第 47 卷第 6 期　　　　声 学 学 报　　　　Vol. 47, No. 6
2022 年 11 月　　　　ACTA ACUSTICA　　　　Nov., 2022

强弱耦合板–腔系统的声辐射模态计算与分析*

廖金龙　　朱海潮†　　侯九霄　　袁苏伟
(海军工程大学振动与噪声研究所 船舶振动噪声重点实验室　武汉　430033)

2022 年 1 月 9 日收到
2022 年 5 月 18 日定稿

摘要　针对板–腔耦合系统的声辐射模态 (ARM) 计算问题，提出了一种基于能量原理的声辐射模态计算方法，该方法从能量原理的动力学方程构建起声压模态幅值和结构模态幅值的关系，通过将声势能表示为结构模态幅值向量的二次型形式，得到板–腔耦合系统的声辐射模态，弥补了前人理论在解决声腔为阻抗壁面和结构–声为强耦合条件时的不足。通过数值算例验证了本文计算方法的正确性和有效性，在此基础上分析了壁面和结构–声耦合条件变化对声辐射模态特性的影响。结果表明：声辐射模态辐射效率曲线会在声腔模态频率处产生峰值，阻抗壁面的引入会降低声辐射模态辐射效率在峰值处的幅值，并且阻抗值越小，幅值衰减效应越明显，具体表现为声势能曲线在辐射效率峰值频率处幅值会下降；强耦合条件下低频段声势能响应主要由弹性板结构模态激发，响应峰值密度更高，幅值更低。低频同频宽的声辐射模态辐射效率峰值数更少，峰值频率更高。

PACS 数：43.20, 43.40, 43.50

Calculation and analysis for acoustic radiation mode of strong and weak plate-cavity coupling system

LIAO Jinlong　ZHU Haichao†　HOU Jiuxiao　YUAN Suwei
(*National Key Laboratory on Ship Vibration & Noise*, *Institute of Noise & Vibration*,
Naval University of Engineering　Wuhan　430033)

Received Jan. 9, 2022
Revised May 18, 2022

Abstract　A numerical method is proposed for analyzing the Acoustic Radiation Modes (ARM) of a plate-cavity coupled system based on the energy principle. In present method, the relationship between the sound pressure mode amplitude and the structural mode amplitude is constructed through the dynamic equations and the ARM is obtained by expressing the acoustic potential energy as a quadratic form of the structural mode amplitude. Compared to the previous theory, the present approach makes up the shortcomings in case of the acoustic cavity is an impedance wall or the structure-acoustic strong coupling. The accuracy and precision of present method are validated through numerical examples. Then the effects of wall damping and structure-acoustic coupling conditions on the characteristics of ARM are investigated. The numerical results show that the ARM radiation efficiency curve will peak at the acoustic mode frequencies. The peak value can be effectively suppressed by introducing impedance-walled boundary conditions, and the more pronounced the amplitude decay with the impedance value decreases. Specifically, the amplitude of the acoustic potential energy at the peak frequency of ARM radiation efficiency curve will decrease; Under strong coupling conditions, the acoustic potential energy response in low frequency is mainly motivated by the structural mode, and the response peak density is higher, and the amplitude is lower. The ARM radiation efficiency peak number is less, and the peak frequency is higher in the same bandwidth low frequency.

---

* 国家自然科学基金项目 (51675529) 和青年人才托举工程项目 (2021-JCJQ-QT-008) 资助
† 通讯作者：朱海潮，haiczhu@163.com

引言

由弹性板–矩形腔构成的耦合系统是众多工程背景的典型代表，广泛存在于各种民用和军用领域，比如船舶生活舱室、舰艇声呐平台、飞机座舱等。由弹性板振动引起的低频声辐射是腔室内噪声的主要来源之一，随着舱室舒适性和军事装备低噪声要求的不断提高，控制板–腔耦合系统的低频声辐射噪声水平是当前声学领域备受关注的研究课题。

有源结构声控制技术(ASAC)作为低频结构噪声的有效控制方法，已在多个工程领域得到应用[1−5]。在有源结构声控制中，声辐射模态可以解耦声腔的声势能，消除结构模态中复杂的耦合项，使得只要减小任何一阶声辐射模态速度的幅值，就能保证结构辐射声功率的降低。声辐射模态的上述特性为结构声有源控制提供了新的思路，受到国内外众多学者的广泛关注[6−9]。声辐射模态的概念最早由 Borgiotti[10] 在研究弹性体向自由场辐射噪声的问题时提出，其初步探讨了利用声辐射模态控制弹性体结构声问题的可能性。Snyder 等[11] 将自由场的声辐射模态理论推广到板–腔耦合系统的结构声有源控制中，并分析了有源控制的机理。靳国永等[12] 利用声辐射模态建立了弹性封闭空间的有源控制模型，并对有源控制中的误差传感、控制策略、传感器布置等问题进行了深入探究。进一步地，其文献 13 和文献 14 将声辐射模态理论应用到双层板–腔耦合系统的结构声有源控制中，分析了控制策略和系统参数对控制效果的影响，指出在低频范围内，只需抵消前几阶声辐射模态贡献的声势能就能取得较好的控制效果。Hesse 等[15] 在利用声辐射模态进行结构声控制时指出，板–腔耦合系统的结构模态信息难以获取，这限制了声辐射模态理论的实际应用。为了突破这个限制他提出采用声模态在耦合面上的投影推导声辐射模态，无需引入结构模态信息，并通过有源控制试验实现了板–腔耦合系统宽频带噪声的全局控制。在 Hesse 工作的基础上，毛荣富等[16] 从理论上阐述了采用声模态在耦合面上的投影推导声辐射模态的条件，但仅局限于板–腔弱耦合条件。在已发表的文献中，现有的板–腔耦合系统的声辐射模态是由刚性边界声模态推导而来，由于刚性边界声模态采用傅里叶级数展开，其在结构声耦合面以及声阻抗边界上存在 Gibbs 现象，因而仅适用于声腔边界为刚性且内部介质为空气的弱耦合系统[17]。对于舰船结构声控制而言，常常是有源控制和无源控制相结合，在无源控制中，引入局部阻抗边界是控制中高频段噪声的有效方法，但阻抗边界的引入导致传统解决板–腔弱耦合系统的声辐射模态理论将不再适用，此外在船舶领域中，腔内声传播介质为水的结构–声强耦合系统更为常见。因此开展声腔为阻抗壁面以及结构–声强弱耦合均适用的声辐射模态理论研究对板–腔耦合系统的低频辐射噪声控制具有重要的意义。

