

# 采用四阶累积量多重矩阵重构的低信噪比 相干声源波达方向估计\*

张 豪 甄 冬 刘英辉 冯国金<sup>†</sup> 张 浩

(河北工业大学 机械工程学院 天津 300401)

2022 年 2 月 18 日收到

2022 年 9 月 1 日定稿

**摘要** 针对相干声源子空间能量扩散且协方差矩阵欠秩难以有效估计波达方向 (DOA) 的问题, 提出了一种采用高阶矩阵变换的估计方法—四阶累积量多重矩阵重构 (FOC-MMR)。该方法首先对阵列声压数据分帧进行短时傅里叶变换, 然后对四阶累积量扩展的高阶协方差矩阵进行奇异值分解 (SVD) 得到高阶噪声特征向量, 保证该噪声特征向量与扩展后的高阶阵列流形矢量正交匹配, 最终实现相干信号的 DOA 估计。相干单频矩形脉冲信号仿真结果表明, 将 FOC-MMR 方法应用于均匀线阵 (ULA,  $M = 4$ ), 在信噪比  $\text{SNR} \geq -15$  dB 时, 相干信号 ( $\theta_1 = -20^\circ$  和  $\theta_2 = 20^\circ$ ) 的均方根误差保持在  $1.5^\circ$  以内; 在  $\text{SNR} = 10$  dB 时, 可正确分辨的两相干信号方位间隔  $\Delta\theta$  可以低至  $5^\circ$ 。在相干脉冲声源实验中, 通过混入  $\text{SNR} = 5$  dB 高斯白噪声, 验证了 FOC-MMR 算法在应用于由多个 ULA 组成的矩形面阵时, 其分辨邻近声源和抑制高斯噪声的能力较高。FOC-MMR 算法通过对声压阵列数据扩展得到满秩的高阶协方差矩阵, 不仅解决了由信号相干造成的噪声和信号特征向量之间能量扩散的问题, 还实现了以较高的测向精度和空间分辨率对广角入射的多组相干声源的 DOA 估计。

**关键词** 相干信号, 高阶矩阵变换, 四阶累积量, 波达方向, 多重信号分类算法

**PACS 数** 43.60

## Fourth-order cumulant multiple matrix reconstruction to estimate direction of arrival for coherent sound source under low signal-to-noise ratio

ZHANG Hao ZHEN Dong LIU Yinghui FENG Guojin<sup>†</sup> ZHANG Hao

(School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology Tianjin 300401)

Received Feb. 18, 2022

Revised Sept. 1, 2022

**Abstract** A direction of arrival (DOA) estimation method that adopts higher-order matrix transformation, named fourth-order cumulant multiple matrix reconstruction (FOC-MMR), is proposed to effectively estimate the DOA of the coherent sound sources which cause the subspace energy dispersion and under-rank of the covariance matrix. Firstly, short-time Fourier transform is performed on the array sound pressure data in frames. Secondly, singular value decomposition (SVD) of the fourth-order cumulant-expanded higher-order covariance matrix is calculated to obtain the higher-order noise eigenvectors, which are orthogonally matched with the expanded higher-order array manifold vector. Finally, DOA estimation of the coherent signals is achieved. The simulation results of coherent single-frequency rectangular pulse signal show that when the signal-to-noise ratio (SNR)  $\geq -15$  dB, applying the proposed method to the uniform linear array (ULA,  $M = 4$ ), the root mean square error (RMSE) of coherent signals ( $\theta_1 = -20^\circ$  and  $\theta_2 = 20^\circ$ ) remains within  $1.5^\circ$ . The correctly resolved azimuth interval  $\Delta\theta$  can be as low as  $5^\circ$  when the SNR = 10 dB. The coherent pulse sound source experiment mixed with SNR = 5 dB Gaussian white noise verifies that when applying the FOC-MMR algorithm to a rectangular area array composed of multiple ULAs, it can distinguish adjacent sound sources with a high degree of ability to suppress Gaussian noise. The proposed method achieves full-rank high-order covariance matrix by reconstructing the virtual sound

\* 国家自然科学基金项目 (52275101) 资助

<sup>†</sup> 通讯作者: 冯国金, [Guojin.Feng@outlook.com](mailto:Guojin.Feng@outlook.com)

pressure array data, which not only solves the problem of energy diffusion between noise and signal eigenvectors caused by signal coherence, but also the DOA estimation of multiple groups of coherent sound sources with wide-angle incidence is achieved with higher direction measurement accuracy and spatial resolution.

