

封闭腔体噪声控制中亥姆霍兹共振器的优化设计方法

王正敏 饶 伟 李德玉[†]

(1 惠州迪芬尼声学科技股份有限公司 声学解决方案事业部 惠州 516000)

(2 华南理工大学 船舶与海洋工程系 广州 510640)

2017 年 5 月 22 日收到

2017 年 8 月 25 日定稿

摘要 提出用亥姆霍兹共振器控制声腔内噪声时计算共振器最优阻尼比和最优工作带宽的理论公式, 并进行实验验证。首先, 建立共振器与待控腔体的声学耦合方程, 以最小化腔体内目标声压幅值为参考, 对共振器的阻尼比和工作带宽进行理论分析, 求出最优阻尼比和最优工作带宽的计算公式。接着, 提出在声腔噪声控制中使用最优亥姆霍兹共振器的实施步骤。最后, 以一维声学腔体内的噪声为控制对象, 通过对比控制前后的理论结果与实测数据, 验证最优阻尼比和最优工作带宽的理论公式。结果表明, 本文开发的亥姆霍兹共振器优化设计方法能准确地预报共振器的最优阻尼比与最优工作带宽, 在声腔中低频噪声控制中有广泛的应用前景。

PACS 数: 43.20, 43.50, 43.55

Optimal design method of Helmholtz resonators for noise control in enclosures

WANG Zhengmin RAO Wei LI Deyu

(1 *Tymphany Acoustics Technology Corporation Limited Company, Acoustics Solution Business* Huizhou 516000)

(2 *Naval Architecture and Ocean Engineering, South China University of Technology* Guangzhou 510640)

Received May 22, 2017

Revised Aug 25, 2017

Abstract The analytical formulas of optimal damping ratio and working frequency band of a Helmholtz resonator for the interior noise control were developed and experimentally validated. Based on the coupled acoustic equations between the enclosure under control and a Helmholtz resonator, formulas for calculating optimal damping ratio and working frequency band of the resonator, to minimize the targeted sound pressure level inside the enclosure, were obtained. Then, detailed steps using the optimally designed acoustic resonators to attenuate noise in an enclosure were also proposed. Finally, a series of acoustic measurements were conducted in a one-dimensional duct to validate the developed formulas. The theoretical and experimental results demonstrated that the presented optimal design method can predict the optimal damping ratio and working frequency band for Helmholtz resonators with high accuracy, and it has a great potential in the interior noise control from low to middle frequencies.

引言

当处在声场中的亥姆霍兹共振器 (Helmholtz Resonator, 简称为 HR) 受激振动时, 因阻尼的存在会消耗一部分能量, 但 HR 颈部的振动质量块仍向其外部辐射声波, 由此形成一个次级声源, 并与原声

场产生交互作用^[1]。对于共振吸声体, 马大猷教授以吸声系数为基础, 较早较系统地研究了微穿孔板、窄缝和 HR 吸声体的设计理论^[2-5]。国内其他学者也研究了 HR 的结构参数^[6-7]和颈部材料^[8]对其控制性能的影响。郭庆等人对侧向既有 HR 共振器又有流动介质的驻波管内的噪声控制进行了理论与实验研究^[9-10], 证明 Helmholtz 共振器能有效地降低具有

[†] 通讯作者: 李德玉, DEYUL@hotmail.com

流动介质的驻波管内噪声。上述这些以 HR 自身为对象而忽略 HR 与待控声场耦合的研究能使问题大大简化, 对研究 HR 的结构设计是有益的。Fahy 等^[11]考虑了单个腔体模态与单个 HR 耦合的声学模型, 对封闭腔体与 HR 的声耦合进行了研究^[11-14]。为了使共振器在目标频率附近实现最大声压级降低, 他们推导出估算共振器品质因子的公式, 并进行了实验验证。结果表明, 共振器的内阻过大或过小都会影响共振器的最佳控制性能。为使控制频带内的声压达到最大降低, 他们要通过反复多次的设计与实验才能确定共振器的最佳阻尼值。Cummings^[1]提出了一种多模态理论来求解腔体内任意主声源与共振器阵列耦合的声学模型。他将每个共振器模化为一个次级点声源, 其体积速度是从每个 HR 开口处的声压与其安装位置处腔体内的声压相等建立的线性方程组中求得的。他还指出, 由于共振器被视为点声源, 如果从其自身的体积速度计算声压, 则共振器开口处的声压值奇异。针对这一问题, 他提出将 HR 开口视为脉动球声源, 用球表面平均声压近似 HR 开口处的辐射声压。这种近似方法能解决奇点问题, 但导致预报频率与测量结果差异较大。靳国永等^[12]研究了可调频 HR 对封闭空间的噪声控制, 建立了封闭腔体与 HR 耦合的频域与时域控制模型, 给出了 3 种频率调谐算法, 证明点积值调频算法具有较好的频率调节性能和调节精度。在最近对于封闭腔体和 HR 阵列声耦合模型的研究中, Li 等^[13]的工作具有代表性。他们推导了封闭腔体和 HR 阵列之间声学耦合的一般模型, 还得到了封闭腔体与单个 HR 耦合时的声场解析解及 HR 体积速度源强度解析式。研究结果还表明, 通过对 HR 阵列安装位置的优化可以有效地改进噪声控制性能。

在使用 HR 对腔内噪声进行优化控制领域, 尽管 Fahy 等^[11]做了一些早期开拓, 后来 Yu 等^[14]又基于能量法在 HR 的吸声控制机理方面做了些有益的探讨, 但在此领域的研究无论从计算精度和实用

