第 41 卷第 1 期　　声 学 学 报　　Vol. 41, No. 1
2016 年 1 月　　ACTA ACUSTICA　　Jan., 2016

一种快速稀疏贝叶斯学习的水声目标方位估计方法研究*

王　彪[1,2]　朱志慧[1]　戴跃伟[1]
(1　江苏科技大学电子信息学院　镇江　212003)
(2　东南大学水声信号处理教育部重点实验室　南京　210000)
2014 年 7 月 3 日收到
2015 年 5 月 20 日定稿

摘要　针对以具有时序结构的稀疏贝叶斯学习 (Temporally multiple sparse Bayesian learning, TMSBL) 为重构算法的水声目标 DOA (Direction-of-arrival) 估计方法存在运算速度慢的问题，结合块稀疏贝叶斯学习 (Block-spare Bayesian learning, BSBL) 理论框架下 DOA 估计模型与特点，采用 MacKay 提出的定点方法 (Fixed-point method) 对 TMSBL 算法中的核心超参量进行求解，提出一种快速的水声目标方位估计稀疏贝叶斯学习的方法，该方法具有运算速度快，重构概率高的特点，并通过实验仿真从运算时间、失败率和均方根误差等方面与 TMSBL 算法进行比较，验证了该方法的可行性与有效性。
PACS 数：43.30, 43.60

A fast underwater acoustic target direction of arrival estimation method based on sparse Bayesian learning

WANG Biao[1,2]　ZHU Zhihui[1]　DAI Yuewei[1]
(1　*School of Electronic and Information, Jiangsu University of Science and Technology*　Zhenjiang　212003)
(2　*Key Laboratory of Underwater Acoustic Signal Processing, Southeast University*　Nanjing　210000)
Received Jul. 3, 2014
Revised May 20, 2015

Abstract　The direction of arrival (DOA) estimation methods for underwater acoustic target which using temporally multiple sparse Bayesian learning (TMSBL) as the reconstructing algorithm, were slower for the process of computation. To solve this problem, a fast underwater acoustic target direction of arrival estimation based on sparse Bayesian learning research was proposed. Analyzing the model characteristics of block-spare Bayesian learning framework for DOA, the algorithm proposed to obtain the value of core hyper-parameter through MacKay's fixed-point method to estimate the DOA, so it spent less time for computation, and had more superior recovery performance than TMSBL algorithm. Simulation results verified the feasibility and effectiveness of the proposed algorithm by comparing the DOA estimation performance with TMSBL and other traditional DOA algorithms through different facets such as operation time, failure rate and root mean square error.

引言

方位角 (Direction-of-arrival, DOA) 估计[1−2] 是水声阵列信号处理领域的主要研究方向之一，传统的水声目标方位估计存在瑞利限，精度不高，而经典的水声目标高分辨 DOA 估计算法 MUSIC (Multiple signal classification) 和 ESPRIT (Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques) 算法[3−4]，它们主要是根据阵列接收信号的统计特性来估计目标的方位角，因此需要大量测量数据，在快拍数较少和信噪比较低的情况下，估计性能明显恶化。

* 国家自然科学基金 (11204109, 11574120) 、江苏省高校自然科学基金 (12KJB510003, 13KJB510007) 、东南大学水声信号处理教育部重点实验室开放基金 (UASP1503) 、江苏省青蓝工程、江苏高校优势学科建设工程−船舶与海洋工程及江苏科技大学青年学者计划项目资助

近年来压缩感知理论 (Compressed sensing, CS)[5−6] 的提出为信号采集与处理提供了新的思路 [7−8]。而基于 CS 理论的水声目标方位估计也受到了研究者的关注，自 CS 理论建立以来，已经有很多有效的基于 CS 的 DOA 估计算法被相继提出，具有代表性的包括基追踪 (Basis pursuit, BP) 算法 [9−10] 和匹配追踪 (Matching pursuit, MP) 算法 [11] 等。 BP 算法以最小范数的解来逼近范数的解，然后通过线性规划的方法得到最优解，但这种方法存在计算量较大，运算较慢的问题；而 MP 算法作为一种贪婪算法，虽然其运行速度较快，但实际中往往不能得到最优解。而在实际的应用中，水声目标 DOA 估计不仅希望得到最优解，同时还要求满足计算量较小、运算速度快且分辨率高的要求。因此，现有的一些基于 CS 的 DOA 估计方法对于水声目标的 DOA 估计实际应用来说存在一定的局限。