**Keywords** Coherent signals, Higher-order matrix transformation, Fourth-order cumulants, Direction of arrival, Multiple signal classification

## 引言

波达方向 (DOA) 估计是传声器阵列信号处理的重要研究方向。复杂声场中, 由于声源之间相互干涉造成声源相干, 进而影响 DOA 估计精度。针对相干声源 DOA 估计问题, 国内外学者主要通过研究各种阵列结构和改进 DOA 估计算法来解决。其中, 基于子空间的算法在估计复杂声场中邻近相干声源的 DOA 时, 估计效果较差。主要原因在于应用于子空间法对阵列信号的欠秩协方差矩阵进行奇异值分解 (SVD)<sup>[1-2]</sup> 后, 得到的信号特征向量和噪声特征向量 (NFV) 会因能量扩散而呈现非严格正交, 从而导致由 NFV 与阵列流形矢量 (AMV) 决定的空间谱重建声场产生混叠, 无法有效估计相干信号的 DOA。

根据声压数据矩阵处理过程和阵列结构不同, 基于子空间的相干声源 DOA 估计算法主要分为空间平滑算法<sup>[3-5]</sup>、矩阵重构算法<sup>[6-8]</sup>、最大似然估计算法<sup>[9-11]</sup>、高阶累积量重构算法<sup>[12-18]</sup>、稀疏正则化和反卷积算法<sup>[19-21]</sup>等。文献 [4] 利用空间平滑方法迭代运算恢复去除噪声分量后协方差矩阵的秩, 但是其计算量会随迭代次数增加而递增。文献 [9] 提出基于频率平滑的最大似然估计方法 (FS-MLE), 通过频率平滑技术提高最大似然估计法<sup>[10]</sup> 对独立或相干声源的 DOA 估计精度和分辨率, 当参与拟合的数据较少, 特别是 SNR < 0 dB 时, DOA 的估计精度会有所降低; 当参与拟合的数据过多时, 则会导致运算复杂度增加。文献 [12] 结合最小冗余线阵 (MRLA) 和四阶累积量的扩展性, 通过应用四阶累积量改进波束形成方法验证了其具有更高的线阵阵列增益和噪声抑制能力。文献 [13-14] 分别利用高阶累积量改进多重信号分类算法 (MUSIC) 和旋转不变技术估计参数法 (ESPRIT), 由于高阶累积量对虚拟阵列的扩展, 使得不受阵型限制<sup>[16-18]</sup> 的谱估计算法可以有效抑制高斯噪声的干扰, 从而实现多个独立信号的 DOA 估计。然而, 当复杂声场由相干声源组成时, 研究基于高阶累积量阵列扩展得到的满秩高阶协方差矩阵是否包含所有声源信息, 对其奇异值分解 (SVD) 得到的高阶噪声特征向量 (HO-NFV) 是否正交于高阶阵

列流形矢量 (HO-AMV), 当信噪比较低和阵元较少时信号和噪声的特征是否能完全分离, 是保证改进 MUSIC 类算法能否用于相干声源 DOA 估计的关键。

针对低信噪比下相干声源的 DOA 估计, 提出了一种采用高阶矩阵变换的估计方法, 即四阶累积量多重矩阵重构 (FOC-MMR), 该方法利用声信号的时频域稀疏特性<sup>[22-23]</sup> 对传声器阵列信号进行多重矩阵重构。首先, 利用四阶累积量重构短时傅里叶变换 (STFT) 后的传声器阵列声压数据以抑制高斯噪声的干扰。然后, 对重构矩阵的协方差进行奇异值分解 (SVD), 以获得能量分离的高阶信号特征向量和高阶噪声特征向量 (HO-NFV)。其中, 为了对应数据重构之后的扩展阵列结构信息, 对原始 AMV 及其复共轭求克罗内克积以得到高阶阵列流形矢量 (HO-AMV)。最后, 根据 NFV 和 AMV 的正交性计算功率谱对空间网格进行归一化空间谱 (NSS) 峰值搜索, 从而实现相干声源的 DOA 有效估计。