性上来说, 都与实际应用的要求差距较大。现实需要一种既简单, 又满足精度要求, 并可用于腔内噪声控制实践的 HR 最优设计理论及公式。本文的主要目的就是从小声学耦合方程出发, 通过严谨的数学推导来求解 HR 在腔内噪声控制中的最优阻尼比和最优工作带宽, 得到它们的理论计算公式, 并经过实验验证。同时, 文中还归纳总结了 HR 在腔体内噪声优化控制中的实施步骤, 为其在腔内噪声控制, 特别是在腔内中低频噪声控制中的应用提供详细的指南。

1 亥姆霍兹共振器的优化理论

图 1 为用亥姆霍兹共振器减小封闭腔体内声压的示意图。

图 1(a) 中封闭腔体内 (x^S, y^S, z^S) 处有一个点声源, 其强度为 $q^S(t)$; HR 开口端位于 (x^R, y^R, z^R) 。图 1(b) 是 HR 的细节图, 其中 L^R 为腔颈长度; S^R 为腔颈开口面积; V^R 为腔体部分的体积; 其腔颈内质量块质量中心的位移为 $x^R(t)$, 以向外运动为正; 共振器开口的声辐射可视为次点声源^[1], 强度为 $q^R(t) = S^R \dot{x}^R(t)$ 。封闭腔体内的声压 $p(x, y, z, t)$ 满足下列波动方程:

$$\nabla^2 p(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}(x, y, z, t) = -\rho_0 [\dot{q}^R(t) \delta(x - x^R) \delta(y - y^R) \delta(z - z^R) + \dot{q}^S(t) \delta(x - x^S) \delta(y - y^S) \delta(z - z^S)], \quad (1)$$

其中, c 为声速, ρ_0 为空气密度, $\delta(x - x_0)$ 为狄利克雷函数。

用模态叠加法, 声压可表示为:

$$p(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t) \varphi_j(x, y, z), \quad (2)$$

其中, $\psi_j(t)$ 为第 j 阶模态响应, $\varphi_j(x, y, z)$ 为第 j 阶振型。设与时间相关的变量为简谐量, 则可令 $\psi_j(t) = P_j e^{i\omega t}$, $q^S(t) = Q^S e^{i\omega t}$, $x^R(t) = X^R e^{i\omega t}$ 。利用模态叠加

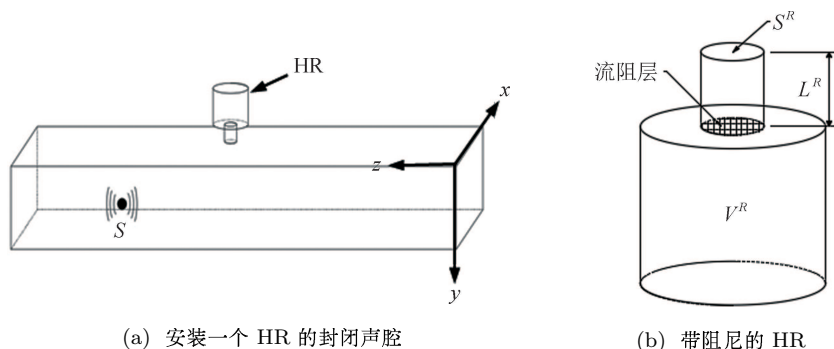


图 1 利用 HR 控制封闭腔体声压示意图

法对方程 (1) 进行操作, 使用模态正交性进行简化, 并考虑与模态阻尼相关的项, 则方程 (1) 变为:

$$\begin{aligned} & [(\omega_j^E)^2 - \omega^2 + i2\xi_j^E \omega_j^E \omega] P_j = \\ & -\frac{cz_0 \omega^2}{V^E} \frac{\varphi_j(x^R, y^R, z^R)}{\Lambda_j} S^R X^R + \\ & \frac{icz_0 \omega}{V^E} \frac{\tilde{\varphi}_j(x^S, y^S, z^S)}{\Lambda_j} Q^S, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, z_0 为空气特征阻抗, $z_0 = \rho_0 c$, V^E 为腔体体积; ω_j^E 为腔体第 j 阶固有圆频率, ξ_j^E 为腔体第 j 阶阻尼比, $\tilde{\varphi}_j(x^S, y^S, z^S)$ 为振型在声源开口范围内的平均, $\Lambda_j = \int_{V^E} [\varphi_j(x, y, z)]^2 dV / V^E$, Λ_j 为归一化模态质量。

HR 腔颈内气体颗粒质量块的运动方程为:

$$\begin{aligned} & \rho_0 L_{\text{eff}}^R S^R \ddot{x}^R(t) + S^R R_i \dot{x}^R(t) + \\ & \frac{\rho_0 c^2 (S^R)^2}{V^R} x^R(t) = -p(x^R, y^R, z^R, t) S^R, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, L_{eff}^R 为共振器腔颈有效长度^[15], R_i 为腔颈的单位面积下内阻, $p(x^R, y^R, z^R, t)$ 为腔颈开口处的平均声压。

由式 (2) 的模态叠加法可知, 只要通过使用 HR

来同时把每阶模态控制的声压响应减到最小, 即将

$$p_j(x, y, z) = P_j \varphi_j(x, y, z) \quad (5)$$

减到最小, 总声压 $p(x, y, z)$ 就会自然达到最小。

当 $\varphi_j(x, y, z) \neq 0$ 时, 由式 (5) 得:

$$P_j = \frac{p_j(x, y, z)}{\varphi_j(x, y, z)}. \quad (6)$$

由式 (6) 可知, 只要满足 $\varphi_j(x, y, z) \neq 0$, 即目标声压不在待控声腔振型的节点处, 则最小化声压 $p_j(x, y, z)$ 的问题可转化为最小化 P_j 的问题。值得一提的是, 使用 HR 来减小各阶模态控制的声压 $p_j(x, y, z)$ 来达到最小化声压 $p(x, y, z)$ 的方法同样适用于某频率附近模态密度较大的情况, 只要把该频率附近的所有模态控制的声压同时优化控制即可。