文献 12 提出了针对多测量矢量的稀疏贝叶斯学习的 DOA 估计算法，该方法具有较高的估计精度，但是该算法建立在信号源满足独立同分布的假设条件，仅考虑到源信号的空间结构，并未考虑到信号源的时间相关特性，因此针对具有时间特性的信号时表现出性能较差的特点。文献 13 和文献 14 中针对源信号间的时序结构特性提出了 TMSBL (Temporally multiple sparse bayesian learning) 算法，虽然其在时间相关的情况下具有更好的重构性能，但是其与其它 MMV (Multiple measurement vectors) 算法相比运行速度还是较慢，不能满足实际应用的需求。

最近， Zhang 提出了一种针对 TMSBL 算法的改进算法 [15]，这个改进的算法是用 MacKay 提出的定点方法 (Fixed-point method)[16] 对稀疏贝叶斯学习 (Sparse Bayesian learning, SBL)[17−18] 的超参数进行估计，得到新的超参数学习规则，这个算法降低了计算量，减少了计算时间，并且相比于 TMSBL 算法有较好的精确度，这个方法的提出为具有时间相关特性的水声目标 DOA 估计方法的实现提供了一种新的方法和思路。本文在研究分析 TMSBL-FP 算法原理基础上，结合块稀疏贝叶斯学习框架下 DOA 估计的特点，提出了一种快速的基于稀疏贝叶斯学习的水声目标 DOA 估计方法。实验表明，本文方法在估计精确度和运行速度方面均优于基于 TMSBL 算法的 DOA 估计方法，且重构概率有了一定的提高。

1 水声 DOA 稀疏模型

假设有 M 个远程水声目标信号，接收阵列为含有 N 个阵元的均匀线阵 (ULA)，阵元间距为 $d=\lambda/2$ (其中 λ 为入射信号的波长)，则 t 时刻阵列接收的基带信号 $y(t)$ 可表示为：

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{e}(t),\quad t\in\{t_1,\cdots,t_L\},\qquad(1)$$

式中：

$$\boldsymbol{A}(\theta)=[a(\theta_1),a(\theta_2),\cdots,a(\theta_M)],$$
$$\boldsymbol{a}(\theta_m)=[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x_1\sin\theta_m},\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x_2\sin\theta_m},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x_N\sin\theta_m}]^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{a}(\theta_m)$ 对应 θ_m 方向入射信号的导向矢量，$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_M$ 表示 M 个水声目标信号的方位角，$b_n=(n-(N+1)/2)d$ 表示线阵中传感器的位置， $\beta=2\pi/\lambda,\boldsymbol{e}(t)$ 表示阵列的观测噪声， $x(t)$ 表示投射到阵列上的水声目标信号，其为一个未知待求的源矩阵， L 表示快拍数。

将式 (1) 扩展到 MMV 模型中：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E},\qquad(2)$$

式中， $\boldsymbol{Y}\triangleq[y_{.1},y_{.2},\cdots,y_{.L}]\in\mathbb{R}^{N\times L}$，表示可以得出的 L 个测量矢量的观测矩阵； $\boldsymbol{X}\triangleq[x_{.1},x_{.2},\cdots,x_{.L}]\in$, $\mathbb{R}^{M\times L}$，表示未知的待求的源矩阵； $\boldsymbol{E}\triangleq[e_{.1},e_{.2},\cdots,e_{.L}]\in\mathbb{R}^{N\times L}$，表示未知的噪声矩阵。式 (2) 可以重新写为如下所示的稀疏表示形式：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\Phi}\widetilde{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{E},\qquad(3)$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}=[\phi(\theta_1),\phi(\theta_2),\cdots,\phi(\theta_K)]$ 为覆盖所有空间的信号可能入射方向的空域离散角度集，一般满足：$K\gg N>M$，目标信号的方位角应该包含在 K 个角度 θ_k 中， DOA 的求解问题是关于未知水声信号源矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$，它的解在空间域是稀疏的，非零目标信号的位置即对应于水声目标信号的方位角。