## 1 系统模型和高阶矩阵变换方法

### 1.1 系统模型

考虑在平面矩形区域均匀地布置间距为  $d$  的  $M \times N$  个传声器, 如图 1 所示。假设声场由来自距离原点  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_i, \dots, r_I]$  的  $I$  个远场声源组成, 第  $i$  个

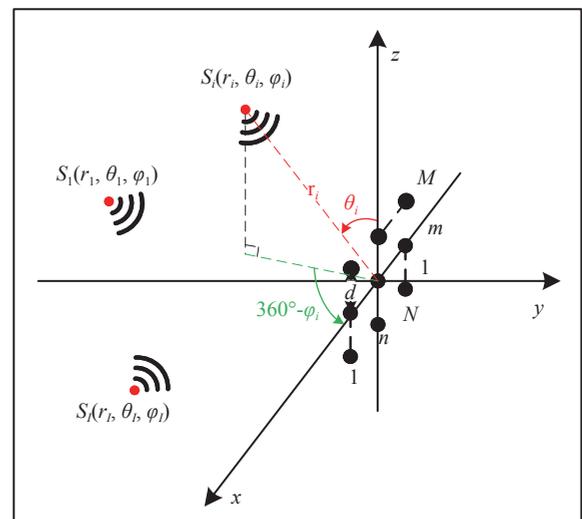


图 1 均匀矩形阵模型

声源发出的平面波到达阵列的主要传播路径相应的仰角  $\theta_i$  和方位角  $\varphi_i$ , 相应的 DOA 表示为  $\delta_i = (\varphi_i, \theta_i)$ 。

在均匀介质中传播的平面波由远场声源  $S_i(r_i, \theta_i, \varphi_i)$  生成, 定义波数  $\mathbf{k}_i$  为

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{u}, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{u}$  为单位矢量,  $\mathbf{u} = (-\sin\theta_i \cos\varphi_i, -\sin\theta_i \sin\varphi_i, -\cos\theta_i)^\top$ , 阵列的可视区域为  $\sqrt{u_x^2 + u_z^2} \leq 1$ , 即  $\varphi_i \in [180^\circ, 360^\circ]$  和  $\theta_i \in [0^\circ, 180^\circ]$ 。

类似于线阵的 AMV 定义, 第  $m (m = 1, \dots, M)$  行传声器的 AMV 可定义为

$$\mathbf{v}_m(\boldsymbol{\psi}_i) = [\exp(jm\psi_{zi}), \exp(j(\psi_{xi} + m\psi_{zi})), \dots, \exp(j((N-1)\psi_{xi} + m\psi_{zi}))]^\top, \quad (2)$$

式中向量  $\boldsymbol{\psi}_i = [\psi_{xi}, \psi_{zi}]^\top$ , 其中  $\psi_{xi} = 2\pi d \sin\theta_i \cos\varphi_i / \lambda$ ,  $\psi_{zi} = 2\pi d \cos\theta_i / \lambda$ ,  $d = \lambda/2 = c/2f$ ,  $c$  为声音在介质中的传播速度,  $f$  为声源的主频<sup>[24]</sup>。则  $N \times M$  阶 AMV, 即  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_i)$  定义为

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_i) = [\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\psi}_i), \dots, \mathbf{v}_m(\boldsymbol{\psi}_i), \dots, \mathbf{v}_{M-1}(\boldsymbol{\psi}_i)]. \quad (3)$$

将  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_i)$  改写为  $NM \times 1$  的列向量  $\mathbf{CV}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_i)) = [\mathbf{v}_0^\top(\boldsymbol{\psi}_i), \dots, \mathbf{v}_m^\top(\boldsymbol{\psi}_i), \dots, \mathbf{v}_{M-1}^\top(\boldsymbol{\psi}_i)]^\top$ , 并改写为 Kronecker 积的形式, 表示为

$$\mathbf{CV}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_i)) = \mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_{zi}) \otimes \mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_{xi}), \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_{zi})$  和  $\mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_{xi})$  分别表示第  $n (n = 1, \dots, N)$  列和第  $m (m = 1, \dots, M)$  行的传声器的 AMV:

$$\mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_{zi}) = [1, \exp(j\psi_{zi}), \dots, \exp(jm\psi_{zi}), \dots, \exp(j(M-1)\psi_{zi})]^\top, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_{xi}) = [1, \exp(j\psi_{xi}), \dots, \exp(jn\psi_{xi}), \dots, \exp(j(N-1)\psi_{xi})]^\top. \quad (6)$$