令 $x_m^R(t) = X_m^R e^{i\omega t}$, 式 (5) 代入式 (4), 解得:

$$\begin{aligned} X^R = & -\frac{1}{[(\omega^R)^2 - \omega^2 + i2\xi^R \omega^R \omega]} \frac{1}{\rho_0 L_{\text{eff}}^R} \\ & \varphi_j(x^R, y^R, z^R) P_j, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $(\omega^R)^2 = c^2 S^R / L_{\text{eff}}^R V^R$, ω^R 为 HR 的固有圆频率, $\xi^R = R_i / 2\omega^R \rho_0 L_{\text{eff}}^R$, ξ^R 为 HR 的阻尼比。

联立式 (1) 和式 (7) 解出模态声压如下:

$$P_j = \frac{\gamma^2 (\alpha^2 - \gamma^2) + i2\xi^R \alpha \gamma^3}{-\varepsilon_j^2 \alpha^2 \gamma^2 + (1 - \gamma^2 + i2\xi_j^E \gamma) (\alpha^2 - \gamma^2 + i2\xi^R \alpha \gamma)} \frac{iz_0}{kV^E} \frac{\tilde{\varphi}_j(x^S, y^S, z^S)}{\Lambda_j} Q^S. \quad (8)$$

通常情况下, 外部噪声源的强度 Q^S 是未知的, 故此当 $\tilde{\varphi}_j(x^S, y^S, z^S) \varphi_j(x, y, z) \neq 0$ 时, 式 (8) 中的 P_j 表达式可表示为:

$$Y_j = \frac{\gamma^2 (\alpha^2 - \gamma^2) + i2\xi^R \alpha \gamma^3}{-\varepsilon_j^2 \alpha^2 \gamma^2 + (1 - \gamma^2 + i2\xi_j^E \gamma) (\alpha^2 - \gamma^2 + i2\xi^R \alpha \gamma)}, \quad (9)$$

其中:

$$Y_j = \frac{P_j}{\frac{iz_0}{kV^E} \frac{\tilde{\varphi}_j(x^S, y^S, z^S)}{\Lambda_j} Q^S}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_j^2 = \frac{V^R [\varphi_j(x^R, y^R, z^R)]^2}{V^E \Lambda_j}, \quad (11)$$

k 为波数; $\alpha = \omega^R / \omega_j^E$, α 为 HR 的固有频率与腔体第 j 阶固有频率之比; $\gamma = \omega / \omega_j^E$, γ 为频率比; ε_j^2 为 HR 与腔体的第 j 阶模态质量比, 这里也把它定义为模态体积比。注意, 在文献 13 中也把这个参数定义为共振器与声腔的声学耦合系数: 其值为零时, 无声

学耦合; 其值越大, 声学耦合越强。

下面基于 Y_j 的表达式来分别讨论 HR 的阻尼比和工作带宽优化问题。

1.1 亥姆霍兹共振器的阻尼比优化

当受控目标腔体为一维声腔时, 因相邻的固有频率间彼此相隔较大距离, 故每阶模态的阻尼比可用半功率带宽方法来近似求得^[16]; 当受控腔体为三维声腔时, 因模态密度大导致部分模态间存在较强的耦合, 故腔体的模态阻尼需要用模态分析技术来识别。这些阻尼值对准确预报受控腔体的受迫响应至关重要。然而, 当腔体内的声学介质为空气时, 为简化求解过程, 常常在求解 HR 最优阻尼的推导过程中忽略受控腔体阻尼的影响^[17], 所以在本文得到的 HR 最优阻尼比和最优工作带宽计算公式里不包含受控腔体模态阻尼的信息。令式 (9) 中的 $\xi_j^E = 0$, 则有:

$$|Y_j| = \sqrt{\frac{(\alpha^2\gamma^2 - \gamma^4)^2 + (2\xi^R\alpha\gamma^3)^2}{[(1-\gamma^2)(\alpha^2 - \gamma^2) - \varepsilon_j^2\alpha^2\gamma^2]^2 + [2\xi^R\alpha\gamma(1-\gamma^2)]^2}}. \quad (12)$$

上式表明幅值 $|Y_j|$ 随变量 ε_j^2 , γ , α , ξ^R 的变化而变化。图 2 为 γ 和 $|Y_j|$ 关系曲线, 其中 $\varepsilon_j^2=0.05$, $\alpha=1$ 。

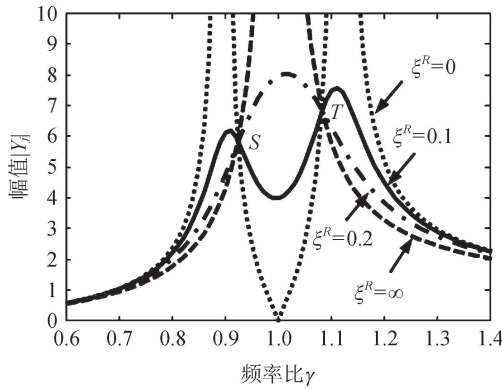


图 2 不同阻尼比的幅频曲线

由图 2 可知, 无论 HR 的阻尼比如何变化, 所有幅频曲线都经过两个固定的点 S 和 T , 说明这两点处的幅值与 HR 的阻尼比无关。当 HR 的阻尼比为零时 (见圆点线), 封闭腔体内的声压有两个共振峰, 且峰值为无限大; 随着 HR 的阻尼比增加, 封闭腔体内声压的两个共振峰峰值由无限变为有限 (见实线); 如果 HR 的阻尼变得足够大, 封闭腔体内声压的两个共振峰合为一个有限的共振峰 (见点划线); 当 HR 的阻尼趋于无穷大时, HR 腔颈内气体不振动, 封闭腔体内的声压因上述忽略了腔体模态阻尼而在共振频率处的峰值为无限大值 (见虚线), 此时幅值的表达式为:

$$|Y_j|_{\xi^R \rightarrow \infty} = \frac{\gamma^2}{|1 - \gamma^2|}. \quad (13)$$

