

非规则封闭空间声场建模的 Chebyshev- 变分法 及其固有声学特性分析*

陈跃华^{1,2†} 靳国永² 刘志刚² 冯志敏¹

(1 宁波大学海运学院 宁波 315211)

(2 哈尔滨工程大学动力与能源工程学院 哈尔滨 150001)

2017 年 2 月 17 日收到

2017 年 5 月 25 日定稿

摘要 针对非规则封闭空间声场建模问题, 提出了一种基于 Chebyshev- 变分原理的声场建模方法。该方法首先选取包围非规则声场的矩形空间并将此矩形空间内的声压函数展开成三重 Chebyshev 级数形式, 然后通过坐标变换得到定义域空间中的声场势能和声场动能, 最后按照里茨方法对声场的拉格朗日泛函进行求解, 得到声场的特征方程并求得声场固有频率和模态。通过与曲面声场的数值结果对比, 验证了本建模方法的正确性和有效性。在此基础上研究具有不同倾角的梯形声场固有特性, 分析内部凹槽深度对“凹”型声场频率和模态的影响。结果表明, 梯形声场模态会随着倾角增大而逐步演变; “凹”型声场低阶频率随凹槽深度的增加而逐渐减小, 但第一阶频率却呈现先减小后增大的特点。

PACS 数: 43.20, 43.40, 43.50, 43.55

Modeling and acoustic analysis of irregular sound enclosure by using Chebyshev-variational method

CHEN Yuehua^{1,2} JIN Guoyong² LIU Zhigang² FENG Zhimin¹

(1 Ningbo University Ningbo 315211)

(2 Harbin Engineering University Harbin 150001)

Received Feb. 17, 2017

Revised May. 25, 2017

Abstract A modeling method for irregular sound enclosure is proposed based on the Chebyshev-variational theory. A rectangular space is firstly assumed to bound the irregular sound space and the sound pressure in the rectangular space is expressed as triple-Chebyshev series. Next, the coordinate transformation is performed and the Lagrangian functional of the irregular sound space is obtained. At last, the Lagrangian functional is solved under the frame work of Ritz method. The acoustic characteristic equation of the enclosure is deduced and the eigenpairs are obtained. The accuracy of the present method is validated according to the agreement between the present results and the finite element results for an enclosure with curved surface. Furthermore, the acoustic characteristics of trapezoidal enclosure and enclosure with inner groove are investigated. The results show that the mode shapes of trapezoidal sound space will change with the increase of inclination angle and the natural frequencies (except the first order) of sound space with rectangular inner groove will decrease with the increase of groove depth.

引言

非规则声场广泛存在于工程实际中, 比如机舱、

车厢、船舱、建筑房间等, 对这类声场声学特性的研究一直是声学领域的热门话题^[1-22]。尽管由波动理论可以得到均匀界面规则声场的声压精确解, 且基于此模型的研究结论常被用于认识和理解具有

* 国家自然科学基金项目 (51505237, 51775125, 51675286) 和宁波大学王宽诚幸福基金项目资助

† 通讯作者: 陈跃华, chen Yuehua@nbu.edu.cn

复杂形状的封闭空间的声学特性问题,但由于非规则声场几何形状和边界条件的复杂性,一般认为只能提出非规则声场的形式解而无法得到精确的解析解^[1]。为了描述梯形声场声压模态,Sum 和 Pan^[2-3]提出了用矩形声场模态匹配对应的梯形声场模态的方法。实际上,可通过仿射变换将梯形声场转化为矩形声场,但这一方法局限于多边形声场,在处理具有弯曲边界的声场时面临约束。Missaoui 和 Cheng^[5]提出了一种联合积分-模态方法 (the combined integro-modal method) 来研究非规则声场声学问题。这一方法要求将整个声场离散为一系列矩形子声场,并假设相邻子声场的耦合界面上存在质量和刚度均为零的薄膜。显然,子声场数目越多,所得结果与真值越接近。采用相同的方法,Cheng 及其合作者对带分隔甲板的机舱声场系统^[6-7]以及带矩形顶板的梯形声场系统^[8-9]的振声耦合问题进行了研究。耿厚才等^[11]巧妙地运用模态综合法与有限元法,对同时受到外部力激励和声激励作用下的复杂形状板腔耦合系统有源消声问题进行了研究,指出利用结构声辐射可以较好地控制腔内噪声。罗超等^[12]采用格林函数法推导了板腔模态对应的声压振幅及结构振速响应,计算得到了板腔模态耦合系数,建立了适用于非规则结构-声耦合系统的响应求解模型。吴九汇等^[13]将覆盖域方法应用到凸多面体形状的封闭声场中,将具有复杂形状的薄壳内部声场转化为简单球壳内部声场的叠加,给出了封闭薄壳内部散射声场表达式。然而,在将简单球壳内散射声场声压表述为球谐函数形式时,其数值求解的收敛性较慢。为此,张肃和陈南^[16]提出将声场展开式中的球谐函数用 Legendre 函数替换,改善了复杂封闭空间声场的求解效率。利用数值方法可对复杂形状声场进行研究^[18-22],但数值方法在中高频分析方面需较多的计算资源,且在规律性分析方面缺乏灵活性。事实上,在已发表的文献研究中,对复杂形状声场的理论研究尚不多见。因此,开展对复杂形状封闭空间声场的研究具有重要意义。