传声器阵列接收到的阵列信号数据可表示为矩阵形式:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^I s_i \mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_i) + \mathbf{N}(t) = \mathbf{KR}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi})) \mathbf{S}(k) + \mathbf{N}(t), \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{KR}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi})) = [\mathbf{CV}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_1)), \dots, \mathbf{CV}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_I)), \dots, \mathbf{CV}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}_I))] \in \mathbb{C}^{NM \times I}$  包含了阵列和信号的空间特征, 在后续的数据处理中至关重要, 因为其中包含了声源的 DOA 信息。  $\mathbf{N}(t) \in \mathbb{C}^{NM \times I}$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声, 且噪声与信号独立<sup>[1]</sup>。  $\mathbf{S}(k) = \text{diag}(s_1, \dots, s_i, \dots, s_I) \in \mathbb{C}^{I \times I}$  包含  $I$  个相干信号,  $s_i(f_i, \phi_i) = a_i \exp(j2\pi f_i t + \phi_i)$ ,  $a_i$  和  $\phi_i$  分别是第  $i$  个声源的幅值和相位, 相干系数由相位  $\phi_i$  和频率  $f_i$  共同决定, 定义为<sup>[25-26]</sup>

$$r_{ij}^2(f, \phi) = |G_{s_i s_j}(f, \phi)|^2 / [G_{s_i s_i}(f, \phi) G_{s_j s_j}(f, \phi)]. \quad (8)$$

声源信号  $s_i$  和  $s_j$  的互功率谱密度为  $G_{s_i s_j}(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_i s_j}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau$ , 其中互相关函数  $R_{s_i s_j}(\tau) =$

$\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} s_i(t) s_j(t - \tau) dt$ ,  $T$  为信号周期, 相位差  $\phi = 2\pi f \tau$  由信号时延差  $\tau$  确定<sup>[26]</sup>。

式 (7) 中  $\mathbf{KR}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi})) \in \mathbb{C}^{NM \times I}$  为矩阵  $\mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_z)$  和  $\mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_x)$  的 Khatri-Rao 积, 表示为

$$\mathbf{KR}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi})) = \mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_z) \circ \mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_x) = [z_1 \otimes x_1, \dots, z_j \otimes x_j, \dots, z_I \otimes x_I], \quad (9)$$

其中  $z_j$  和  $x_j$  分别代表矩阵  $\mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_z)$  和  $\mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_x)$  的第  $j$  列, 式 (9) 中包含信号源 DOA 数据向量  $\boldsymbol{\psi}$ , 并可定义为

$$\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_i, \dots, \boldsymbol{\psi}_I], \quad (10)$$

式中  $M$  行和  $N$  列阵元对  $I$  个源的 AMV, 即  $\mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_z) \in \mathbb{C}^{M \times I}$  和  $\mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_x) \in \mathbb{C}^{N \times I}$  分别表示为

$$\mathbf{A}_z(\boldsymbol{\psi}_z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp(j(M-1)\psi_{z1}) & \dots & \exp(j(M-1)\psi_{zI}) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times I}, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_x(\boldsymbol{\psi}_x) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp(j(N-1)\psi_{x1}) & \dots & \exp(j(N-1)\psi_{xI}) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times I}. \quad (12)$$