从上述分析可知, 在带有一个 HR 的封闭腔体内: (1) 当 HR 的阻尼比从零、有限值再变到无限大时, 随之腔体内的声压会从无限大、有限值, 再变到无限大。由此可知, HR 一定存在一个最优阻尼比, 使声腔内目标声压的值降到最低; (2) 无论 HR 的阻尼比如何变化, 所有幅频曲线都经过两个固定的点 S 和 T 。为了使 HR 有最优控制效果, 类似于 Den Hartog 在文献 17 求解吸振器的最优阻尼比时用的优化目标, 本文使用“调整 S 和 T 两点的声压值高度, 使两点等高, 并成为曲线上的最高点”来作为求解 HR 最优阻尼比的优化目标, 并定义由此求得的阻尼比为 HR 的最优阻尼比。据此, HR 的最优阻尼比推导如下。

式 (12) 可改写为:

$$|Y_j| = \sqrt{\frac{C + D(\xi^R)^2}{E + F(\xi^R)^2}}, \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} C &= (\alpha^2\gamma^2 - \gamma^4)^2, \quad D = (2\alpha\gamma^3)^2, \\ E &= [(1-\gamma)(\alpha^2 - \gamma^2) - \varepsilon_j^2\alpha^2\gamma^2]^2, \\ F &= [2\alpha\gamma(1-\gamma^2)]^2. \end{aligned}$$

因 S 和 T 两点处的声压值与阻尼比 ξ^R 无关, 故存在下列关系:

$$\frac{C}{E} = \frac{D}{F}.$$

由此可得:

$$\gamma^4 - \left(1 + \alpha^2 + \frac{\varepsilon_j^2}{2}\right)\gamma^2 + \alpha^2 = 0. \quad (15)$$

设 S 与 T 两点对应的频率比分别为 γ_S 和 γ_T , 由式 (15), 根据韦达定理, 可得:

$$\gamma_S^2 + \gamma_T^2 = 1 + \alpha^2 + \frac{\varepsilon_j^2}{2}, \quad (16)$$

$$\gamma_S^2\gamma_T^2 = \alpha^2. \quad (17)$$

当 S 与 T 两点处的幅值相等时, 由式 (13) 得:

$$\gamma_S^2 + \gamma_T^2 - 2\gamma_S^2\gamma_T^2 = 0. \quad (18)$$

式 (16)、式 (17)、式 (18) 联立, 解得:

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_j^2}{2}}, \quad (19)$$

$$\gamma_S = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_j^2}{2} - \frac{\sqrt{\varepsilon_j^4 + 2\varepsilon_j^2}}{2}}, \quad (20)$$

$$\gamma_T = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_j^2}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_j^4 + 2\varepsilon_j^2}}{2}}. \quad (21)$$

式 (19) 为 S 和 T 两点等高的条件。将式 (20) 或式 (21) 代入式 (13), 得 S 与 T 两点处的幅值为:

$$|Y_j(\gamma)|_{\gamma=\gamma_S \text{ 或 } \gamma_T} = \sqrt{1 + \frac{2}{\varepsilon_j^2}}. \quad (22)$$

根据上述 HR 的最优阻尼比的定义, 为了求得此值, 应对式 (14) 进行下列操作:

$$\frac{\partial |Y_j(\gamma)|}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_S \text{ or } \gamma_T} = 0. \quad (23)$$

得:

$$G(\xi^R)^4 + H(\xi^R)^2 + I = 0, \quad (24)$$

其中:

$$G = 2\gamma^4 (2\alpha)^4 (1 - \gamma^2),$$

$$H = \gamma^2 (2\alpha)^2 \left\{ 4(1 - \gamma^2)(\alpha^2 - \gamma^2)^2 - \varepsilon_j^2 \alpha^2 \gamma^2 [2\alpha^2 (1 - \gamma^2) + 2(\alpha^2 - \gamma^2) - \varepsilon_j^2 \alpha^2 \gamma^2] \right\},$$

$$I = 2(\alpha^2 - \gamma^2) [(1 - \gamma^2)(\alpha^2 - \gamma^2) - \varepsilon_j^2 \alpha^2 \gamma^2] [(\alpha^2 - \gamma^2)^2 + \varepsilon_j^2 \alpha^2 \gamma^4].$$

解方程 (24), 得:

$$(\xi^R)_{1,2}^2 = \frac{-H \pm \sqrt{H^2 - 4GI}}{2G}, \quad (25)$$

(1) 取 $\gamma = \gamma_S$, 对部分项进行泰勒展开, 并略去比 ε_j^6 高阶的小量, 得:

$$(\xi_S^R)^2 = \varepsilon_j^2 \frac{(4\sqrt{2} - 16\varepsilon_j + 25\sqrt{2}\varepsilon_j^2 - 54\varepsilon_j^3) + \sqrt{(64 - 384\sqrt{2}\varepsilon_j + 1652\varepsilon_j^2 - 1964\sqrt{2}\varepsilon_j^3 + 4147\varepsilon_j^4 - 3466\sqrt{2}\varepsilon_j^5 + 3504\varepsilon_j^6)}}{2(16\sqrt{2} - 48\varepsilon_j + 60\sqrt{2}\varepsilon_j^2 - 104\varepsilon_j^3 + 73.5\sqrt{2}\varepsilon_j^4 - 84\varepsilon_j^5)}. \quad (26)$$