近来,文献 23 采用 Chebyshev-变分方法对具有弹性边界和阻抗壁面的矩形板-腔耦合系统的振声特性问题进行了分析。本文在此基础上,将 Chebyshev-变分方法拓展到具有复杂形状的封闭声场,建立了分别具有倾斜壁面、弯曲壁面以及内部凹槽的非规则声场自由振动模型。首先选取一个包络非规则声场的矩形空间,将其内部声场声压函数定义为三重 Chebyshev 级数展开式;再根据 Chebyshev 多项式定义域对矩形空间进行坐标变换,计算得到变换后的声场

势能和声场动能;最后按照里茨方法求解未知场变量系数,得到非规则声场固有频率和模态。通过与曲面声场、梯形声场和“凹”型声场的数值仿真对比,验证了本方法的正确性和有效性。

1 理论模型

考虑三维封闭声场声学问题。设任意一个刚性声场内充满空气,记此声场占据的空间为 V , 边界为 ∂V , 声场内声速为 c_0 , 空气密度为 ρ , 则声场的波动方程和边界条件为^[24]:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, \omega) + k^2 p(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (\mathbf{r} \in V), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (\mathbf{r} \in \partial V), \quad (2)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为边界 ∂V 的外法向单位矢量, $k = \omega/c_0$ 为波数, $p(\mathbf{r}, \omega)$ 为声场 V 内一点 $\mathbf{r}$ 处角频率为 ω 的稳态声压。

用声压的微扰动 $p^*(\mathbf{r}, \omega)$ 乘方程 (1) 和 (2), 对方程 (1) 在空间 V 内积分, 对方程 (2) 在边界 ∂V 上积分, 再对两积分求和, 得:

$$\begin{aligned} & \int_V p^*(\mathbf{r}, \omega) [\nabla^2 p(\mathbf{r}, \omega) + k^2 p(\mathbf{r}, \omega)] dV + \\ & \int_{\partial V} p^*(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial p(\mathbf{r}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

由高斯定理可知, 在闭区域 ∂V 内, 方程 (3) 中第 2 项面积分可化为体积分:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V} p^*(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial p(\mathbf{r}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} dS = \\ & - \int_V [\nabla p^*(\mathbf{r}, \omega) \nabla p(\mathbf{r}, \omega) + p^*(\mathbf{r}, \omega) \nabla^2 p(\mathbf{r}, \omega)] dV. \end{aligned} \quad (4)$$

将方程 (4) 代入方程 (3) 中并化简, 可得:

$$\int_V [\nabla p^*(\mathbf{r}, \omega) \nabla p(\mathbf{r}, \omega) - k^2 p^*(\mathbf{r}, \omega) p(\mathbf{r}, \omega)] dV = 0. \quad (5)$$

令 $p^*(\mathbf{r}, \omega) = \delta p(\mathbf{r}, \omega)$, 则方程 (5) 可写为:

$$\delta \int_V \left\{ \frac{[\nabla p(\mathbf{r}, \omega)]^2}{2\rho\omega^2} - \frac{[p(\mathbf{r}, \omega)]^2}{2\rho c_0^2} \right\} dV = 0. \quad (6)$$

方程 (6) 即为声场波动方程和边界条件的变分格式, 积分号内表达式即为声场的拉格朗日泛函。从以上推导过程可知, 此变分泛函与波动方程是等价的。直接由波动方程 (1) 和边界条件方程 (2) 求得适用于非规则声场的理论解是困难的, 因而可通过求解等价的变分公式实现对非规则声场的求解。

对声场而言, 其拉格朗日泛函 L 由声场势能 U 和动能 T 两部分构成,

$$L = U - T, \quad (7)$$

在笛卡尔坐标系 (x, y, z) 中的声场, 由刚性边界条件方程 (2) 知, 声场边界势能为 0, 故其声势能和声动能的表达式可以写为:

$$T = \frac{1}{2\rho\omega^2} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz, \quad (8)$$

$$U = \frac{1}{2\rho c_0^2} \iiint_V p^2 dx dy dz. \quad (9)$$

2 声场特性方程求解

在得到了声学系统的拉格朗日泛函后, 可按照里茨方法选择一组合适的试函数进行求解^[25]。试函数由场变量系数和容许函数两部分构成。在本文中, 将采用完备的正交多项式级数来表述声场声压。假定声场 V (其边界为 ∂V) 被矩形声场 V_0 (其边界为 ∂V_0) 包络。因为在 V_0 中的完备系函数也是 V 中的完备系, 所以 V 中的声压可以根据 V_0 中的完备系函数来展开。这意味着非规则空间 V 的声压场能由包络此空间的矩形空间 V_0 的声压级数展开式表达。这一技术在文献 2—文献 5 中被验证和应用。对于任一声场, 相应的声压可以根据包络其的矩形声场 V_0 的局部坐标表述为:

$$p(\mathbf{r}) = \mathbf{P}\Phi(\mathbf{r}), \quad (10)$$

这里 $\mathbf{P}$ 和 $\Phi(\mathbf{r})$ 分别为声压函数的场变量系数向量和容许函数向量。由于第一类 Chebyshev 多项式的完备性与正交性, 它已在文献 23 中被应用于求解规则声场的声学问题。因而, 本文将继续沿用此多项式对非规则声场声学特性进行求解。在笛卡尔坐标系中, 声场声压可以展开为:

$$p(x, y, z) = \sum_l \sum_m \sum_n a_{lmn} T_l(x) T_m(y) T_n(z), \quad (11)$$

式中, $T_m(x)$ 为 Chebyshev 多项式, 其余弦形式的表达式为^[23,25]:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots; |x| \leq 1), \quad (12)$$