2 基于 TMSBL-FP 算法的水声目标 DOA 估计

本节主要思路是首先建立基于块稀疏贝叶斯学习框架的水声目标 DOA 估计模型，然后在该模型的基础上通过 TMSBL-FP 算法求解超参量 $\lambda,\gamma_i,\boldsymbol{B}_i,\forall_i$ 的值，最后获得水声目标信号源 x 的最大后验概率从而实现对目标信号源的 DOA 估计。

2.1 建立信号 AR(1) 模型

因为水声目标信号是具有时序结构的信号，所以用一阶自回归 AR(1) 模型来描述这类信号，其满足下式：

$$\begin{aligned}&\widetilde{X}_{i,j+1}=\beta\widetilde{X}_{i,j}+\sqrt{1-\beta}n_{i,j},\\&i=1,\cdots,K;\quad j=1,\cdots,L\end{aligned}\qquad(4)$$

其中 $\beta\in(-1,1)$ 是 AR(1) 的系数, 如果 $\beta=0$, 则上述的 MMV 模型描述的信号即为独立同分布信号源; 如果 $\beta=\pm1$, 则上述的 MMV 模型即转化为 SMV(单测量矢量) 模型。K 表示为水声目标被划分的空间位置数， L 表示快拍数。

2.2 基于块稀疏贝叶斯学习框架的水声目标 DOA 估计模型

块稀疏贝叶斯学习 (Block-spare bayesian learning, BSBL) 理论框架主要是针对信号源之间时间相关性的特点来实现信号高效重构的一种统计方法, 其主要思想是利用正定矩阵模型化数据间的时变性，通过贝叶斯学习规则和对超参量的估计，获取源信号的最大后验估计, 从而实现对源信号的重构。因为水声目标信号能被稀疏表示，且具有时间相关性，符合块稀疏信号的特性，因此本文将 BSBL 框架应用于水声目标 DOA 估计中, 提出基于 BSBL 框架的水声目标 DOA 估计模型。

首先假设水声目标信号 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{i.}(\forall i)$ 服从高斯分布。即

$$p(\widetilde{\boldsymbol{X}}_{i.};\gamma_i,\boldsymbol{B}_i)\sim N(0,\gamma_i\boldsymbol{B}_i),\quad i=1,2,\cdots,K \tag{5}$$

式中 γ_i 为非负超参量, 其值与水声信号源 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 分布的行稀疏未知先验方差有关，它与解的稀疏程度密切相关，当 γ_i 的值为 0 时，相应的 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_i$ 行元素全部为 0, 因此 γ_i 具有稀疏性。$\boldsymbol{B}_i$ 为正定矩阵，模型化 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_i$ 间的时间相关性。$\gamma_i\boldsymbol{B}_i$ 为 $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 的密度协方差矩阵。

其次，设定 $\boldsymbol{y}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}})\in\mathbb{R}^{NL\times I}$, $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{I}_L$, $\boldsymbol{x}=\mathrm{vec}(\widetilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}})\in\mathbb{R}^{ML\times I}$, $\boldsymbol{e}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})$, 则基于块稀疏贝叶斯学习的 DOA 估计模型可以表示为:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}. \tag{6}$$