(2) 同理, 取 $\gamma = \gamma_T$, 此时有:

$$(\xi_T^R)^2 = \varepsilon_j^2 \frac{(4\sqrt{2} + 16\varepsilon_j + 25\sqrt{2}\varepsilon_j^2 + 54\varepsilon_j^3) + \sqrt{(64 + 384\sqrt{2}\varepsilon_j + 1652\varepsilon_j^2 + 1964\sqrt{2}\varepsilon_j^3 + 4147\varepsilon_j^4 + 3466\sqrt{2}\varepsilon_j^5 + 3504\varepsilon_j^6)}}{2(16\sqrt{2} + 48\varepsilon_j + 60\sqrt{2}\varepsilon_j^2 + 104\varepsilon_j^3 + 73.5\sqrt{2}\varepsilon_j^4 + 84\varepsilon_j^5)}. \quad (27)$$

最优阻尼比 ξ_{opt}^R 定义为^[18]:

$$\xi_{\text{opt}}^R = \sqrt{\frac{(\xi_S^R)^2 + (\xi_T^R)^2}{2}}. \quad (28)$$

根据式 (28), 取 $\varepsilon_j^2 = 0.05$, 可得最优阻尼比 $\xi_{\text{opt}}^R = 0.14$, 画出不同阻尼比 ξ^R 时的幅频曲线, 如图 3 所示。

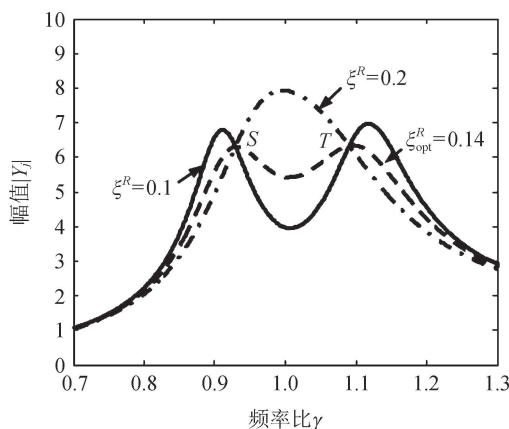


图 3 不同阻尼比的幅频曲线

由图 3 可知, 取最优阻尼比 ξ_{opt}^R 时 (见虚线), S 和 T 两点的幅值为幅频曲线上两个相等的最大值, 符合理论推导的假设。

1.2 亥姆霍兹共振器的工作带宽优化

Fahy 曾在文献 11 中提及过, HR 腔体体积越大, 控制效果越好, 但缺乏理论证明。下文将给出详细理论推导及证明。

工作带宽应包括原共振频率及两个新产生的共振频率。根据式 (20) 和式 (21), 以模态体积比 ε_j^2 作横坐标, 两个定点频率比作纵坐标, 所得关系曲线如图 4 所示。

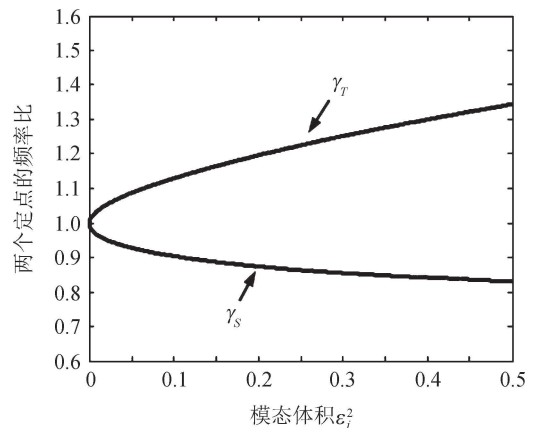


图 4 模态体积比和两个定点的频率比关系曲线

由图 4 可知, 两定点频率比差值随 ε_j^2 增大而变大, 即两定点带宽越大。对式 (20) 和式 (21) 进行

泰勒展开，并忽略大于三次项的小量，得：

$$\gamma_S \approx 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon_j + \frac{3}{16}\varepsilon_j^2 - \frac{\sqrt{2}}{64}\varepsilon_j^3, \quad (29)$$

$$\gamma_T \approx 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon_j + \frac{3}{16}\varepsilon_j^2 + \frac{\sqrt{2}}{64}\varepsilon_j^3. \quad (30)$$

我们把上两式的差定义为共振器的工作带宽，即：

$$\Delta\gamma = \gamma_T - \gamma_S = \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_j + \frac{\sqrt{2}}{32}\varepsilon_j^3 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_j. \quad (31)$$

由式 (31) 可知，共振器的工作带宽与模态体积比 (或模态质量比) ε_j^2 的大小呈非线性增加关系， ε_j^2 值越大， $\Delta\gamma$ 越宽。由式 (22) 可知，此时 S 和 T 两点幅值降低，控制效果更佳。

为进一步展示 HR 腔体体积与工作带宽关系，在 HR 阻尼比最优条件下，即 $\xi^R = \xi_{\text{opt}}^R$ ，不同模态体积比 ε_j^2 的幅频曲线如图 5 所示。