注意到尽管在式 (11) 中包含无穷多项展开项, 但在数值计算时将只会采用前有限多项。此外, 由于 Chebyshev 多项式的定义区间为 $[-1, +1]$, 外包络矩形声场所占据的空间为 $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$, 故在将声压展开式带入拉格朗日泛函进行计算时需要进行相应的坐标变换, 变换公式为:

$$\xi = \frac{2x}{L_x} - 1, \quad \varsigma = \frac{2y}{L_y} - 1, \quad \eta = \frac{2z}{L_z} - 1, \quad (13)$$

于是声场声压表达式可以写为:

$$p(\xi, \varsigma, \eta) = \sum_l \sum_m \sum_n a_{lmn} T_l(\xi) T_m(\varsigma) T_n(\eta) \quad (14)$$

将式 (8)、式 (9)、式 (13) 代入拉格朗日泛函 (7) 可得:

$$L = \frac{L_x L_y L_z}{16\rho} \iiint_V \left\{ \frac{[p(\xi, \varsigma, \eta)]^2}{c_0^2} - \left[\frac{2\partial p(\xi, \varsigma, \eta)}{\omega L_x \partial \xi} \right]^2 - \left[\frac{2\partial p(\xi, \varsigma, \eta)}{\omega L_y \partial \varsigma} \right]^2 - \left[\frac{2\partial p(\xi, \varsigma, \eta)}{\omega L_z \partial \eta} \right]^2 \right\} d\xi d\varsigma d\eta, \quad (15)$$

将声压表达式 (14) 代入上式并按照里茨方法对声场拉格朗日泛函取极值,

$$\frac{\partial L}{\partial a_{lmn}} = 0, \quad (16)$$

即可得到声场的声学特性方程, 将其写作矩阵形式为:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

此特性方程由一组线性方程组构成。 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为声学空间的刚度矩阵和质量矩阵, 其中各元素的具体计算式为:

$$\bar{m}_{lmn, l'm'n'} = \frac{L_x L_y L_z}{8\rho c_0^2} \iiint_V T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) T_n(\eta) T_{n'}(\eta) d\xi d\varsigma d\eta, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{lmn, l'm'n'} = & \frac{L_x L_y L_z}{2\rho} \iiint_V \left[\frac{\partial T_l(\xi)}{L_x \partial \xi} \frac{\partial T_{l'}(\xi)}{L_x \partial \xi} T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + \right. \\ & T_l(\xi) T_{l'}(\xi) \frac{\partial T_m(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} \frac{\partial T_{m'}(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + \\ & \left. T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) \frac{\partial T_n(\eta)}{L_z \partial \eta} \frac{\partial T_{n'}(\eta)}{L_z \partial \eta} \right] d\xi d\varsigma d\eta, \end{aligned} \quad (19)$$

通过改变声场积分上下限, 可以获得具有不同几何形状的非规则声场特性方程刚度矩阵和质量矩阵元素。若曲面声场其顶部曲面为由平行于 z 轴的动直

线沿准线 $y = -(x - L_x/2)^2 + L_y$ 平行移动所形成的抛物物柱面, 则此二次曲面声场特性方程中刚度矩阵和质量矩阵元素可写为:

$$\overline{m}_{lmn,l'm'n'} = \frac{L_x L_y L_z}{8\rho c_0^2} \int_{-1}^1 T_n(\eta) T_{n'}(\eta) d\eta \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^{1-(L_x^2/2L_y)} + \int_{-1}^1 \int_{1-(L_x^2/2L_y)}^{1-\xi^2 L_x^2/2L_y} \right] T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) d\xi d\varsigma, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \overline{k}_{lmn,l'm'n'} = & \frac{L_x L_y L_z}{2\rho} \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^{1-(L_x^2/2L_y)} + \int_{-1}^1 \int_{1-(L_x^2/2L_y)}^{1-\xi^2 L_x^2/2L_y} \right] \\ & \left[\frac{\partial T_l(\xi)}{L_x \partial \xi} \frac{\partial T_{l'}(\xi)}{L_x \partial \xi} T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + T_l(\xi) T_{l'}(\xi) \frac{\partial T_m(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} \frac{\partial T_{m'}(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + \right. \\ & \left. T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) \frac{\partial T_n(\eta)}{L_z \partial \eta} \frac{\partial T_{n'}(\eta)}{L_z \partial \eta} \right] d\xi d\varsigma d\eta, \end{aligned} \quad (21)$$

若声场为具有倾斜壁面的梯形声场, 其倾斜面由外包络矩形声场 $x = L_x$ 处壁面绕直线 $x = L_x$ 逆时针旋转 φ 角度形成, 则倾斜面在 $x - y$ 平面内投影的

表达式为 $y = -x \tan \varphi + L_x \tan \varphi$, 于是此梯形声场特性方程中刚度和质量矩阵元素可写为:

$$\overline{m}_{lmn,l'm'n'} = \frac{L_x L_y L_z}{8\rho c_0^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{(\varsigma-\tilde{b})/\tilde{k}} T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) T_n(\eta) T_{n'}(\eta) d\xi d\varsigma d\eta, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \overline{k}_{lmn,l'm'n'} = & \frac{L_x L_y L_z}{2\rho} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{(\varsigma-\tilde{b})/\tilde{k}} \left[\frac{\partial T_l(\xi)}{L_x \partial \xi} \frac{\partial T_{l'}(\xi)}{L_x \partial \xi} T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + \right. \\ & \left. T_l(\xi) T_{l'}(\xi) \frac{\partial T_m(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} \frac{\partial T_{m'}(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) \frac{\partial T_n(\eta)}{L_z \partial \eta} \frac{\partial T_{n'}(\eta)}{L_z \partial \eta} \right] d\xi d\varsigma d\eta, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $\tilde{k} = -\tan \varphi L_x / L_y$, $\tilde{b} = \tan \varphi L_x / L_y - 1$ 。若声场为具有内部长方体凹槽的矩形凹型声场, 假设内部缺失长方体坐落在 $x - y$ 平面内, 其尺寸为 L_{x1} ,