假设噪声为零均值的平稳高斯随机过程，不同阵元上的噪声不相关，且噪声与信号不相关，所以噪声向量满足如下高斯分布：

$$p(e_i)\sim N(0,\lambda), \tag{7}$$

式中 e_i 表示 $\boldsymbol{e}$ 中第 i 个元素，λ 表示方差，于是通过式 (7) 可以得出：

$$p(\boldsymbol{y}\,|\boldsymbol{x};\lambda)\sim N_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{I}). \tag{8}$$

则 $\boldsymbol{x}$ 的先验分布：

$$p(\boldsymbol{x};\gamma_i,\boldsymbol{B}_i,\forall i)\sim N_x(0,\boldsymbol{\Sigma}_0), \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 被定义为:

$$\boldsymbol{\Sigma}_0=\begin{bmatrix}\gamma_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_KB_K\end{bmatrix}. \tag{10}$$

根据贝叶斯准则可以推导得出水声信号源 x 服从均值为 u_x, 方差为 $\boldsymbol{\Sigma}_x$ 的后验高斯分布，表达式如下：

$$p(\boldsymbol{x}\,|\boldsymbol{y};\lambda,\gamma_i,\boldsymbol{B}_i,\forall_i)=N_x(u_x,\boldsymbol{\Sigma}_x), \tag{11}$$

其中均值为：

$$u_x=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \tag{12}$$

协方差矩阵为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_x=&\left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\right)^{-1}=\\ &\boldsymbol{\Sigma}_0-\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0.\end{aligned} \tag{13}$$

此时均值和方差的求解过程转化为对超参量 $\lambda,\gamma_i,\boldsymbol{B}_i,\forall_i$ 的求解，当所有的超参量被估计出来之后，我们就可以得出水声信号源 $\boldsymbol{x}$ 的最大后验概率 (Maximum a posterior probability, MAP) 估计x^*为：

$$\begin{aligned}x^*\triangleq u_x=&(\lambda\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\\ &\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}.\end{aligned} \tag{14}$$

2.3 TMSBL-FP 算法的基本理论

TMSBL-FP 算法是基于 BSBL 框架推导出来的一种稀疏贝叶斯学习算法，根据式 (8) 和式 (9) 可求解代价函数 $L(\Theta)$ 的表达式 [13], 如下所示：

$$\begin{aligned}L(\Theta)\triangleq&-2\log\int\rho(\boldsymbol{y}\,|\boldsymbol{x};\lambda)\rho(\boldsymbol{x},\gamma_i,\boldsymbol{B}_i,\forall_i)\mathrm{d}x=\\ &\log|\boldsymbol{\Sigma}_y|+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{y},\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_y\triangleq\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$。

为了能够更好的推导出超参数的学习规则，我们通过公式推导来简化代价函数式 $L(\Theta)$, 其中 Θ 包括 3 个超参量 $\lambda,\gamma,\boldsymbol{B}$。首先根据 Sylvester 提出的行列式定理 (Determinant Theorem)[19] 将式 (15) 等号右边第 1 个表示式 $\log|\boldsymbol{\Sigma}_y|$ 转化为：

$$\begin{aligned}&\log|\boldsymbol{\Sigma}_y|=\log\left|\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{ML}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\right|=\\ &\log|\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{ML}}|+\log\left|\boldsymbol{I}_{NL}+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_0^{1/2}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0^{1/2}\right|=\\ &\log|\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{ML}}|+\log\left|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\right|+\log|\boldsymbol{\Sigma}_0|.\end{aligned} \tag{16}$$

式 (15) 等号右边第 2 个表示式 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{y}$ 可以转化为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Sigma}_y)^{-1}\boldsymbol{y}=&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}=\\ &\frac{1}{\lambda}\left\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}u_x\right\|_2^2+u_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}u_x,\end{aligned} \tag{17}$$

其中：

$$\begin{cases}u_x=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{\Sigma}_x=\left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}+\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\right)^{-1}.\end{cases}$$

结合式 (16) 和式 (17), 可以得出 $L(\Theta)$ 新的表达式为：

$$L(\Theta)=\log|\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{ML}}|+\log\left|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\right|+\log|\boldsymbol{\Sigma}_0|+\frac{1}{\lambda}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}u_x\|_2^2+u_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}u_x. \tag{18}$$