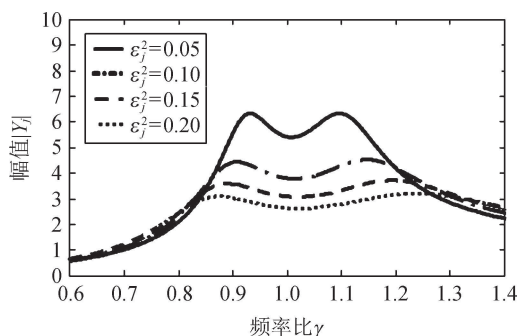


图 5 不同模态体积比的幅频曲线

由图 5 可见，随着 ε_j^2 值增大，幅频曲线带宽越大，带宽内最大幅值越小，控制效果越佳。在 $\varepsilon_j^2 = 0.2$ 时，工作带宽已接近平直。另外还发现，随 ε_j^2 增大， Y_j 幅值整体下降幅度越来越小。需要注意的是：从式 (19—21)、式 (26—28) 和式 (29—31) 可知，HR 的最优阻尼比和最优工作带宽取决于模态体积比 ε_j^2 。从模态体积比的解析式 (11) 可知，模态体积比又取决于 HR 安装位置处的振型值 $\varphi_j(x^R, y^R, z^R)$ ，即当 HR 的开口位于待控模态振型的节点时，因 $\varphi_j(x^R, y^R, z^R) = 0$ 导致 $\varepsilon_j^2 = 0$ ，该控制无效。HR 应安放在振型最大的位置。

对于高阶的腔体模态振型，其最大值一定存在

于多个几何位置处。当不同频率的模态振型最大值重叠于几何位置上的一点时，从物理上来讲，该位置只能安放一个 HR，仅能控制一阶模态。如果要同时控制这些有最大值位置重叠的模态，应当把优化的 HR 分别安放在那些模态振型最大值没有重叠的几何位置处，详见 2.3 节的“优化理论在多模态控制中的应用”及结果。

1.3 亥姆霍兹共振器的优化设计步骤

基于 HR 最优阻尼比和最优工作带宽的理论，下面总结了优化设计 HR 的步骤：

- (1) 确定腔体目标共振峰附近需要减小的声压幅值，进而确定工作带宽；
- (2) 由式 (31) 求得模态体积比 ε_j^2 ；
- (3) 对目标腔体进行理论模态分析，确定 HR 的最优安装位置为阵型的最大值处；
- (4) 由式 (11) 确定 HR 的腔体体积，由式 (19) 来确定 HR 的工作频率，然后设计 HR 的颈部几何尺寸；
- (5) 由式 (26)—(28) 来确定 HR 的最优阻尼比。

2 优化理论及噪声控制效果的实验验证

以一维矩形腔体为基础，进行 HR 优化公式和控制效果的实验验证，如图 6 所示。该腔体的围壁结构由 10 mm 厚的高密度板制造， L_x 、 L_y 和 L_z 分别为封闭腔体的宽、高、长，为 $(L_x, L_y, L_z) = (100, 100, 2000)$ mm。扬声器安放在矩形腔体一端，在该封闭端面中心位置 (50, 50, 0) mm 开 50 mm 直径的孔，声音通过该孔激励腔体。传声器 1 安放在扬声器后背腔侧面的中心处，测量扬声器箱体后背腔的声压，作为参考信号；传声器 2 放置在矩形腔体另外一端 (50, 50, 2000) mm 处，测得矩形腔体内端部的声压，作为输出信号。

腔体模态共振频率的理论值^[19]、实验测量值，以及腔体模态的品质因子如表 1 所示。对于 7 阶以上模态的品质因子，可假定其与第 7 阶模态品质因子相等^[1]。计算中所用空气特性参数列在表 2 中。

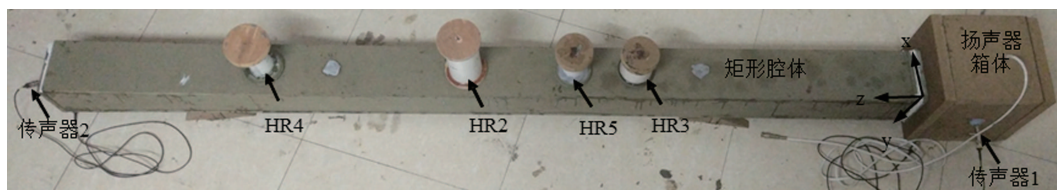


图 6 用 HR 控制一维腔体内声场实验图

表 1 共振频率及品质因子

序号	模态	理论共振 频率 (Hz)	实测共振 频率 (Hz)	实测 品质因子
1	(0,0,1)	87.3	104.1	3
2	(0,0,2)	174.5	175.6	15
3	(0,0,3)	261.8	259.1	29
4	(0,0,4)	349.0	342.8	47
5	(0,0,5)	436.3	425.6	58
6	(0,0,6)	523.5	509.1	73
7	(0,0,7)	610.8	590.3	77

表 2 空气特性参数

参数	数值
温度 T ($^{\circ}\text{C}$)	26
声速 c (m/s)	347
密度 ρ (kg/m^3)	1.20

由表 1 知, 实测 (0,0,1) 模态共振频率 (105.9 Hz) 比理论计算的固有频率 (86.8 Hz) 偏大, 其余几阶的两个频率值非常接近。第一阶固有频率的理论预报值与实测值相差较大, 可能是扬声器通过矩形腔体端部的开孔与一维声腔的第一阶模态发生了较强的声-固耦合所致。

2.1 最优阻尼比实验验证

通过控制腔体 (0,0,2) 模态来验证理论部分推导

的最优阻尼比公式。如表 3 所示, 设计制作了 3 个不同阻尼比的共振器来进行对比实验, 编号为 HR1、HR2 和 HR3 别具有阻尼比 0.09, 0.15 和 0.30, 其中 $\xi^R = 0.15$ 为理论计算的最优阻尼比。试验中, 利用半功率带宽的方法^[16]得到 HR 阻尼比, 阻尼比的大小是通过变化通用纱布的层数来调整的。注意, 在设计共振器时, 要尽量保持 3 个共振器的工作频率相同。然而, 随着共振器阻尼的增大, 共振器的共振频率会减小。本文中为保持 3 个共振器的共振频率相等, 调整了共振器腔体的体积, 详见表 3 中的第 5 列和第 6 列所示, 这样造成了它们各自的工作带宽不同 (详见图 7 所示)。