近年来，基于能量原理的建模方法实现了对具有一般阻抗壁面的板–腔耦合系统的结构响应以及声学特性准确的预测[18−20]。本文在采用能量原理对耦合系统建模的基础上，通过对动力学方程的进一步推导得到声压模态幅值和结构模态幅值之间的关系，进而将声势能表示为结构模态幅值的二次型形式，得到了声腔为阻抗壁面及结构–声强弱耦合时均适用的声辐射模态，通过与文献和有限元结果进行对比验证了本文理论推导的正确性，并对耦合系统的声辐射模态特性进行了分析。

1 声辐射模态理论推导

1.1 耦合系统动力学模型

考虑由弹性板–矩形腔体构成的耦合系统，如图 1 所示，其由长宽高分别为 L_x, L_y, L_z 的矩形腔及其顶面的弹性板组成，弹性板与声腔之间的连接可采用弹性板边界 Γ 的平移弹簧刚度 b 和旋转弹簧刚度 B 来模拟，通过将平移弹簧刚度和旋转弹簧刚度设置为 0 或 ∞ 可以实现不同的边界条件组合[19]。矩形腔的 5 个内表面为阻抗壁面，对壁面阻抗系数的实部和虚部进行设置可以模拟不同的壁面声学条件[21]。弹性板在法向激励力 f 的作用下产生振动并向声腔内辐射噪声，同时声腔内声压作用于弹性板而影响结构的振动，弹性板与声腔声场相互作用构成板–腔耦合系统。根据能量原理，声场和弹性板的拉格朗日函数可分别表示为[19]:

$$L_{\mathrm{c}} = U_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{c}} - W_{\mathrm{wall}} - W_{\mathrm{d2c}}, \tag{1}$$

$$L_{\mathrm{d}} = U_{\mathrm{d}} - T_{\mathrm{d}} - W_{\mathrm{f}} + W_{\mathrm{c2d}}, \tag{2}$$

式中，L, U, T, W 分别表示拉格朗日函数、势能、动能和做功，下角标 c 和 d 分别对应声场和弹性板，d2c 表示弹性板振动对声场的作用，c2d 则表示腔内声场声压对弹性板的作用，f 表示外激励力对弹性板的作用，wall 表示阻抗边界对声场的作用，式 (1) 和式 (2) 中的函数项由腔内声场声压 p 和弹性板位移 w 得到，其具体的表达式在附录 1 中给出。在得到声场和弹性板的拉格朗日函数后，可采用 Rayleigh-Ritz 法选择合适的试函数对其进行求解，由于 Legendre 多项式满足 L2 内积正交性，能够简化建模过程，提

升计算效率 [20]，本文选择此多项式对耦合系统的拉格朗日函数进行求解。需要注意的是，由于 Legendre 多项式是在区间 $[-1,+1]$ 上定义，因此在使用其求解拉格朗日函数时需进行坐标变换，转换前后的坐标满足：

$$\alpha=\frac{2x-L_x}{L_x},\quad \beta=\frac{2y-L_y}{L_y},\quad \gamma=\frac{2z-L_z}{L_z}. \tag{3}$$

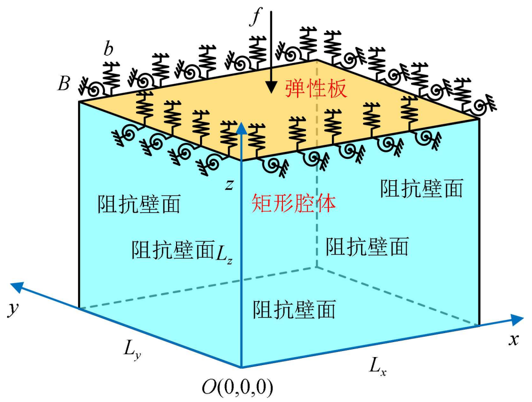


图 1 弹性板–矩形腔耦合系统示意图

根据 Rayleigh-Ritz 法，腔内声场声压 p 可由声压模态幅值向量 $\boldsymbol{P}$ 和声压试函数向量 $\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示，弹性板位移 w 可由结构模态幅值向量 $\boldsymbol{V}$ 和结构试函数向量 $\boldsymbol{\varPhi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)$ 表示，即：

$$p(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)\boldsymbol{P}, \tag{4}$$

$$w(\alpha,\beta)=\boldsymbol{\varPhi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\boldsymbol{V}, \tag{5}$$

式中，声压试函数向量 $\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)$ 和结构试函数向量 $\boldsymbol{\varPhi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)$ 分别由三维 Legendre 多项式级数和二维 Legendre 多项式级数展开：

$$\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{l=0}^{l_{\max}}\sum_{m=0}^{m_{\max}}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\mathrm{P}_l(\alpha)\mathrm{P}_m(\beta)\mathrm{P}_n(\gamma), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\varPhi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)=\sum_{j=0}^{j_{\max}}\sum_{q=0}^{q_{\max}}\mathrm{P}_j(\alpha)\mathrm{P}_q(\beta). \tag{7}$$

将式 (4)—式 (7) 代入附录 1 中得到拉格朗日函数各函数项并根据 Rayleigh-Ritz 法，使声场和弹性板的拉格朗日函数分别对声压模态幅值向量和结构模态幅值向量取极值，可得到声场和弹性板的系统方程：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{P}+\omega\boldsymbol{Z}_{\mathrm{c}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{P}+\omega^2\boldsymbol{C}_{\mathrm{d2c}}\boldsymbol{V}=0, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{V}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{c2d}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}, \tag{9}$$

将式 (8) 和式 (9) 整理为矩阵形式，得到弹性板–矩形腔耦合系统的动力学方程：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{c2d}}\\ \omega^2\boldsymbol{C}_{\mathrm{d2c}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}+\omega\boldsymbol{Z}_{\mathrm{c}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}\\ \boldsymbol{P}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别为刚度矩阵和质量矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为耦合作用矩阵，$\boldsymbol{Z}$ 为阻抗矩阵，其下角标的含义与前文一致，$\boldsymbol{F}$ 为作用在弹性板上的外激励力向量，ω 为角频率，各矩阵元素的具体计算式在附录 2 中给出。