L_{y1} , L_{z1} , 底部角点坐标为 (l_{x0}, l_{y0}) , 则此凹型声场特性方程刚度矩阵和质量矩阵元素可写为:

$$\begin{aligned} \overline{m}_{lmn,l'm'n'} = & \frac{L_x L_y L_z}{8\rho c_0^2} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{2l_{x0}/L_x - 1} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{2(l_{x0}+L_{x1})/L_x - 1}^{1-\xi^2 L_x^2/2L_y} + \right. \\ & \int_{2L_{z1}/L_z - 1}^1 \int_{-1}^1 \int_{2l_{x0}/L_x - 1}^{2(l_{x0}+L_{x1})/L_x - 1} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{2l_{y0}/L_y - 1}^{2(l_{y0}+L_{y1})/L_y - 1} + \\ & \left. \int_{-1}^{2L_{z1}/L_z - 1} \int_{2(l_{y0}+L_{y1})/L_y - 1}^1 \int_{2l_{x0}/L_x - 1}^{2(l_{x0}+L_{x1})/L_x - 1} \right] T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) T_n(\eta) T_{n'}(\eta) d\xi d\varsigma d\eta, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{lmn,l'm'n'} = & \frac{L_x L_y L_z}{2\rho} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{2l_{x0}/L_x-1} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{2(l_{x0}+L_{x1})/L_x-1} + \right. \\
& \int_{2L_{z1}/L_z-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{2l_{x0}/L_x-1}^{2(l_{x0}+L_{x1})/L_x-1} + \int_{-1}^{2L_{z1}/L_z-1} \int_{-1}^{2l_{y0}/L_y-1} \int_{2l_{x0}/L_x-1}^{2(l_{x0}+L_{x1})/L_x-1} + \\
& \left. \int_{-1}^{2L_{z1}/L_z-1} \int_{2(l_{y0}+L_{y1})/L_y-1}^1 \int_{2l_{x0}/L_x-1}^{2(l_{x0}+L_{x1})/L_x-1} \right] \\
& \left[\frac{\partial T_l(\xi)}{L_x \partial \xi} \frac{\partial T_{l'}(\xi)}{L_x \partial \xi} T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + T_l(\xi) T_{l'}(\xi) \frac{\partial T_m(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} \frac{\partial T_{m'}(\varsigma)}{L_y \partial \varsigma} \right. \\
& \left. T_n(\eta) T_{n'}(\eta) + T_l(\xi) T_{l'}(\xi) T_m(\varsigma) T_{m'}(\varsigma) \frac{\partial T_n(\eta)}{L_z \partial \eta} \frac{\partial T_{n'}(\eta)}{L_z \partial \eta} \right] d\xi d\varsigma d\eta,
\end{aligned} \quad (25)$$

通过求解声场的特性方程 (17) 可得到声场的特征值和特征向量。此特征向量为声场声压函数的系数, 将其带入声压表达式即可构建非规则声场的声模态。

3 数值结果与分析

3.1 准确性与收敛性分析

考虑一个带有曲面边界的非规则声场, 如图 1 所示。假设声场被长宽高分别为 $L_x=4$ m, $L_y=3$ m 和 $L_z=5$ m 的长方体空间包围。声场曲面为由平行于 z 轴的动直线沿准线 $y=-4(L_y-L_{y0})x^2/L_x^2+L_y$ 平行移动所形成的抛物柱面, 其中 $L_{y0}=L_y/2$ 。可以看到, 此曲面是连续可微的。为简便计, 本文所有算例中均取声场的空气密度和声速分别 $\rho=1.21$ kg/m³ 和 $c_0=340$ m/s。

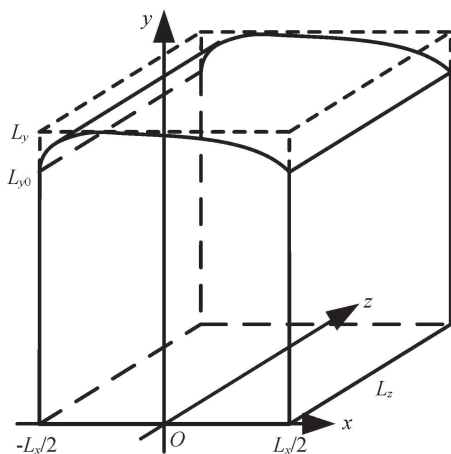


图 1 带曲面边界的非规则声场示意图

表 1 给出了带曲面边界的非规则声场的前 200 阶固有频率, 并给出了本文计算结果与有限元结果的对比。其中, 取有限元模型的每一个网格长度为 0.05 m。需要说明的是, 由此网格密度得到的有限元结果是收敛的。此外, 本文结果中的“算例 1”到“算