表 3 中 r^N 为腔颈半径, l^N 为腔颈实际长度, r^B 为腔体半径, l^B 为腔体长度。HR 安装在腔体 (0,0,2) 模态振型的最大值处, 即 (50,0,1000) mm 处。理论计算结果和实测数据如图 7 所示。

由图 7(a) 可知, 当 HR 的阻尼比为理论最优值 0.15 时, 实现了 10.5 dB 的幅值降低, 且两个新共振峰带宽较为平缓。当阻尼比 (0.30) 大于最优值时, 控制效果降低, 只导致振峰幅值降低 7.6 dB。当阻尼比 (0.09) 小于最优值时, 导致原共振峰被两个新共振峰代替, 幅值最大降低 9.0 dB。由图 7(b) 可知, 采用与理论分析中具有同样阻尼比的 HR 的实测曲线与理论计算曲线类似, 即具有理论最优阻尼比的 HR2 控制效果优于 HR1 和 HR3, 由此证明本文开发的 HR 最优阻尼比计算理论公式可靠。

表 3 HR 的几何尺寸及参数

编号	r^N (mm)	l^N (mm)	r^B (mm)	l^B (mm)	f (Hz)	实测 ξ^R	计算 ξ^R
HR1	10.75	35	35.0	158	178.1	0.09	0.09
HR2	10.75	36	35.0	151	179.5	0.15	0.15
HR3	10.75	35	35.0	137	174.7	0.30	0.30

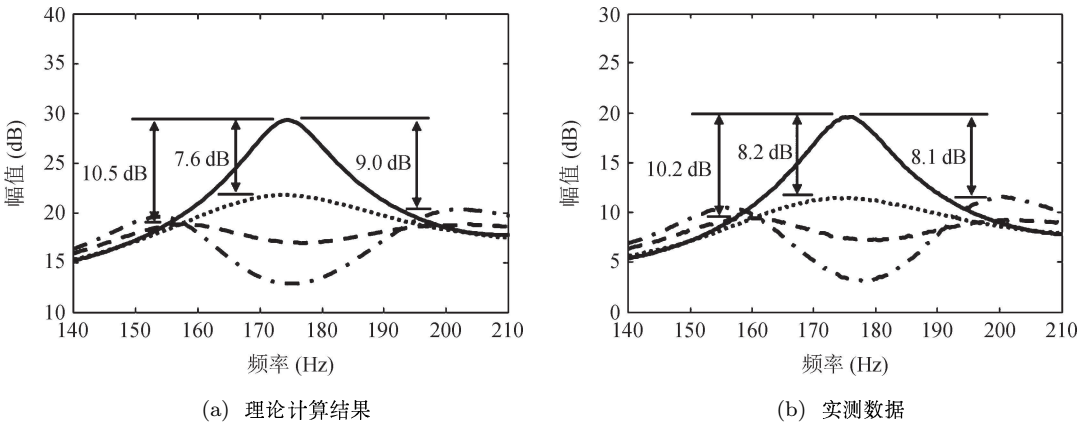


图 7 传声器 1 输入传声器 2 响应的频响函数曲线局部放大图

(— 无控制; 阻尼比 0.09 (小于理论优化值); —— 阻尼比 0.15 (理论优化值); ... 阻尼比 0.30 (大于理论优化值))

2.2 最优工作带宽实验验证

为了验证理论公式 (29) 预报的共振器工作带宽的准确性，我们设计了如下实验。选择两个不同的共振器对由 (0,0,2) 腔体模式主导的响应进行控制。两个共振器的腔体体积近似相等，以便工作带宽相同，如表 3 第 2 行和第 3 行所列 HR1 和 HR2。同样，HR 也安装在腔体 (0, 0, 2) 模式振型的最大值，即 (50, 0, 1000) mm 处。实测数据如图 7(b) 中的点划线和虚线。这两条线交点处的频率之差为 (191.3-160.6=)30.7 Hz，即为本文定义的共振器的工作带宽。

由式 (9) 可计算出两个共振器的模态体积比约为 0.058，根据式 (29) 预报的共振器的工作带宽为 29.8 (仅用第一项来近似，理论计算值为 29.7) Hz。由此可见，理论预报与实测的共振器工作带宽绝对误差仅为 1 Hz，相对误差约为 3%。

2.3 优化理论在多模态控制中的应用

为展示本文开发的优化设计理论在腔体中低频噪声控制中的应用，我们选择了 (0,0,2)、(0, 0, 3)、(0, 0, 4) 和 (0, 0, 5) 四阶模态来进行同时实施。在进行腔体噪声控制实验中，HR 都安装在对应控制模态振型的最大值处。腔体 (0, 0, 2)、(0, 0, 3)、(0, 0, 4) 和 (0, 0, 5) 模态的最大值位置分别为 (50, 0, 1000), (50, 0, 650), (50, 0, 1500), (50, 0, 800) mm。本文设计制作了 4 个不同频率的共振器，编号分别为 HR2，

HR3, HR4, HR5，如表 4 所示。实验中因精确调控阻尼非常困难，有些 HR 的实测阻尼比与理论最优值略有误差。共振器在实验中的安装详见图 6 所示，理论预报和实测结果显示在图 8 中。

由图 8(a) 可知，应用 4 个具有理论最优阻尼的共振器 HR2、HR3、HR4 和 HR5 使对应的固有频率处的声压级分别减小 9.5 dB, 11.7 dB, 14.2 dB, 13.8 dB，并且控制后每阶共振附近形成的两个新共振峰峰值趋于相等。由图 8(b) 可知，实验测量数据与理论预报结果类似。控制后各阶受控固有频率处的声压级分别下降 10.4 dB, 13.2 dB, 12.5 dB, 12.7 dB。总体而言，理论预报与实测的控制效果非常相近，表明本文开发的 HR 最优阻尼比理论可以很好地实现多模态最优控制。