1.2 声辐射模态求解

对于弹性板和矩形腔构成的耦合系统的结构声控制，选择声腔声势能作为全局误差准则 [12]：

$$E=\frac{1}{4\rho_{\mathrm{c}}c_{\mathrm{c}}^2}\iiint\limits_V|p(\alpha,\beta,\gamma)|^2\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma. \tag{11}$$

腔内声压可由声压模态幅值向量 $\boldsymbol{P}$ 和声压试函数向量 $\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示，因此可将声腔声势能进一步表示为：

$$E=\frac{L_xL_yL_z}{32\rho_{\mathrm{c}}c_{\mathrm{c}}^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)\boldsymbol{P}\right)^*\left(\boldsymbol{\varPsi}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,\gamma)\boldsymbol{P}\right)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma, \tag{12}$$

式中，$*$ 表示共轭。由于展开声压试函数向量的 Legendre 多项式满足正交性 [22]，即：

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(\alpha)^*\mathrm{P}_{l'}(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\begin{cases}0, & l\neq l',\\ \dfrac{2}{2l+1}, & l=l',\end{cases} \tag{13}$$

因而，式 (12) 可简化为：

$$E=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\varXi}\boldsymbol{P}, \tag{14}$$

式中，上角标 “H” 表示共轭转置，$\boldsymbol{\varXi}$ 为对角加权矩阵。其对角元素

$$\varXi(lmn,lmn)=\frac{L_xL_yL_z}{4\rho_{\mathrm{c}}c_{\mathrm{c}}^2}\sum_{l=0}^{l_{\max}}\sum_{m=0}^{m_{\max}}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\frac{1}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)}.$$

另一方面，由弹性板–矩形腔耦合系统的动力学方程 (10) 及分块矩阵的求逆公式 [23]，结构模态幅值向量 $\boldsymbol{V}$ 和声压模态幅值向量 $\boldsymbol{P}$ 可推导为：

$$\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{c2d}}(\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}+\omega\boldsymbol{Z}_{\mathrm{c}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}})^{-1}\omega^2\boldsymbol{C}_{\mathrm{d2c}}]^{-1}\boldsymbol{F}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{P}=-(\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}+\omega\boldsymbol{Z}_{\mathrm{c}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}})^{-1}\omega^2\boldsymbol{C}_{\mathrm{d2c}}[\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{c2d}}(\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}+\omega\boldsymbol{Z}_{\mathrm{c}}-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}})^{-1}\omega^2\boldsymbol{C}_{\mathrm{d2c}}]^{-1}\boldsymbol{F}, \tag{16}$$

由式 (15) 和式 (16) 可以看出，声压模态幅值向量 $\boldsymbol{P}$ 可由结构模态幅值向量 $\boldsymbol{V}$ 表达，即：

$$\boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{K}_{\rm c} + \omega \boldsymbol{Z}_{\rm c} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\rm c})^{-1} \omega^2 \boldsymbol{C}_{\rm d2c} \boldsymbol{V}, \tag{17}$$

令 $\boldsymbol{T} = -(\boldsymbol{K}_{\rm c} + \omega \boldsymbol{Z}_{\rm c} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{\rm c})^{-1} \omega^2 \boldsymbol{C}_{\rm d2c}$, 并将上式代入式 (14) 可得到：

$$E = \boldsymbol{V}^{\rm H} \boldsymbol{T}^{\rm H} \boldsymbol{\varXi} \boldsymbol{T} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{\rm H} \boldsymbol{\varOmega} \boldsymbol{V}, \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{\varOmega} = \boldsymbol{T}^{\rm H} \boldsymbol{\varXi} \boldsymbol{T}$ 表示误差加权矩阵，即将声腔声势能表示为结构模态幅值向量 $\boldsymbol{V}$ 的二次型形式。由误差加权矩阵的定义可知，$\boldsymbol{\varOmega}$ 为 Hermite 矩阵，又因为声腔声势能恒为正，所以 $\boldsymbol{\varOmega}$ 为正定的 Hermite 矩阵。对矩阵 $\boldsymbol{\varOmega}$ 进行特征值分解：

$$\boldsymbol{\varOmega} = \boldsymbol{D} \boldsymbol{A} \boldsymbol{D}^{\rm T}, \tag{19}$$

式中, $\boldsymbol{A}$ 为 $(j_{\max} q_{\max} \times j_{\max} q_{\max})$ 维特征值对角阵, 其对角元素 $\lambda_i \, (i = 1, 2, \cdots, j_{\max} q_{\max})$ 为 $\boldsymbol{\varOmega}$ 的特征值, 也称之为声辐射模态效率。$\boldsymbol{D}$ 为 $(j_{\max} q_{\max} \times j_{\max} q_{\max})$ 维特征向量正交阵，其列向量 $\boldsymbol{d}_i \, (i = 1, 2, \cdots, j_{\max} q_{\max})$ 与特征值 λ_i 一一对应且列向量之间相互正交，构成了结构模态幅值向量的一组正交基，即为耦合系统的声辐射模态。

进一步地，将式 (19) 代入式 (18), 可以得到：

$$E = \boldsymbol{V}^{\rm H} \boldsymbol{D} \boldsymbol{A} \boldsymbol{D}^{\rm T} \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{D}^{\rm T} \boldsymbol{V})^{\rm H} \boldsymbol{A} \boldsymbol{D}^{\rm T} \boldsymbol{V} = \boldsymbol{y}^{\rm H} \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}, \tag{20}$$

式中，$\boldsymbol{y}$ 为声辐射模态幅值向量，由于 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵。上式可进一步写为：

$$E = \boldsymbol{y}^{\rm H} \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{j_{\max} q_{\max}} \lambda_i \, |y_i|^2 = \sum_{i=1}^{j_{\max} q_{\max}} E_i, \tag{21}$$

式中，y_i 为第 i 阶声辐射模态幅值，E_i 为第 i 阶声辐射模态贡献的声势能。由式 (21) 可知，耦合系统的声势能可表示为各阶声辐射模态贡献声势能的累加和，由于声辐射模态 $\boldsymbol{d}_i$ 之间相互正交，所以各阶声辐射模态贡献的声势能相互独立，实现了耦合系统声势能的解耦。