例 4”分别对应着将声压截断级数取为 8, 9, 10, 11。由表 1 可知, 本文结果具有较快的收敛速度, 且与有限元结果吻合良好。这意味着用较少的声压函数截断级数即可得到足够精确的结果。在有限元模型中共包含 291183 个节点, 276000 个单元, 而算例 4 对应的刚度和质量矩阵维数为 1728。可以看到, 本方法所得系统矩阵维数更小。图 2 给出了第 2 阶和第 200 阶声场模态的对比结果。可以看到本文结果与有限元结果能够很好的吻合。此外, 图 2 显示第 2 阶声场模态为标准的 (0,0,1) 模态, 可推知其对应的理论固有频率为 34 Hz。可以看到, 本文计算结果与理论结果是一致的。综上, 数值检验结果显示了本方法的收敛性, 本文结果与有限元结果和理论预测的匹配验证了本文计算结果的准确性。

表 1 带曲面边界的非规则声场固有频率

模态 阶数	本文结果				有限元 结果
	算例 1	算例 2	算例 3	算例 4	
1	0	0	0	0	0
2	34.00	34.00	34.00	34.00	34.00
3	46.46	44.88	46.46	46.46	46.46
4	57.57	56.31	57.57	57.57	57.57
5	61.61	63.94	61.61	61.61	61.63
20	119.18	120.38	119.16	119.16	119.21
40	163.39	162.66	163.27	162.84	163.37
60	189.99	191.33	189.21	187.14	189.80
80	220.43	217.19	213.05	212.39	212.79
100	238.61	236.95	231.44	230.53	231.70
120	257.36	254.35	249.59	247.08	247.23
140	274.75	270.11	269.23	263.24	264.29
160	291.73	286.35	282.19	276.97	276.65
180	312.05	302.11	297.78	292.62	291.55
200	330.68	317.32	313.10	304.09	301.33

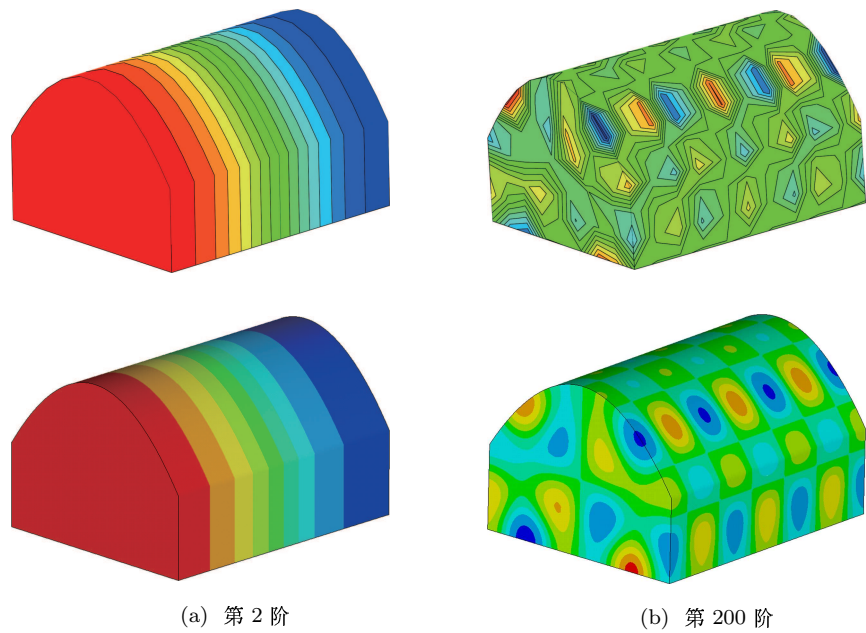


图 2 声场模式对比图 (上排为本文结果, 下排为 FEM 结果)

3.2 倾斜角度对声场频率的影响

梯形声场属于典型的非规则声场,斜面的存在增加了声场求解的复杂性。本文将研究梯形声场斜面倾角的变化对声场特性的影响。梯形声场示意图如图 3 所示。假定声场的几何参数为: $L_x=2\text{ m}$, $L_y=2\text{ m}$, $L_z=2\text{ m}$ 和 $a_0=1.5\text{ m}$ 。取声场声压函数的截断级数为 6。斜面倾斜程度由倾角 α 表示, 则式 (22) 和式 (23) 中 $\varphi=90^\circ-\alpha$ 。当倾角改变时, 仅改变梯形声场的 L_x 值, 其它几何参数保持不变。由此可知, α 角度越小则斜面倾斜程度越小。

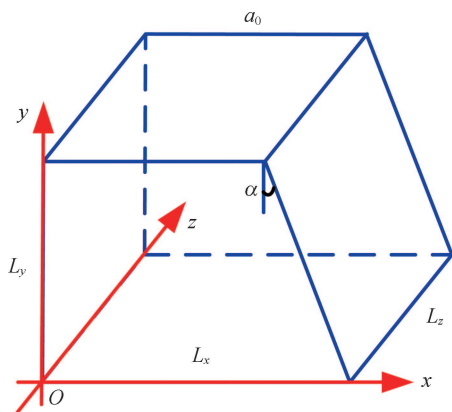


图 3 梯形声场示意图

表 2 给出了取不同倾角时梯形声场前 5 阶非零固有频率的变化情况, 其中带星号结果为对应的有限元结果。当 α 为 0° 时, 梯形声场蜕化为矩形声场, 其 $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 和 $(1,0,0)$ 阶模态对应频率的理论值分别为 85 Hz, 85 Hz 和 113.33 Hz。由表可知, 表中前三阶计算结果与理论结果是吻合的。文献 2 提

出了一种对梯形声场模式的描述方式, 即用 α 为 0° 时的矩形声场模式指数对应匹配 α 非零时的梯形声场模式。采用此匹配方式, 可将表中前三阶模态分别记为 $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 和 $(1,0,0)$ 阶模态。可以看到, 当 α 逐渐增大时, 梯形声场的 $(0,1,0)$ 阶及 $(1,0,0)$ 阶模态对应的频率随之发生递减, 而其 $(0,0,1)$ 阶模态频率保持不变。这是因为 α 的增大使得 L_x 变长, 并且