现在根据式 (18) 可以更加方便的求出各个超参量的学习规则，即通过最小化代价函数式 (18) 来进行求解。

采用 EM (Evidence maximization) 算法求解式 (17), 得出超参量 $\boldsymbol{B},\lambda$ 的表达式如下所示：

$$\boldsymbol{B}\leftarrow\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\frac{\boldsymbol{\Sigma}_x^i+u_x^i(u_x^i)^{\mathrm{T}}}{r_i}, \tag{19}$$

$$\lambda\leftarrow\frac{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}u_x\|_2^2+\lambda[K\times L-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1})]}{M\times L}. \tag{20}$$

对于超参量 γ 的学习规则，一旦确定了 γ_i 中非零元素的位置, 即可估计出水声目标信号的 DOA, 因此，γ 的学习规则是本文算法的核心，它的学习规则很大程度上决定了算法的计算复杂度、运行速度等性能，因此本文方法采用 FP (Fixed-point) 算法求解式 (18), 得出超参量 γ 的学习规则，表达式为：

$$\gamma_i\leftarrow\frac{(u_x^i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}u_x^i}{L-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_x^i\boldsymbol{B}^{-1})/\gamma_i}. \tag{21}$$

为了方便计算，采用如下近似来简化超参量 $\boldsymbol{B},\lambda,\gamma$ 的学习规则：

$$(\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{ML}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{ML}}+(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}})\otimes\boldsymbol{B})^{-1}\approx(\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{ML}}+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1}, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}\triangleq\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_M)$。

结合参考文献 20 提出的 MSBL 算法的结论，可推导得出如下结论：

$$\boldsymbol{\Xi}_x=\left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}. \tag{24}$$

根据式 (21) 的近似过程对本文的超参量进行简化处理，得出的结果如下：

$$\gamma_i\leftarrow\frac{\boldsymbol{X}_{i.}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}_{i.}^{\mathrm{T}}}{L(1-\Xi_{ii}/\gamma_i)},\quad\forall i. \tag{25}$$

$$\boldsymbol{B}\leftarrow\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}}{\|\widetilde{\boldsymbol{B}}\|_F}\text{，其中 }\widetilde{\boldsymbol{B}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{X}_{i.}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{i.}}{\gamma_i}+\eta\boldsymbol{I}, \tag{26}$$

$$\lambda\leftarrow\frac{1}{M\times L}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\Phi}\widetilde{\boldsymbol{S}}\|_F^2+\frac{\lambda}{M}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}], \tag{27}$$

其中 Ξ_{ii} 为矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$ 的对角元素。

2.4 基于 TMSBL-FP 算法的水声目标 DOA 估计步骤

由上述第 1 节内容可知，基于稀疏贝叶斯学习算法的 DOA 估计过程是通过求解超参量 $\lambda,\gamma_i,\boldsymbol{B}_i,\forall_i$ 的值, 获得信号源的最大后验概率实现对目标的方位角估计，按照上述理论的推导过程，对于式 (6) 问题的求解可以通过以下步骤来实现，本文用流程图来描述整个过程，如图 1 所示。