在利用声辐射模态建立耦合系统的有源控制模型时，需要测量结构的法向振速来获取声势能以作为有源控制的误差准则，假设已知结构面 n_m 个离散点的法向振速向量为 $\boldsymbol{v}_m$, 同时根据式 (5) 及位移振速关系可将法向振速表示为：

$$\boldsymbol{v}_m = {\rm j} \omega \boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T} \boldsymbol{V}, \tag{22}$$

式中，${\rm j} = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T}$ 为与 n_m 个离散点位置相关的二维 Legendre 多项式矩阵，维度为 $(n_m \times j_{\max} q_{\max})$。进一步地，声辐射模态幅值向量可由结构面离散点位置的法向振速向量表示：

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{{\rm j} \omega} \boldsymbol{D}^{\rm T} \left(\boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T} \right)^{+} \boldsymbol{v}_m, \tag{23}$$

式中, 当结构面振速测点数 $n_m = j_{\max} q_{\max}$ 时, $(\boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T})^+$ 表示 $\boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T}$ 的逆，当结构面振速测点数 $n_m \neq j_{\max} q_{\max}$ 时，$\boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T}$ 不为方阵，$(\boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T})^+$ 表示其伪逆。由此，在测得结构表面离散点的法向振速后，通过式 (23) 可得到声辐射模态幅值向量，经过特征值加权后即可获取耦合系统的声势能。

2 数值结果与讨论

2.1 准确性验证

为了验算本文方法的准确性，选择文献 16 中的弹性板–腔体耦合模型进行分析，模型为一尺寸 $L_x \times L_y \times L_z = 0.868 \text{ m} \times 1.150 \text{ m} \times 1.000 \text{ m}$ 的矩形腔体，其顶面为厚度 $h = 0.006$ m 的弹性板，板的密度 $\rho_{\rm p} = 2700 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 泊松比 $\eta = 0.3$。对上述理论推导进行编程实现，在数值分析中，声压截断数和位移截断数均设置为 14。考虑文献 16 中结构–声弱耦合且腔体壁面为刚性壁面的情形，此时腔内介质为密度 $\rho_{\rm c} = 1.21 \text{ kg/m}^3$, 声速 $c_{\rm c} = 344$ m/s 的空气，刚性壁面可通过将壁面阻抗值设置为无穷大虚数来实现。图 2(a) 和图 2(b) 分别给出了耦合系统在 30 Hz 时本文的方法和文献 16 的方法计算的前 6 阶声辐射模态振型分布，图 3(a) 和图 3(b) 给出了耦合系统在分析频段 10～350 Hz 的前 6 阶声辐射模态辐射效率随频率变化曲线。对比可以发现，两种方法计算的声辐射模态振型分布是一致的，声辐射模态辐射效率随频率的变化趋势也相同，均会在声腔模态频率处产生峰值。同时也可以发现，声辐射模态振型和声辐射模态辐射效率的幅值与文献 16 相比并不一致，这是由于文献 16 中的声辐射模态向量是弹性板表面离散点振速向量的一组正交基，而本文的声辐射模态向量是结构模态幅值向量的一组正交基，两者之间相差一与振速离散点位置相关的二维 Legendre 多项式矩阵 $\boldsymbol{\varPhi}_m^{\rm T}$, 导致两者所对应的声辐射模态向量的振型和声辐射效率在幅值上存在差异。

进一步，利用有限元仿真工具对上述模型进行建模，在弹性板表面 $(0.015 \text{ m}, 0.375 \text{ m})$ 位置引入一幅值为 1 N 的法向简谐点力以模拟结构受激振动向腔内辐射噪声的情形，通过有限元工具获取弹性板结构离散点的振速向量后，分别利用文献 16 和本文的方法计算耦合系统的声势能，并选择的声势能结果作为对比。在有限元模型中，采用声–壳相互作用模

块进行建模，理论上来讲，对于声学网格，为了获得令人满意的结果，要求最大网格尺寸应小于最短分析波长的 1/6，建模中设置最大网格尺寸为 0.03 m，则空气介质和水介质对应的可信分析上限频率分别为 1.8 kHz 和 8.3 kHz，这对于本文考虑的 10～350 Hz 低频噪声来说是足够准确的，可以作为合理的参考。图 4 给出了各方法计算的结构–声弱耦合且腔体壁面为刚性壁面时耦合系统的声势能随频率的变化曲线，由图可知，本文方法计算的声势能响应与文献 16 及有限元的结果吻合良好，进一步验证了本文方法的准确性。

2.2 引入阻抗壁面的验证与分析

接下来考察本文方法在处理声腔为阻抗壁面时的理论准确性，在前文模型的基础上设置腔体 5 个壁面均为阻抗值 $Z = \rho_c c_c(400 - 50\mathrm{j})$ 的阻抗壁面。图 5 给出了引入阻抗壁面后的声势能曲线，对比可发现，本文方法计算的声势能与有限元的结果吻合