表 2 梯形声场固有频率

倾角 α	模态阶数				
	1	2	3	4	5
0°	85.00	85.00	113.33	120.21	141.67
2°	84.98	85.00	110.71	120.19	139.58
	84.99*	85.02*	110.76*	120.22*	139.63*
5°	84.85	85.00	106.89	120.10	136.57
	84.96*	85.02*	109.00*	120.19*	138.23*
10°	84.23	85.00	101.13	119.66	132.11
	84.24*	85.02*	101.16*	119.69*	132.14*
15°	82.77	85.00	96.54	118.64	128.63
	82.79*	85.02*	96.56*	118.67*	128.66*
20°	80.06	85.00	93.51	116.77	126.37
	80.08*	85.02*	93.53*	116.80*	126.40*
30°	71.77	85.00	91.04	111.25	119.14
	71.78*	85.02*	91.06*	111.27*	119.19*
45°	57.23	85.00	90.08	100.78	102.47
	57.24*	85.02*	90.10*	100.84*	102.49*
60°	41.44	74.85	85.00	89.62	94.56
	41.44*	74.83*	85.02*	89.62*	94.58*

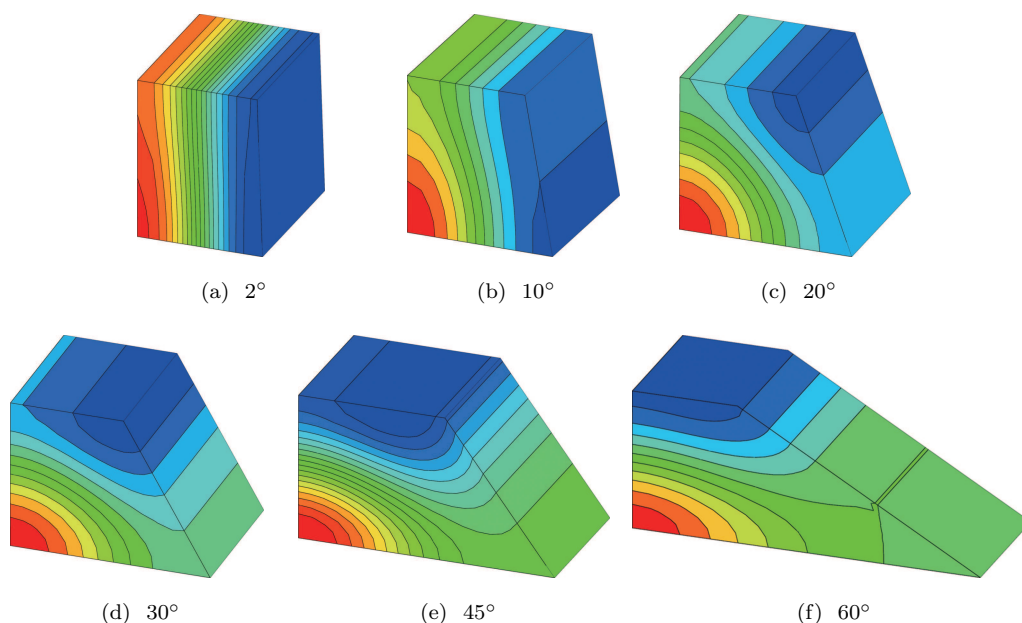


图 4 梯形声场第 3 阶模态图

斜面的存在使得 x 轴向模态和 y 轴向模态发生变化 (如图 4 所示), 因而导致其频率发生改变。相反, α 的变化不改变声场在 z 轴方向的几何尺寸, 因而对沿 z 轴方向的模态及频率无影响。此外, α 发生小角度的变化时, 其固有频率相对矩形声场对应频率变化较小。因此, 利用矩形声场特性对小倾角梯形声场进行趋势性分析是可行的。但随着 α 变化的增大, 倾斜面倾斜程度变大, 梯形声场频率发生了显著的变化。图 4 给出了 α 角度变化时各梯形声场第三阶模态云图。需要说明的是, α 为 60° 时的云图对应其第四阶模态。可以看到, 当倾角较小时 ($\alpha < 10^\circ$), 梯形声场模态与 α 为 0° 时的矩形声场模态接近。随着倾角逐渐增加, 梯形声场模态由 $\alpha = 2^\circ$ 时的近似 (1,0,0) 型模态逐渐演化为 $\alpha = 60^\circ$ 时的近似 (0,1,0) 型模态。尽管这里没有给出, 但倾角增加时梯形声场第一阶模态会由 $\alpha = 2^\circ$ 时的近似 (0,1,0) 型模态逐渐演化为 $\alpha = 60^\circ$ 时的近似 (1,0,0) 型模态。由此可知, 倾角的变化将对与倾斜面垂直的 $x-y$ 平面内的轴向模态及其频率产生影响。综上, 小倾角梯形声场频率及模态与矩形声场频率及模态接近, 因而其特性可用矩形声场特性来近似。倾斜面的存在将对沿着与其垂直的平面内轴线方向的模态及其频率产生影响, 梯形声场模态会随倾角增大而逐步发生演变。

3.3 “凹”型声场特性分析

最后考虑一个“凹”型声场, 其三视图如图 5 所示。“凹”型不规则声场由图示的内部长方体凹槽与其外部长方体围成。这类声场在工程中是常见的, 比如由隔声罩与机器围成的声场。相对于前述具有