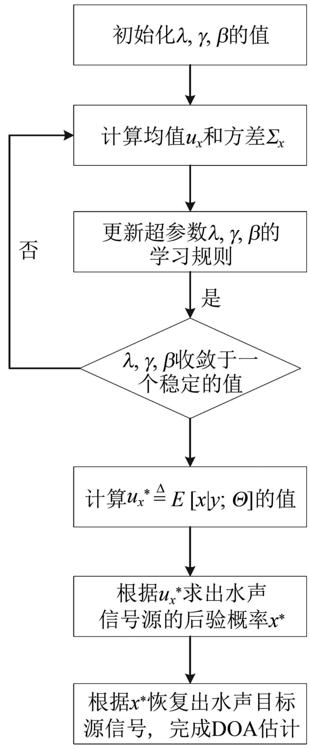


图 1 基于 TMSBL-FP 算法的水声目标 DOA 估计流程图

3 仿真实验及分析

本节通过仿真及对比，验证了前述理论推导的正确性及算法的有效性。在仿真中, 如无特殊说明, 参数做如下设置：设均匀线阵阵元数 $M=20$, 相邻阵元间的距离为 $d=\lambda/2$, 投影矩阵 ϕ 为 $N\times M$ 的随机高斯矩阵，且压缩数 $N=10$。目标空间离散数 $K=361$, 目标数 $J=2$, 水声目标的真实方位角为 $[-5^\circ\ \ 5^\circ]$, 源信号时间相关系数为 $\beta=0.8$, 并且输入信噪比 SNR = 10 dB, 快拍次数 $L=100$。定义 DOA 估计均方根误差 (Root-mean-square-error, RMSE) 为：

$$\mathrm{RMSE}=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t}^{T}(\widehat{\theta}_{jt}-\theta_j)},$$

式中 T 为独立蒙特卡洛实验的总次数，仿真中均为 100 次，J 为信号源总个数，θ_j 为第 j 个信号源 DOA

真实值，$\widehat{\theta}_{jt}$ 为第 t 次蒙特卡洛实验得到的相应估计值。

3.1 TMSBL-FP 算法与 TMSBL 算法 DOA 估计性能分析

(1) 算法可行性分析

图 2 为空间中存在多个信号源情况下所提算法实现水声目标 DOA 估计。在仿真中，信号源入射角分别为 $-20°, -17°, 10°$。从图中可以看出无论信号源间距较近或者较远，本文算法均有很尖锐的峰值，说明本文所提方法实现水声目标的 DOA 估计是可行的。

图 3 将本文方法与常用的 MVDR 算法和波束形成算法以及 TMSBL 算法相比较，从仿真结果可以直观的看出，上述方法除 Beaforming 算法不能有效分辨出两个角度，其它 3 种方法均能实现水声目标 DOA 估计，而且本文方法具有较高的 DOA 估计精度，与 TMSBL 算法和 MVDR 算法相比，在总体性能上较好，具有一定的优势。下面将进一步分析本文方法的优越性。