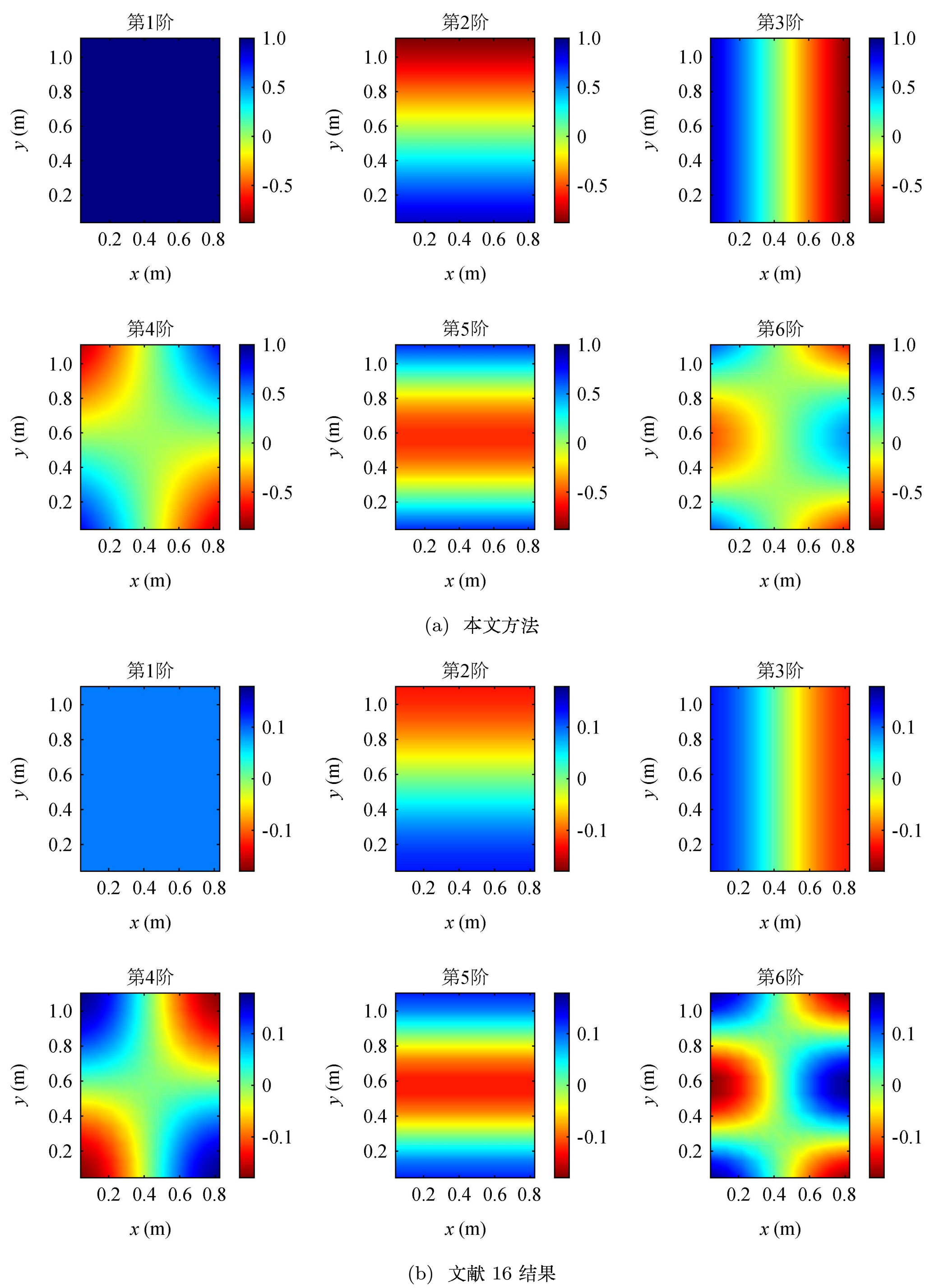
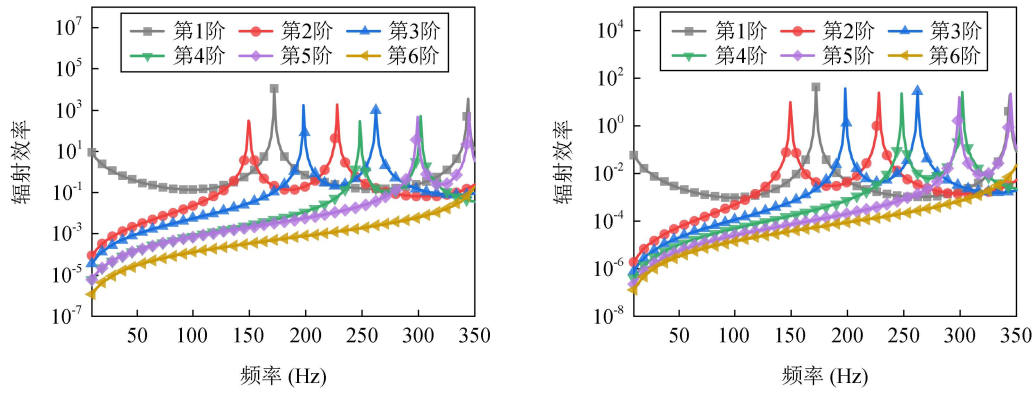


图 2　30 Hz 时，前 6 阶声辐射模态振型分布

良好，验证了本文方法在处理声腔为阻抗壁面时的适用性。为了更清楚地说明阻抗条件变化对声势能的影响，保持其它参数不变，分别设置腔体 5 个壁面阻抗值均为刚性壁面、$Z_1=\rho_c c_c(1000-50\mathrm{j})$, $Z_2=\rho_c c_c(400-50\mathrm{j})$ 和 $Z_3=\rho_c c_c(10-5\mathrm{j})$ 四种壁面条件，需要说明的是，在更改壁面阻抗时，只需重新计算误差加权矩阵中 $\boldsymbol{Z}_c$ 项即可求得对应情形的声辐射模态，可有效节省计算资源。图 6 给出了 4 种壁面条件下的声势能变化曲线，对比可以发现，阻抗壁面的引入只会降低声腔模态频率处 (149 Hz, 172 Hz, 198 Hz 等) 的声势能响应，并且随着阻抗值的减小，衰减效应更加明显，而对由弹性板结构模态激发的声势能峰值以及非模态频率的声势能响应基本没有影响。进一步地，图 7 给出了 4 种壁面条件下 10～350 Hz 前 6 阶声辐射模态辐射效率的变化曲线，可以发现，声辐射模态辐射效率曲线只会在声腔模态处产生峰值，在引入阻抗壁面后峰值幅值得到降低，并且阻抗值越小，峰值幅值降低幅度越大，而非声腔模态频率



