接着利用 Monte Carlo 法计算声压响应二阶 Taylor 展开摄动量的不确定区间，获得声压响应上下界。S-IPFEM(full) 考虑了 Hessian 矩阵所有元素对计算结果的影响。

表 1 沿管道 x 轴的声压虚部上界结果比较 (f=300 Hz)

x (m)	Monte Carlo (Pa)	F-IPFEM		S-IPFEM		S-IPFEM (full)	
		声压虚部 (Pa)	Le	声压虚部 (Pa)	Le	声压虚部 (Pa)	Le
0.2	70	19	71%	49	29%	47	30.1%
0.4	−491	−449	−8.6%	−500	2.9%	−506	3.1%
0.6	−306	−254	−16.8%	−316	3.3%	−308	0.7%
0.8	244	222	9.0%	234	3.8%	235	3.2%
1.0	922	788	14.6%	859	6.8%	867	5.4%

表 2 沿管道 x 轴的声压虚部下界结果比较 (f=300 Hz)

x (m)	Monte Carlo (Pa)	F-IPFEM		S-IPFEM		S-IPFEM (full)	
		声压虚部 (Pa)	Le	声压虚部 (Pa)	Le	声压虚部 (Pa)	Le
0.2	−203	−219	7.8%	−189	−6.7%	−195	−3.0%
0.4	−824	−727	−11.7%	−779	−5.5%	−784	−4.2%
0.6	−728	−607	−16.5%	−669	−8.0%	−677	−6.1%
0.8	185	177	4.4%	190	−2.4%	186	−0.1%
1.0	492	434	11.8%	505	−2.5%	497	−1.1%

表 1 和表 2 给出了分析频率为 300 Hz 时不同区间摄动有限元法计算的声压虚部区间上界和区间下界结果以及它们相对 Monte Carlo 解的局部误差。

从表 1 和表 2 可以看出:

(1) 声速和空气密度的不确定系数为 0.1 时, F-IPFEM 的误差在 14% 左右, S-IPFEM 的误差在 5% 左右, S-IPFEM 有效改善了 F-IPFEM 的计算精度。

(2) 在声压响应较小的点, S-IPFEM 的计算结果相对误差增大, 但计算精度明显优于 F-IPFEM 。

(3) S-IPFEM 的计算精度略低于 S-IPFEM(full), 这表明在求解二阶 Taylor 展开摄动量时, 省略 Hessian 矩阵的非对角线元素会带来一定的误差, 但相比计算效率的提高, 增加少量误差是可以接受的。

3.2 商务车声腔模型

图 4 为某商务车车内声腔二维简化模型。在声腔靠近发动机边界上施加法向振动速度 v_n=0.01 m/s 作为速度边界条件; 在声腔顶部靠近挡风玻璃的顶盖前部位置附着吸声材料, 阻抗边界系数为 A_n, 其余边界为刚性壁。采用 hypermesh 软件将轿车车内声腔离散为四边形网格模型, 调整为规整的网格, 将其单元和节点信息导入声学有限元程序求解声压响应。二维车身声腔网格的四边形单元个数为 1013, 节点数为 1173 。

考虑环境因素和载荷的不可预测性以及材料物理属性的多向性, 将空气的密度、声速、阻抗边界系数都视为区间变量。假定空气密度 ρ 的变化范围为 1.184~1.252 kg/m^3, 其不确定系数为 0.06; 假定声速 c 的变化范围为 331.5~349.2 m/s, 其不确定系数为 0.05 。假定阻抗边界系数 A_n 的变化范围为 0.0014~0.0015 m/(Pa·s), 其不确定系数为 0.07 。分别运用一阶区间摄动有限元法、二阶区间摄动有限元法和 Monte-Carlo 法对车内二维声腔网格模型进行计算, 对比分析声压实部和声压虚部计算结果。图 5 和图 6 分别表示分析频率为 180Hz 时商务车声腔底部边界线声压实部和虚部的区间上下界图。