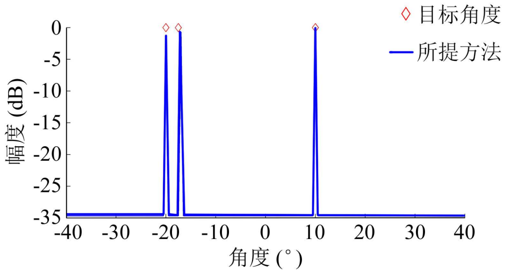


图 2　所提方法实现水声目标 DOA 估计

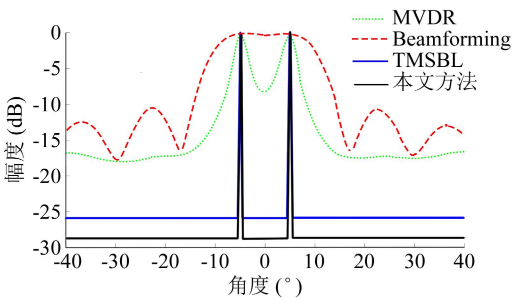


图 3　各种方法实现水声目标 DOA 估计的性能比较

(2) 运算耗时分析

在所述实验条件下，计算出各算法实现 DOA 估计所用时间，结果如表 1 所示。

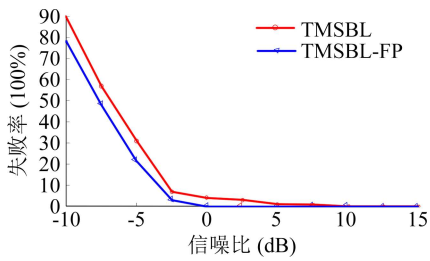
表 1　各种方法实现 DOA 估计所用时间

方法	MVDR	Beamforming	TMSBL	本文方法
时间 (s)	0.0634674	0.06350787	1.57497	0.0620593

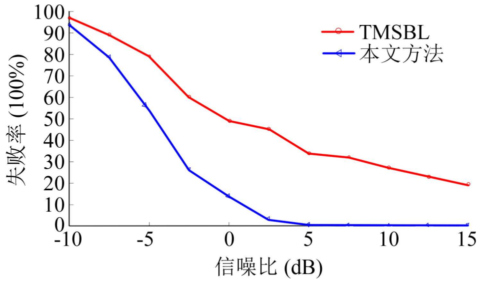
从表中可以看出 MVDR 算法以及 Beamforming 算法所用时间相当，TMSBL-FP 算法实现 DOA 估计所用的时间相对较少，而这 3 种算法的运算时间均远小于 TMSBL 算法，基于 TMSBL 算法的 DOA 估计运算的时间几乎是本文所提方法的 20 倍以上，因此 TMSBL-FP 算法相对于 TMSBL 算法在计算量和运算时间上具有非常大的优势，这对于实际的应用具有非常重要的意义和价值。

(3) 估计失败率分析

估计失败率是基于稀疏重构类估计方法重要的性能衡量指标，所以本仿真针对所提算法和 TMSBL 算法的估计失败率进行比较分析。本实验分析当阵元个数分别为：$N=40$ 和 $N=20$ 时两种方法在不同信噪比条件下实现 DOA 估计的失败率。从图 4(a) 中可以看出，当 $N=40$ 时，本文方法在低信噪比 (SNR $<$ 0 dB) 时，失败率略高，但是随着信噪比的不断增大，本文算法能以较高的概率实现 DOA 估计；TMSBL 算法相比较于本文算法失败率更高，TMSBL 算法在信噪小于 5 dB 时 (SNR $<$ 5 dB) 时失败率均高于本文算法。从图 4(b) 中分析发现，当 $N=20$ 时，TMSBL 算法失败率很高，即使当信噪比很高时，TMSBL 算法还是不能以全概率实现 DOA 估计，而本文算法虽然在信噪比较低时，失败率略高，但是在信噪比达到 5 dB 时就能以全概率实现 DOA 估计。通过比较可知，在较少阵元和较低的信噪比情况下，本文方法相比于 TMSBL 算法能以更高概率实现 DOA 估计。



(a)　$N=40$



(b)　$N=20$

图 4　不同信噪比时 2 种算法实现 DOA 估计失败率

(4) 均方根误差分析

为了能更好地分析本文方法的估计性能，本节比较各种算法的估计误差。在不同信噪比条件下，分别计算本文方法和 TMSBL 算法实现 DOA 估计的均方根误差，结果如图 5 所示。从图中可以看出，当信噪比较高 (SNR > 2 dB) 时，两种方法均方根误差都比较小，但是当信噪比较低 (SNR < −2 dB) 时，本文方法与 TMSBL 算法虽然估计误差较大，但是相对于 TMSBL 来说本文算法误差相对较小，能够保持误差在 0.35 以下。可见在低信噪比时本文方法的精度优于基于 TMSBL 算法的 DOA 估计。

通过仿真分析，采用 TMSBL-FP 算法实现水声目标 DOA 估计是切实可行的。并且与 TMSBL 算法相比其在信号重构上失败率较低，而且实现方位角估计时均方根误差值较低，更为重要的是其在时间上所具有的显著优势是 TMSBL 算法所不能比的。这对于对计算时间要求较高的实际应用来说具有很大的意义和价值。