(a) 本文方法 (b) 文献 16 结果

图 3 前 6 阶声辐射效率随频率变化曲线

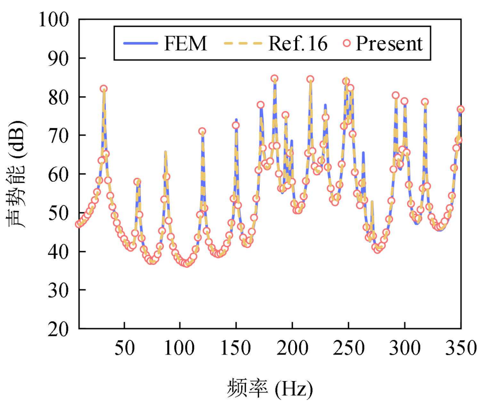


图 4 结构–声弱耦合时声势能曲线

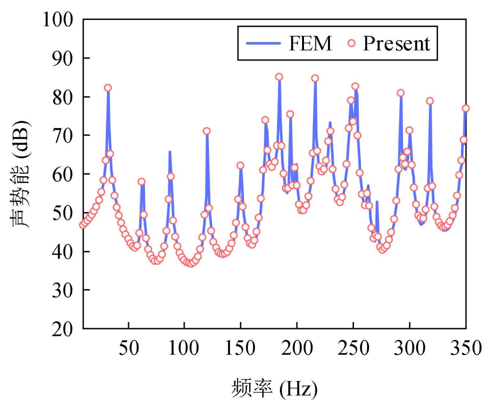


图 5 声腔为阻抗壁面时声势能曲线

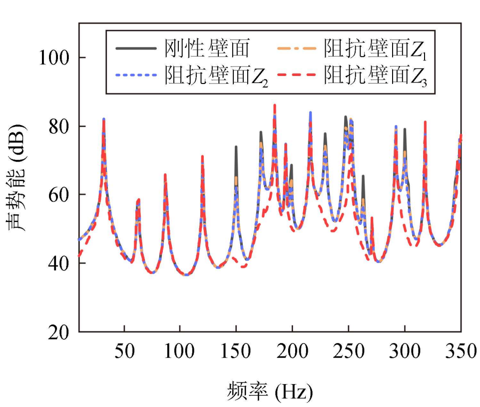


图 6 4 种壁面条件下声势能变化曲线

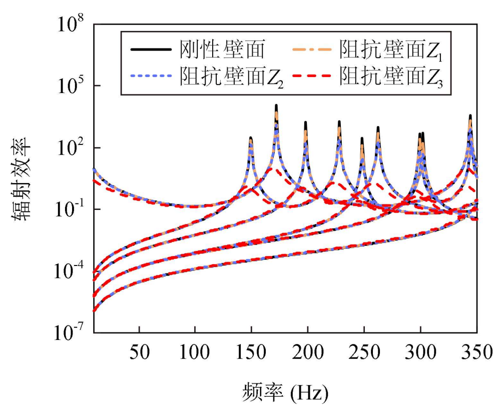


图 7 4 种壁面条件下前 6 阶声辐射模态辐射效率变化曲线

处的声辐射模态辐射效率基本不变，这也解释了声势能曲线在引入壁面阻抗边界条件后仅在声腔模态频率得到降低的原因。

2.3 结构–声耦合条件的验证与分析

在板–腔耦合系统中，对于相同尺寸参数的模型，结构–声耦合条件主要由腔内声传递介质决定，考虑腔内为密度 $\rho_c = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$，声速 $c_c = 1500\ \mathrm{m/s}$ 的水介质的情况，此时弹性板与腔体构成强耦合。图 8 为本文方法和有限元计算的引入阻抗壁面后的声势能的结果，可以看出，两者吻合良好，说明本文方法适用于结构–声强耦合条件。同时也可以发现，相比于结构–声弱耦合条件，当腔内介质为水时，结构与声场的强耦合作用使得模态密度更高，声势能响应幅值更低，这主要是由于腔内介质的改变，声腔模态频率会升高，在 10～350 Hz 低频段，声势能峰值由弹性板结构模态激发，而腔内高密度介质的存在相当于增加了弹性板的“质量”，改变了弹性板的机械阻抗。

文献 12 提到，对于弱耦合条件，声辐射模态的辐射效率曲线会在声腔模态频率处产生峰值。当弹性板与腔体强耦合时，由于腔内介质的改变，声腔模态频率会升高，为了探讨结构–声耦合条件变化对声辐射模态辐射效率的影响，图 9 给出了 10～1000 Hz 的前 6 阶声辐射模态辐射效率，可以看出，对于结构–声强耦合，声辐射模态的辐射效率曲线仍然会在声腔模态频率处产生峰值，但与弱耦合不同的是，强耦合时声腔模态频率集中在耦合系统频率的高频段，在 10～350 Hz 低频段，辐射效率曲线峰值数更少。

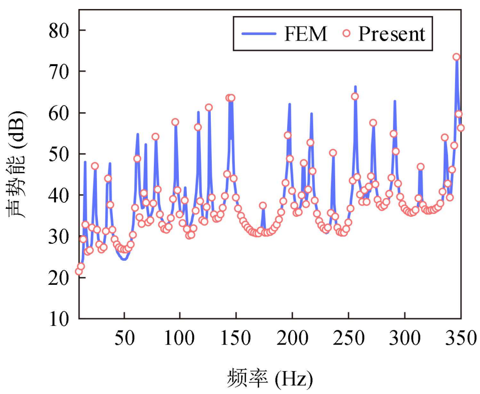


图 8　结构–声强耦合时声势能曲线

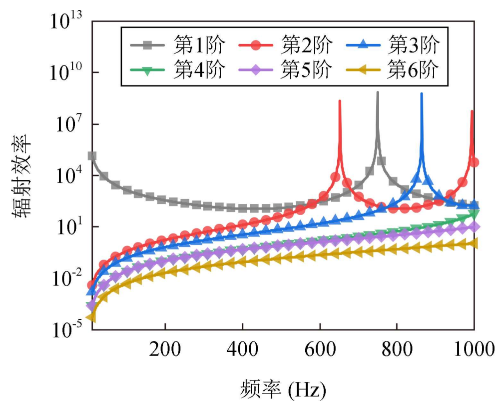


图 9　结构–声强耦合条件下前 6 阶声辐射模态辐射效率随频率变化曲线

3 结论

本文围绕板–腔耦合系统的声辐射模态计算问题，通过对耦合系统动力学方程的进一步推导，将声势能表示为结构模态幅值的二次型形式，提出了一种基于能量原理的声辐射模态计算方法，该方法不仅适用于具有阻抗壁面的板–腔耦合系统，而且能够有效计算结构与声场强弱耦合时的声辐射模态。并对不同条件下声辐射模态特性进行了分析。本文的主要研究内容和结论如下：