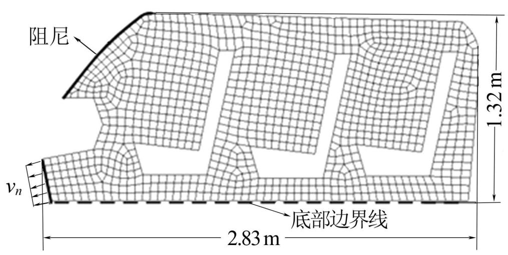

图 4 简化的二维商务车声腔网格模型

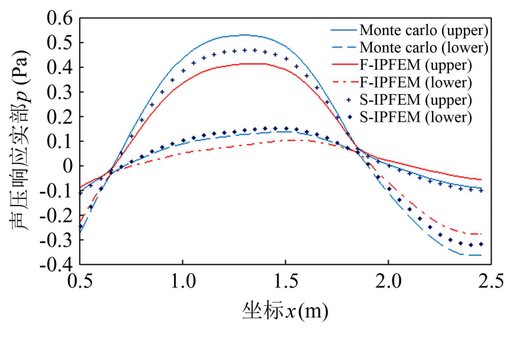

图 5 商务车声腔底部边界线声压实部上下界

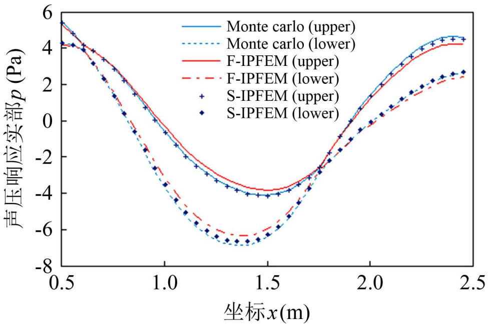

图 6　商务车声腔底部边界线声压虚部上下界

二维商务车声腔模型的声压响应上下界图表明，二阶区间摄动有限元法比一阶区间摄动有限元法的计算精度高，进一步验证了二阶区间摄动有限元法的有效性。

采用 Monte-Carlo 法求解声压响应上下界时，进行了 10000 次迭代计算。由于每一次迭代都需要进行一次有限元运算，计算效率很低。F-IPFEM 和 S-IPFEM 只需要进行一次有限元运算，利用区间中点的响应特性可以快速获得声压响应的上下界，极大程度减轻了计算负担，可以应用于大型的不确定声场声压响应分析。S-IPFEM 方法对声压响应进行二阶泰勒展开并基于二次函数极值定理求解声压响应的二阶 Taylor 展开摄动量，相比 F-IPFEM 方法，其计算效率略有降低，由于计算过程中不需要直接求解区间逆矩阵，S-IPFEM 方法仍然保持了很高的计算效率。

4　结论

本文将二阶区间摄动法引入区间不确定声场模型，建立了声学二阶区间摄动有限元法，并将其用于不确定声场的声压响应分析。以二维管道声场与商务车声腔模型为数值算例，研究结果表明：

(1) 二阶区间摄动有限元法比一阶区间摄动有限元法精度更高，适合不确定度更大的区间不确定声场声压响应分析。

(2) 对于复杂结构的不确定声场分析模型，声压响应与系统参数之间非线性较强，考虑二阶 Taylor 展开项能有效减少区间摄动法的近似误差。

(3) 二阶区间摄动有限元法和一阶区间摄动有限元法的计算效率都很高。二阶区间摄动有限元法的计算效率略低于一阶区间摄动有限元法，但是相对于计算精度的提高，增加的计算负担是可以接受的。

参　考　文　献

1　李义丰，李国峰，王云．卷积完全匹配层在两维声波有限元计算中的应用．声学学报， 2010; **35**(6): 601—607

2　夏百战，于德介，姚凌云．维多流体域耦合声场的光滑有限元解法．声学学报， 2012; **37**(6): 601—609

3　Stefanou G. The stochastic finite element method: past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009; **198**(9–12): 1031—1051

4　李杰，陈建兵．随机动力系统中的概率密度演化方程及其研究进展力学进展． 2010; **40**(2): 171—178

5　Edgecombe S, Linse P. Monte Carlo simulation of two interpenetrating polymer networks: structure, swelling, and mechanical properties. *Polymer*, 2008; **49**(7): 1981—1992

6　邱志平，马丽红．不确定非线性结构动力响应的区间分析方法．力学学报， 2006; **38**(5): 646—655

7　Moens D, Hanss M. Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011; **47**(1): 4—16

8　Qiu Zhiping, Chen Suhuan, Elishakoff I. Bounds of eigenvalues for structures with an interval description of uncertain-but-non-random parameters. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996; **7**(3): 425—434

9　Qiu Zhiping, Elishakoff I. Antioptimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998; **152**(3): 361—372

10　Xia Baizhan, Yu Dejie. Modified sub-interval perturbation finite element method for 2D acoustic field prediction with large uncertain-but-bounded parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 2012; **331**(16): 3777—3781

11　Xia Baizhan, Yu Dejie. Modified interval perturbation finite element method for a structural-acoustic system with interval parameters. *Journal of Applied Mechanics-ASME*, 2013; **80**(4): 041027.1—041027.8

12　费赫尔金哥尔茨著，叶彦谦等译．微积分学教程．北京：人民教育出版社， 1978

13　Chen Suhuan, Ma Liang. An efficient method for evaluating the natural Frequency of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Comp. Struct.*, 2009; **87**(9–10): 582—90

14　Fujita K, Takewaki I. An efficient methodology for robustness evaluation by advanced interval analysis using updated second-order Taylor series expansion. *Engineering Structures*, 2011; **33**(12): 3300—3305