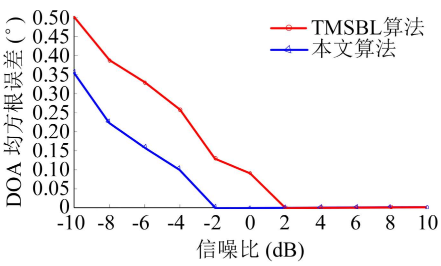


图 5 不同信噪比时两种算法均方根误差比较

5 结论

本文详细介绍了块稀疏贝叶斯学习框架，结合块稀疏贝叶斯学习原理和定点算法以及水声目标 DOA 估计的特点，提出了一种快速的基于稀疏贝叶斯学习的水声目标 DOA 估计方法。通过与 TMSBL 算法的比较实验证明，本文方法在大大减少实现 DOA 估计所用时间的同时还能实现相对于 TMSBL 算法性能较好的 DOA 估计。快速的 DOA 估计算法缩短了所用时间、减少了计算量，从而降低了对硬件和软件的要求，这对于实际的应用来说具有较大的优势。本文的内容仅仅是建立于对窄带信号的分析，因为实际生活中更多的是宽带信号，所以在以后的研究中应该将本文所提算法扩展到对宽带信号的分析。

参 考 文 献

1 张鹏，鲍明，冯大航，杨军，李晓东. 加权最大似然波达方向估计算法及其应用研究. 声学学报， 2010; **35**(2): 235—240

2 鄢社锋，马远良，侯朝焕. 宽带波束域相干信号子空间高分辨方位估计. 声学学报， 2006; **31**(5): 418—424

3 Liao F, Li P, Liu W. Auditory filter based broadband MUSIC algorithm for sound source localization. *Chinese Journal of Acoustics*, 2013; **32**(4): 439—453

4 Zhu W, Liu X, Zhang D, Liao Z, Zhang F. Estimating the directions of arrival based on multi-subarray subspace fitting. *Chinese Journal of Acoustics*, 2006; **25**(1): 16—25

5 Baraniuk R G. Compressive sensing. *IEEE Signal Process*, 2007; **24**(4): 118—124

6 Malioutov D, Cetin M, Willsky A. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005; **53**(8): 3010—3022

7 Li Y , Wu W , Li P. The application of compressed sensing in synthetic transmit aperture medical ultrasound imaging. *Chinese Journal of Acoustics*, 2013; **32**(3): 254—263

8 Jian Z, Wang X. A modified voice conversion algorithm using compressed sensing. *Chinese Journal of Acoustics*, 2014; **33**(3): 323—333

9 Cai T T, Xu Guangwu, Zhang Jun. On recovery of sparse signals via l_1 minimization. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009; **55**(7): 3388—3397

10 王彪，李超，戴跃伟等. 基于空域压缩采样的水声目标 DOA 估计方法. 兵工学报， 2013; **34**(11): 1479—1483

11 Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements Via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007; **53**(11): 4655—4666

12 孙磊，王华力，许广杰等. 基于稀疏贝叶斯学习的高效 DOA 估计方法. 电子与信息学报， 2013; **35**(5): 1196—1201

13 Zhang Z, Rao B D. Sparse signal recovery with temporally correlated source vectors using sparse Bayesian learning. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011; **5**(5): 912—926

14 Zhang Z, Rao B D. Recovery of block sparse signals using the framework of block sparse Bayesian learning. 2012 International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Kyoto Japan, 2012, USA: IEEE, 2012: 3345—3348

15 Zhang Z. Sparse signal recovery exploiting spatiotemporal correlation. Ph.D. Dissertation, University of California, 2012

16 MacKay D. Bayesian interpolation. *Neural Computation*, 1992; **4**(3): 415—447

17 Tipping M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine. *Journal of Machine Learning Research*, 2001; **1**(1): 211—244

18 Balkan O, Kreutz-Delgado K, Makeig S. Localization of more sources than sensors via jointly-sparse Bayesian learning. *IEEE Signal Processing*, 2014; **21**(2): 131—134

19 Ito M, Okada S. An application of Cauchy-Sylvester's theorem on compound determinants to a BC_n-Type Jackson integral. Partitions, Q-Series, and Modular Forms, 2012; **23**: 145—157

20 Wipf D P, Rao B D. An empirical bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007; **55**(7): 3704—3716