(1) 基于能量原理，提出了声腔为阻抗壁面及结构与声场强弱耦合均适用的声辐射模态计算方法，实现了对耦合系统声势能的有效预测。

(2) 对于板–腔弱耦合条件，相比于声腔均为刚性壁面，阻抗壁面的引入会降低声辐射模态辐射效率在峰值处的幅值，并且随着阻抗值的减小，幅值衰减效应越明显，具体表现为声势能曲线在辐射效率峰值频率处幅值会下降，而其它频率处则不变。

(3) 对于相同尺寸的板–腔耦合模型，强耦合条件下低频段的声势能响应主要由弹性板结构模态激发，响应峰值密度更高，幅值更低。在不同结构–声耦合条件下，声辐射模态辐射效率均会在声腔模态频率处产生峰值，但强耦合条件下由于声腔模态频率集中在耦合系统的高频段，在低频同频宽下辐射效率曲线峰值数更少。

参　考　文　献

1　孙运平，孙红灵，张维，王晗，杨军．充液管路系统流体声与结构声的复合有源控制．声学学报，2019; **44**(4): 780—787

2　Hasheminejad S M, Jamalpoor A. Control of sound transmission into a hybrid double-wall sandwich cylindrical shell. *J. Vib. Control*, 2021; **28**(5–6): 780—787

3　Hendricks D R, Johnson W R, Sommerfeldt D S *et al.* Experimental active structural acoustic control of simply supported plates using a weighted sum of spatial gradients. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2014; **136**(5): 2598

4 Milton J, Cheer J, Daley S. Active structural acoustic control using an experimentally identified radiation resistance matrix. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2020, **147**(3): 1459—1468

5 Tsutomu K, Kimihiko N. Active control of sound transmission into an enclosure using structural modal filters. *J. Sound Vib*, 2018; **431**: 328—345

6 张军，姜哲．基于声辐射模态的有源结构声辐射系统鲁棒 H_∞ 控制．振动与冲击，2010; **29**(4): 135—137

7 Hesse C, Papantoni V, Algermissen S *et al.* Frequency-independent radiation modes of interior sound radiation: Experimental study and global active control. *J. Sound Vib.*, 2017; **401**: 204—213

8 Sun Y, Yang T, Chen Y. Sound radiation modes of cylindrical surfaces and their application to vibro-acoustics analysis of cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 2018; **424**: 64—77

9 邱亮，姜哲．基于声辐射模态的粘弹性阻尼板声功率最小化研究．振动与冲击，2011; **30**(1): 40—43

10 Borgiotti, Giorgio V. The power radiated by a vibrating body in an acoustic fluid and its determination from boundary measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1990; **88**(4): 1884—1893

11 Snyder S D, Tanaka N. On feedforward active control of sound and vibration using vibration error signals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1993; **94**(4): 2181—2193

12 靳国永，杨铁军，刘志刚．基于声辐射模态的有源结构声传入及其辐射控制．声学学报，2009; **34**(3): 256—265

13 靳国永，刘志刚，杨铁军．双层板腔结构声传输及其有源控制研究．声学学报，2010; **35**(6): 665—677

14 靳国永，张洪田，刘志刚等．基于声辐射模态的双层板声传输有源控制数值仿真和分析研究．振动工程学报，2011; **24**(4): 435—443

15 Hesse C, Perez J V, Sinapius M. Frequency-independent radiation modes of interior sound radiation: An analytical study. *J. Sound Vib.*, 2017; **392**: 31—40

16 毛荣富，苏常伟，朱海潮．弱耦合封闭声腔的声辐射模态理论与计算．声学学报，2019; **44**(3): 297—302

17 Jayachandran V, Hirsch S M, Sun J Q. On the numerical modelling of interior sound fields by the modal function expansion approach. *J. Sound Vib.*, 1998; **210**(2): 243—254

18 Jin G Y, Chen Y H, Liu Z G. A Chebyshev–Lagrangian method for acoustic analysis of a rectangular cavity with arbitrary impedance walls. *Appl. Acoust.*, 2014; **78**: 33—42

19 Du J T, Li W L, Xu H A *et al.* Vibro-acoustic analysis of a rectangular cavity bounded by a flexible panel with elastically restrained edges. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2012; **131**(4): 2799—2810

20 廖金龙，朱海潮，侯九霄．结构声强耦合腔振声响应预报研究．振动与冲击，2022; **41**(5): 83—89

21 邢雪，杜敬涛，赵雨皓，刘志刚．考虑任意阻抗壁面条件管腔结构声场特性分析．声学学报，2019; **44**(3): 285—296

22 Agarwal R P, O'Regan D. Legendre polynomials and functions//Ordinary and partial differential equations. Universitext, Springer, New York, 2009: 47—56

23 沈进中，姜媛媛，朱洪波．关于分块矩阵求逆和行列式的方法探究与应用．安阳工学院学报，2019; **18**(4): 91—94

附录 1

$$U_{\mathrm{c}}=\frac{1}{2\rho_{\mathrm{c}}c_{\mathrm{c}}^2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\int_0^{L_z}p^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{A1}$$

$$T_{\mathrm{c}}=\frac{1}{2\rho_{\mathrm{c}}\omega^2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\int_0^{L_z}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{A2}$$

$$W_{\mathrm{d2c}}=\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}wp\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{A3}$$

$$U_{\mathrm{d}}=\frac{D}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\eta)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{\varGamma}\left\{bw^2+B\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2\right\}\mathrm{d}l, \tag{A4}$$

$$T_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{d}}h\omega^2\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}w^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{A5}$$

$$W_{\mathrm{f}}=fw(x_f,y_f), \tag{A6}$$

$$W_{\mathrm{wall}}=\sum_{i=1}^{5}\int_{S_i}-\frac{p^2}{2\mathrm{j}\omega Z_i}\mathrm{d}S_i, \tag{A7}$$

$$W_{\mathrm{c2d}}=W_{\mathrm{d2c}}. \tag{A8}$$

式中，p 和 w 分别为腔内声场声压和弹性板位移，ρ_{c} 和 c_{c} 分别为声场内介质的密度和声速，ρ_{d}, h 和 η 分别为弹性板的密度、厚度和材料泊松比，D 为结构弯曲刚度，S_i 为声腔第 i 个阻抗壁面的面积，Z_i 为该壁面的阻抗系数。