## 1.2 高阶矩阵变换方法

为了从阵列接收的信号数据中获得声源信息, 对  $MN \times I$  维信号矩阵加 Kaiser 窗<sup>[23]</sup> 求 STFT 表示为  $\mathbf{X}$ , 再进行奇异值分解, 式 (7) 可以写作:

$$\mathbf{X} = \mathbf{KR}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi})) \mathbf{S}(k) + \mathbf{N}(t) = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H, \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{MN \times MN}$  和  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{I \times I}$  的列向量分别是  $\mathbf{X} \mathbf{X}^H$  和  $\mathbf{X}^H \mathbf{X}$  的特征向量,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{MN \times I}$  是降序排列的奇异值构成的对角矩阵。从上述定义可以看出  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  的列向量分别是信号数据协方差矩阵  $\mathbf{R}_u = E\{\mathbf{X} \mathbf{X}^H\}$  和  $\mathbf{R}_v = E\{\mathbf{X}^H \mathbf{X}\}$  的特征向量,  $\mathbf{D}$  中奇异值与接收的信号数目和能量有关。

式 (13) 中  $\mathbf{X}$  的四阶累积量矩阵可表示为<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{C}_{4X} = E\{(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)^H\} - E\{\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*\} E\{(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)^H\} - E\{\mathbf{X} \mathbf{X}^*\} \otimes E\{\mathbf{X} \mathbf{X}^*\}^H. \quad (14)$$

根据 Kronecker 积的性质, 信号和噪声的四阶累积量表示为

$$\mathbf{C}_{4S} = E\{(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)^H\} - E\{\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*\} E\{(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)^H\} - E\{\mathbf{S} \mathbf{S}^*\} \otimes E\{\mathbf{S} \mathbf{S}^*\}^H, \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_{4N} = E\{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)^H\} - E\{\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*\} E\{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)^H\} - E\{\mathbf{N} \mathbf{N}^*\} \otimes E\{\mathbf{N} \mathbf{N}^*\}^H. \quad (16)$$

为简化公式形式, 令  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{KR}(\mathbf{V}(\boldsymbol{\psi}))$ ,  $\mathbf{X}$  的四阶累积量  $\mathbf{C}_{4X}$  表示为矩阵形式, 即

$$\mathbf{C}_{4X} = (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*) \mathbf{C}_{4S} (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*)^H + \mathbf{C}_{4N}. \quad (17)$$

对阵列输出数据的四阶累积量矩阵  $C_{4X}$  求协方差, 可表示为

$$\mathbf{R}_{C_{4X}} = \frac{C_{4X}(C_{4X})^*}{MN \cdot MN}. \quad (18)$$

对  $\mathbf{R}_{C_{4X}}$  进行特征值分解, 分别得到信号子空间  $\mathbf{C}_S \in \mathbb{C}^{(NM)^2 \times I^2}$  和噪声子空间  $\mathbf{C}_N \in \mathbb{C}^{(NM)^2 \times ((NM)^2 - I^2)}$ 。

最后, 根据 MUSIC 算法<sup>[1]</sup> 定义空间谱公式, 可以得到由四阶累积量和 Kronecker 积变换的声压数据  $\mathbf{X}$  和阵列流形矢量  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\psi})$  定义的高阶矩阵变换方法—四阶累积量多重矩阵重构 (FOC-MMR) 法的归一化空间谱 (NSS), 可表示为

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{(MN)^2} \frac{(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*)^H (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*)}{[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*)^H \mathbf{C}_N][(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*)^H \mathbf{C}_N]^H}. \quad (19)$$

式 (19) 中, 空间谱  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{C}^{I^2 \times I^2}$  包含  $I$  个声源的 DOA 信息, 将  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\psi})$  看作目标函数<sup>[23]</sup>, 其中  $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_I]$  是函数的自变量, 式 (19) 求解最大值  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\psi})$  的问题定义为式 (20)。以分辨率  $1^\circ$  对空间  $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$  和  $\varphi \in [180^\circ, 360^\circ]$  划分, 即可求得令  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\psi})$  最大的  $\boldsymbol{\delta} = (\varphi, \theta)$ , 该数值解即为 DOA 估计值,

$$\boldsymbol{\delta} = (\varphi, \theta) = \arg \max(\mathbf{P}(\boldsymbol{\psi})). \quad (20)$$

上述公式中,  $\odot$  和  $\otimes$  分别表示矩阵的 Khatri-Rao 积和 Kronecker 积,  $(\cdot)^*$  表示矩阵的复共轭,  $(\cdot)^H$  表示矩阵的共轭转置。