不规则外部轮廓的声场, 此声场的复杂性体现在其内部长方体声场的缺失上。假定“凹”型声场的几何参数如下: $L_{x1} = 0.3$ m, $L_{y1} = 0.4$ m, $L_{z1} = 0.5$ m, $L_{x2} = 0.1$ m, $L_{y2} = 0.2$ m, $L_{z2} = 0.3$ m, $l_{x0} = 0.1$ m 和 $l_{y0} = 0.1$ m。取声场声压函数的截断级数为 18。

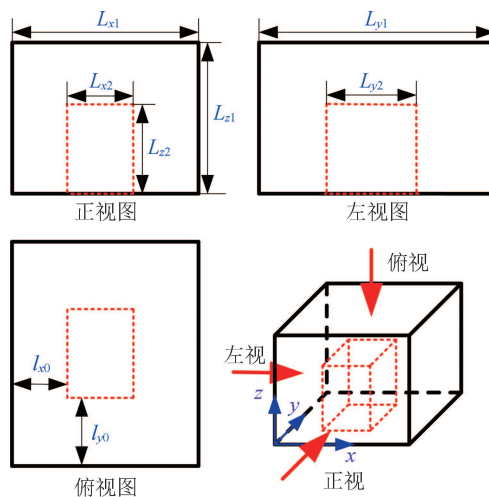


图 5 凹型声场示意图

表 3 给出了当内部长方体凹槽深度分别为 0.15 m, 0.3 m, 0.4 m, 0.45 m 和 0.5 m 时“凹”型声场非零固有频率的变化情况。可以看到, 当内部长方体凹槽深度为 0.5 m 时, 此“凹”型声场变化为“回”型声场。作为对比结果, 单元网格长度为 0.01 m 时的有限元结果在表中用星号标记。可以看到, 本文结果与有限元结果吻合良好。由表可知, 声场的第一阶频率随凹槽深度的增加呈现出先减小后增加的变化趋势。除此之外, 声场的各低阶频率均随凹槽深度的增加而逐渐减小。图 6 给出了不同凹槽深度条件下凹

型声场第一阶和第二阶模态。可以看到，无论凹槽深度如何，凹型声场模态与矩形声场模态整体相似，但出现了声场模态整体分布不均匀及声场模态局部存在变化的情形。综上，长方体凹槽的缺失会引起整个矩形声场的模态发生变化；随着内部凹槽深度的增加，声场低阶频率（除第一阶外）逐渐减小。

表 3 凹字型声场固有频率

模态阶数	凹槽深度 (L_{z1})				
	0.15 m	0.3 m	0.4 m	0.45 m	0.5 m
1	347.38	331.62	329.28	333.37	340.00
	346.88*	330.87*	329.03*	333.36*	340.06*
2	404.00	383.66	372.71	366.69	359.61
	403.27*	382.33*	371.17*	365.47*	358.28*
3	490.16	435.61	416.16	405.23	387.41
	486.32*	431.02*	411.46*	401.87*	383.95*
4	527.07	521.04	512.10	504.44	494.89
	526.43*	520.56*	511.40*	503.74*	493.97*
5	624.26	613.90	578.27	551.59	515.45
	623.79*	613.05*	575.72*	549.27*	512.89*
10	790.84	783.20	774.51	771.81	769.23
	790.61*	782.59*	773.94*	771.46*	768.80*
30	1345.8	1353.5	1356.1	1344.0	1345.4
	1346.5*	1352.5*	1354.2*	1341.5*	1346.7*
50	1700.0	1700.0	1700.0	1708.9	1733.7
	1704.3*	1704.3*	1704.4*	1712.7*	1737.7*