3 结论

基于亥姆霍兹共振器与被控腔体的声学耦合方程，从理论和实验两方面系统地研究了亥姆霍兹共振器在腔内噪声控制中的优化设计问题。推导出了亥姆霍兹共振器最优阻尼比和最优工作带宽的理论计算公式，给出了亥姆霍兹共振器优化设计方法在腔内噪声控制中的应用步骤，并通过实验对所得到的理论公式进行了全面验证。结果表明，开发的亥姆霍兹共振器的优化设计方法、最优阻尼比和最优工作带宽计算公式及噪声控制实施步骤可以非常显著地实现腔内中低频噪声控制。

表 4 HR 的几何尺寸及参数

编号	r^N (mm)	l^N (mm)	r^B (mm)	l^B (mm)	f (Hz)	实测 ξ^R	计算 ξ^R
HR2	10.75	36	35.0	151	179.5	0.15	0.15
HR3	11.0	31.5	35.0	67	251.3	0.12	0.10
HR4	10.75	26	22.6	107	351.6	0.10	0.09
HR5	10.75	24	22.6	77	423.4	0.07	0.07

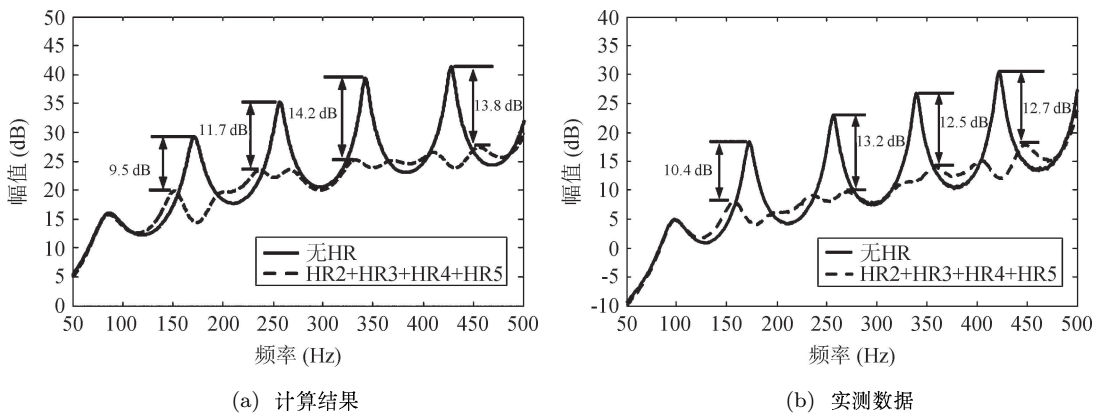


图 8 传声器 1 输入传声器 2 响应的频响函数曲线

参 考 文 献

- 1 Cummings A. The effects of a resonator array on the sound field in a cavity. *J. Sound Vib.*, 1992; **154**: 25—44
- 2 马大猷. 微穿孔板吸声结构的理论和设计. 中国技术, 1975: **1**: 38—50
- 3 马大猷. 微穿孔板结构的设计. 声学学报, 1988; **13**(3): 174—180
- 4 马大猷. 微缝吸声体理论. 声学学报, 2000; **25**(6): 481—485
- 5 马大猷. 亥姆霍兹共鸣器. 声学技术, 2002; **21**(2): 2—3
- 6 盛美萍, 张立, 张会萍. 插入软管的低频带宽共振吸声机理与实验研究. 振动工程学报, 2007; **20**(2): 145—148
- 7 刘海涛, 郑四发, 连小珉, 但佳璧. 锥形颈部亥姆霍兹共振器声学性能预测. 声学学报, 2014; **39**(3): 353—359
- 8 陈明, 李鹏, 罗斌. 颈部材料对亥姆霍兹共振器吸声性能的影响. 中国测试, 2016; **42**(8): 128—130
- 9 郭庆, 刘克, 李嵩, 黄东涛. 具有流动和侧向 Helmholtz 共振器的驻波管内声场研究: I. 理论分析. 声学学报, 2003; **28**(5): 409—415
- 10 郭庆, 刘克, 李嵩, 黄东涛. 具有流动和侧向 Helmholtz 共振器的驻波管内声场实验研究: II. 实验研究与结果讨论. 声学学报, 2003; **28**(6): 526—533
- 11 Fahy F J, Schofield C. A note on the interaction between a Helmholtz resonator and an acoustic mode of an enclosure. *J. Sound Vib.*, 1980; **72**: 365—378
- 12 靳国永, 张洪田, 李玩幽, 叶黎明, 杨铁军. 基于可调频亥姆霍兹共振器的封闭空间噪声自适应半主动控制. 声学学报, 2010; **35**(3): 309—320
- 13 Li D, Cheng L. Acoustically coupled model of an enclosure and a Helmholtz resonator array. *J. Sound Vib.*, 2007; **305**: 272—288
- 14 Yu H G, Li D, Cheng L. Effect of internal resistance of a Helmholtz resonator on acoustic energy reduction in enclosures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008; **124**(6): 3534—3543
- 15 Kinsler L E, Frey A R, Coppens A B *et al.* Fundamentals of acoustics. 4th Ed. John Wiley & Sons Inc, 2000: 284—285
- 16 倪振华. 振动力学. 成都: 西南交大出版社, 1988: 85—86
- 17 Den Hartog J P. Mechanical vibration. 4th Ed. New York, 1985: 93—103
- 18 Brock J K. A note on the damped vibration absorber. *J. Appl. Mech.*, 1946: 68
- 19 杜功焕, 朱哲明, 龚秀芳. 声压基础. 第 3 版. 南京: 南京大学出版社, 2012: 280