附录 2

式 (10) 中各矩阵元素的具体计算式为：

$$\begin{aligned}
k_{\mathrm{d}(jq,j'q')} = {} & 4D\left[\frac{L_y}{L_x^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j''(\alpha)\mathrm{P}_{j'}''(\alpha)\mathrm{P}_q(\beta)\mathrm{P}_{q'}(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta + \frac{L_x}{L_y^3}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j(\alpha)\mathrm{P}_{j'}(\alpha)\mathrm{P}_q''(\beta)\mathrm{P}_{q'}''(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta + \right.\\
& \frac{\eta}{L_xL_y}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j''(\alpha)\mathrm{P}_{j'}(\alpha)\mathrm{P}_q''(\beta)\mathrm{P}_{q'}(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta + \frac{\eta}{L_xL_y}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j(\alpha)\mathrm{P}_{j'}''(\alpha)\mathrm{P}_q(\beta)\mathrm{P}_{q'}''(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta + \\
& \left.\frac{2(1-\eta)}{L_xL_y}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j'(\alpha)\mathrm{P}_{j'}'(\alpha)\mathrm{P}_q'(\beta)\mathrm{P}_{q'}'(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right] + \\
& \frac{L_x}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j(\alpha)\mathrm{P}_{j'}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\left[b_{y0}\mathrm{P}_q(-1)\mathrm{P}_{q'}(-1) + \frac{4}{L_y^2}B_{y0}\mathrm{P}_q'(-1)\mathrm{P}_{q'}'(-1) + b_{yLy}\mathrm{P}_q(1)\mathrm{P}_{q'}(1) + \frac{4}{L_y^2}B_{yLy}\mathrm{P}_q'(1)\mathrm{P}_{q'}'(1)\right] + \\
& \frac{L_y}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_q(\beta)\mathrm{P}_{q'}(\beta)\mathrm{d}\beta\left[b_{x0}\mathrm{P}_j(-1)\mathrm{P}_{j'}(-1) + \frac{4}{L_x^2}B_{x0}\mathrm{P}_j'(-1)\mathrm{P}_{j'}'(-1) + b_{xLx}\mathrm{P}_j(1)\mathrm{P}_{j'}(1) + \frac{4}{L_x^2}B_{xLx}\mathrm{P}_j'(1)\mathrm{P}_{j'}'(1)\right],
\end{aligned} \tag{B1}$$

$$\begin{aligned}
k_{\mathrm{c}(lmn,l'm'n')} = \frac{L_xL_yL_z}{2\rho_{\mathrm{c}}} & \left[\frac{1}{L_x^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l'(\alpha)\mathrm{P}_{l'}'(\alpha)\mathrm{P}_m(\beta)\mathrm{P}_{m'}(\beta)\mathrm{P}_n(\gamma)\mathrm{P}_{n'}(\gamma)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma + \right.\\
& \frac{1}{L_y^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(\alpha)\mathrm{P}_{l'}(\alpha)\mathrm{P}_m'(\beta)\mathrm{P}_{m'}'(\beta)\mathrm{P}_n(\gamma)\mathrm{P}_{n'}(\gamma)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma + \\
& \left.\frac{1}{L_z^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(\alpha)\mathrm{P}_{l'}(\alpha)\mathrm{P}_m(\beta)\mathrm{P}_{m'}(\beta)\mathrm{P}_n'(\gamma)\mathrm{P}_{n'}'(\gamma)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\right],
\end{aligned} \tag{B2}$$

$$m_{\mathrm{d}(jq,j'q')} = \frac{L_xL_y\rho_{\mathrm{d}}h}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j(\alpha)\mathrm{P}_{j'}(\alpha)\mathrm{P}_q(\beta)\mathrm{P}_{q'}(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta, \tag{B3}$$

$$m_{\mathrm{c}(lmn,l'm'n')} = \frac{L_xL_yL_z}{8\rho_{\mathrm{c}}c_{\mathrm{c}}^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(\alpha)\mathrm{P}_{l'}(\alpha)\mathrm{P}_m(\beta)\mathrm{P}_{m'}(\beta)\mathrm{P}_n(\gamma)\mathrm{P}_{n'}(\gamma)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma, \tag{B4}$$

$$c_{\mathrm{d2c}(jq,lmn)} = \frac{L_xL_y\mathrm{P}_n(1)}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j(\alpha)\mathrm{P}_l(\alpha)\mathrm{P}_q(\beta)\mathrm{P}_m(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta, \tag{B5}$$

$$\begin{aligned}
z_{\mathrm{c}(lmn,l'm'n')} = -\frac{1}{4\mathrm{j}} & \left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{L_xL_y\mathrm{P}_n(-1)\mathrm{P}_{n'}(-1)}{Z_{z0}}\mathrm{P}_l(\beta)\mathrm{P}_{l'}(\beta)\mathrm{P}_m(\gamma)\mathrm{P}_{m'}(\gamma)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta + \right.\\
& \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{L_yL_z\mathrm{P}_l(-1)\mathrm{P}_{l'}(-1)}{Z_{x0}}\mathrm{P}_m(\beta)\mathrm{P}_{m'}(\beta)\mathrm{P}_n(\gamma)\mathrm{P}_{n'}(\gamma)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma + \\
& \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{L_yL_z\mathrm{P}_l(1)\mathrm{P}_{l'}(1)}{Z_{xLx}}\mathrm{P}_m(\beta)\mathrm{P}_{m'}(\beta)\mathrm{P}_n(\gamma)\mathrm{P}_{n'}(\gamma)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma + \\
& \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{L_xL_z\mathrm{P}_m(-1)\mathrm{P}_{m'}(-1)}{Z_{y0}}\mathrm{P}_l(\alpha)\mathrm{P}_{l'}(\alpha)\mathrm{P}_n(\gamma)\mathrm{P}_{n'}(\gamma)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\gamma + \\
& \left.\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{L_xL_z\mathrm{P}_m(1)\mathrm{P}_{m'}(1)}{Z_{yLy}}\mathrm{P}_l(\alpha)\mathrm{P}_{l'}(\alpha)\mathrm{P}_n(\gamma)\mathrm{P}_{n'}(\gamma)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\gamma\right].
\end{aligned} \tag{B6}$$