## 2 仿真实验与结果分析

在平面矩形阵列中包含有两个或两个以上线性阵列, 线性阵列在几何结构上为矩形平面阵列的某行, 设置仿真阵列模型为均匀线性阵列 (ULA)。将提出的四阶累积量多重矩阵重构 (FOC-MMR) 方法与频率平滑最大似然估计法 (FS-MLE) 应用于均匀线阵 (ULA, 阵元  $M = 4$ , 有效孔径  $K_a = 4d$ ), 估计两个相干信号的方位。构建仿真信号源为一组相干系数为 0.81 的周期性单频矩形脉冲信号 (频率  $f = 1$  kHz, 相位差  $\Delta\phi = 0.2\pi$ , 幅值  $a = 2$ , 占空比为 20%), 脉冲周期为 0.25 s, 信号总长度为 1 s。构建的仿真信号时域波形和频谱如图 2(a) 和图 2(b) 所示。

为评估均方根误差, 对估计  $I$  个信号源的 DOA 时, 进行  $L$  次独立实验的均方根误差 (RMSE) 给出定义:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{(\theta_1^{(l)} - \theta_1^0)^2 + \dots + (\theta_i^{(l)} - \theta_i^0)^2 + \dots + (\theta_I^{(l)} - \theta_I^0)^2}{L}}, \quad (21)$$

式中,  $\theta_i$  为信号与线阵法线的夹角,  $\theta_i^0$  为算法估计的

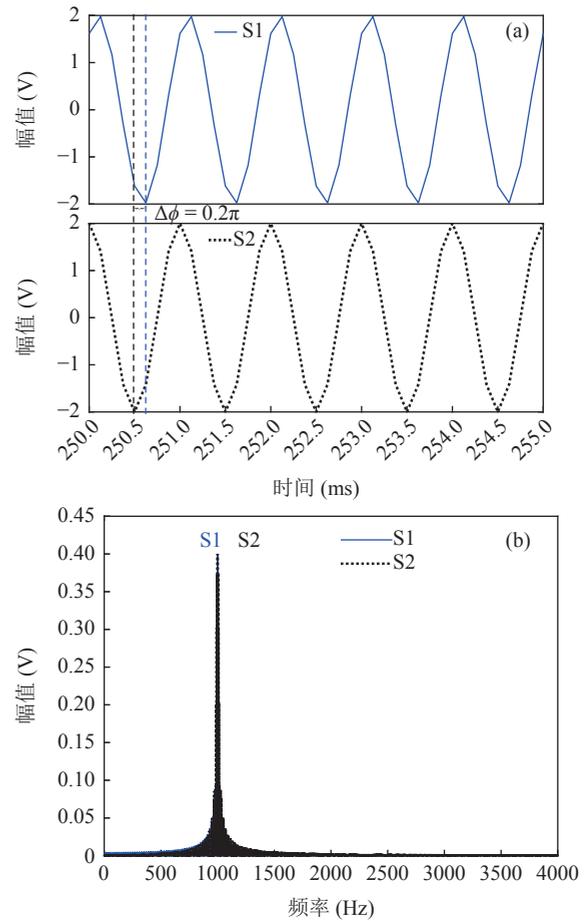


图 2 仿真信号 (a) 时域相位差 ( $\Delta\phi = 0.2\pi$ ); (b) 仿真信号频谱

信号 DOA,  $I$  为信号的个数,  $L$  为独立试验的次数。

### 2.1 实验 1: 评估不同 SNR 时的 DOA 估计精度

为衡量两种算法在估计相干信号 DOA 时的精度, 按照信号和噪声的功率比值  $\text{SNR} = 10 \lg(P_S/P_N)$  在仿真信号中加入不同信噪比的高斯白噪声, 通过归一化空间谱和 DOA 估计结果的 RMSE 曲线来评估算法的估计精度。