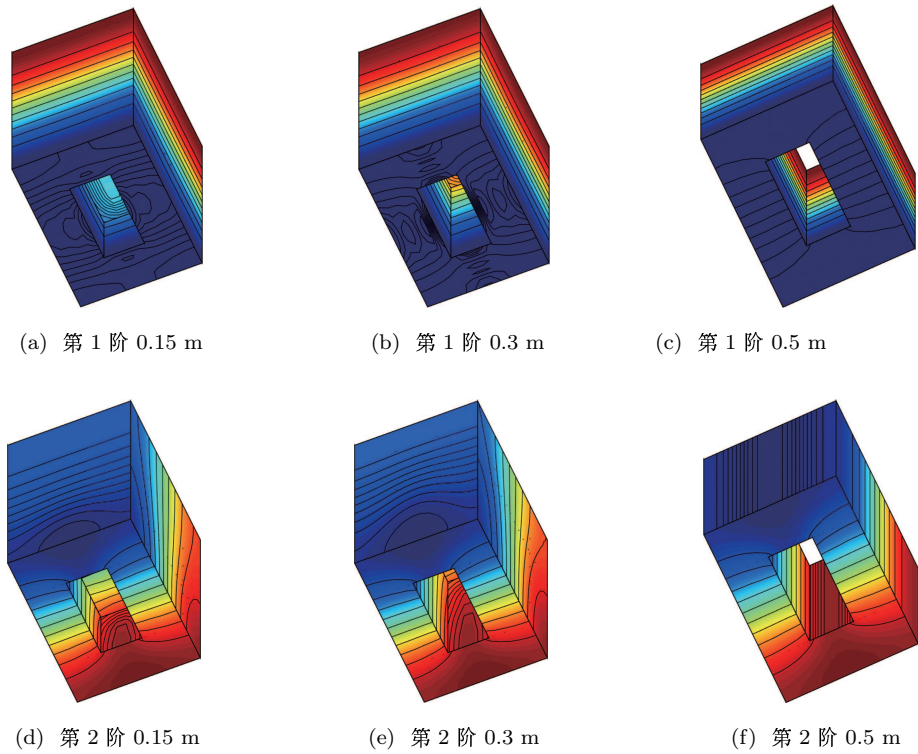


图 6 不同凹槽深度下凹型声场第 1 阶和第 2 阶模态

4 结论

本文提出一种基于 Chebyshev-变分原理的非规则封闭空间声场建模方法,该方法不仅适用于具有倾斜平面的梯形声场,而且能够求解带有曲面以及具有内部凹槽的非规则封闭声场固有特性。该方法将包络非规则空间声场的矩形声场的声压函数展开成三重 Chebyshev 级数,按照里茨方法求解经坐标变换后的声场拉格朗日泛函,从而得到声场的固有频率与模态。对曲面声场、梯形声场及凹型声场的固有特性分析表明:

(1) 对梯形声场的研究表明倾角的变化会对沿着与倾斜面垂直的平面内轴线方向的模态及其频率产生影响,梯形声场模态会随着倾角的增大而逐步演变。

(2) 对凹型声场的研究表明内部长方体凹槽的缺失导致凹型声场模态与完整的矩形声场模态整体相似但局部存在差异;随着内部凹槽深度的增加,声场第一阶固有频率先减小后增加,而其余各低阶频率则逐渐减小。

(3) 曲面声场、梯形声场及凹型声场的计算结果与参考结果吻合良好,表明本方法具有良好的计算精度,适用于非规则声场固有特性预测。

参 考 文 献

- 程建春. 声学原理. 北京, 2012: 429—449
- Sum K S, Pan J. Effects of the inclination of a rigid wall on the free vibration characteristics of acoustic modes in a trapezoidal cavity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2006; **119**(4): 2201—2210
- Sum K S, Pan J. Geometrical perturbation of an inclined wall on decay times of acoustic modes in a trapezoidal cavity with an impedance surface. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2006; **120**(6): 3730—3743
- Dowell E H, Gorman G F, Smith D A. Acoustoelasticity: general theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparisons with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 1977; **52**: 519—542
- Missaoui J, Cheng L. A combined integro-modal approach for predicting acoustic properties of irregular-shaped cavities. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1997; **101**(6): 3313—3321
- Missaoui J, Cheng L. Vibroacoustic analysis of a finite cylindrical shell with internal floor partition. *Journal of Sound and Vibration*, 1999; **226**(1): 101—123
- Li D S, Cheng L, Gosselin C M. Analysis of structural acoustic coupling of a cylindrical shell with an internal floor partition. *Journal of Sound and Vibration*, 2002; **250**(5): 903—921
- Li Y Y, Cheng L. Modifications of acoustic modes and coupling due to a leaning wall in a rectangular cavity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2004; **116**(6): 3312—3318
- Li Y Y, Cheng L. Vibro-acoustic analysis of a rectangular-like cavity with a tilted wall. *Applied Acoustics*, 2007; **68**: 739—751
- Henry J K, Clark R L. Noise transmission from a curved panel into a cylindrical enclosure: Analysis of structural acoustic coupling. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2001; **109**(4): 1456—1463
- 耿厚才, 饶柱石, 韩祖舜等. 外力源和外声源共同作用下复杂封闭空间的有源消声. *声学学报*, 2002; **27**(2): 107—111
- 罗超, 饶柱石, 赵玫. 基于格林函数法的封闭声腔的结构-声耦合分析. *振动工程学报*, 2004; **17**(3): 296—300
- 吴九汇, 陈花玲, 胡选利. 任意形状封闭薄壳内部声场计算的一种新方法研究. *声学学报*, 2000; **25**(5): 468—471
- 吴九汇, 陈花玲, 黄协清. 复杂形状封闭薄壳内部存在散射体时的内部散射声场计算. *声学学报*, 2001; **26**(4): 307—310
- 吴九汇, 王耀俊, 陈花玲. 双层弹性-非弹性封闭腔体的内部声场研究. *振动工程学报*, 2003; **16**(1): 29—35
- 张肃, 陈南. 基于解析法的复杂封闭空间有源结构声控制. *机械工程学报*, 2006; **42**: 39—43
- 肖悦, 陈剑, 胡定玉等. 复杂封闭声场面板声学贡献度识别的等效源法. *声学学报*, 2014; **39**(4): 489—500
- Petyt M, Lea J, Koopmann G H. A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shaped cavities. *Journal of Sound and Vibration*, 1976; **45**: 497—502
- Sung S H, Nefske D J. A coupled structural-acoustic finite element model for vehicle interior noise analysis. *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 1984; **106**: 314—318
- 范成高, 陈南, 张肃. 基于改进 Trefftz 解析法的封闭空腔噪声有源控制. *动力学与控制学报*, 2006; **4**(4): 380—384
- 彭伟才, 何铿. WB 法分析声腔的中频响应. *噪声与振动控制*, 2006; **6**: 58—61
- 宣领宽, 明平剑, 张文平等. 封闭声腔的结构-声耦合的瞬态响应及固有特性分析的时域有限体积法. *声学学报*, 2014; **39**(2): 215—225
- Jin G Y, Chen Y H, Liu Z G. A Chebyshev-Lagrangian method for acoustic analysis of a rectangular cavity with arbitrary impedance walls. *Applied Acoustics*, 2014; **78**: 33—42
- 张海澜. 理论声学. 北京, 2012: 174—225
- Zhou D, Cheung Y K, Au F T K *et al.* Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*, 2002; **39**: 6339—6353