在仿真信号中添加信噪比为  $-15$  dB 的高斯白噪声, 采用基于 ULA ( $M = 4$ ) 的 FS-MLE 和 FOC-MMR 算法进行 DOA 估计。当声源角度为  $\theta_1 = -20^\circ$  和  $\theta_2 = 20^\circ$  时, 获得的归一化空间谱如图 3(a) 所示。可见, 当信噪比低至  $-15$  dB 时, FS-MLE 算法估计相干信号源的精度较低, 且对幅值相等的两个信号的归一化空间谱峰值估计差距较大; 而 FOC-MMR 方法的估计精度高于 FS-MLE 算法, 且两个相干信号的归一化空间谱峰值差异较小, 可以有效地辨识仅相位和波达角度不同的两个相干信号。

为进一步评估算法在不同信噪比下的 DOA 估计精度, 构建信噪比从  $-15$  dB 增加至  $15$  dB, 步长为

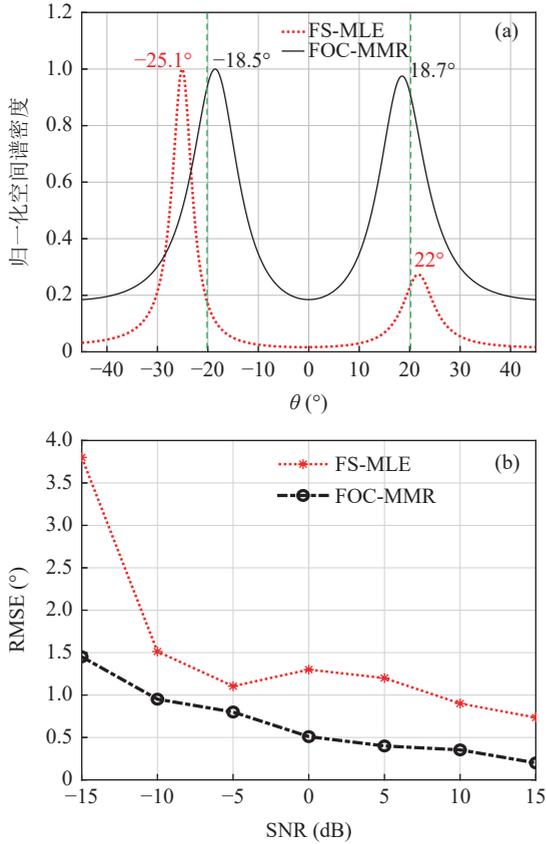


图3 实验1 (a) 归一化空间谱 (ULA( $M=4$ ), SNR=-15 dB,  $\theta_1=-20^\circ$ ,  $\theta_2=20^\circ$ ); (b) FS-MLE 和 FOC-MMR 在不同 SNR 下的 DOA 估计值的 RMSE 曲线 ( $\theta_1=-20^\circ$ ,  $\theta_2=20^\circ$ )

5 dB, 采用上述两种方法对信号源进行 DOA 估计。每个信噪比进行  $L=100$  次独立试验, 然后根据式 (21) 评估算法的估计精度, 结果如图 3(b) 所示。可见, 基于 ULA 的 FS-MLE 方法在 SNR < -10 dB 时估计相干信号 DOA 的误差较大 (>3.5°); 而 FOC-MMR 方法的 DOA 估计精度 RMSE 在不同信噪比下均能保持在 1.5° 以内, 当 SNR > 5 dB 时, RMSE 值控制在 0.5° 以内。该仿真实验证明 FOC-MMR 方法能够有效抑制高斯白噪声的干扰, 并且能够实现高阶信号和噪声特征向量之间能量的有效分离, 且对相干信号的幅值在归一化空间谱中有较准确的估计。

## 2.2 实验 2: 评估不同方位间隔 $\Delta\theta$ 的分辨性能

对于单次 DOA 估计仿真实验, 两个相干信号的 DOA 估计值分别为  $\theta'_1$  和  $\theta'_2$ , 正确分辨 DOA 的定义<sup>[27]</sup>:

$$|\theta_1 - \theta'_1| + |\theta_2 - \theta'_2| < |\theta_1 - \theta_2|. \quad (22)$$

当

$$\text{RMSE} = \sqrt{(|\theta_1 - \theta'_1|^2 + |\theta_2 - \theta'_2|^2)/2} < \sqrt{|\theta_1 - \theta_2|^2/2 - |\theta_1 - \theta'_1| \cdot |\theta_2 - \theta'_2|} < |\theta_1 - \theta_2|$$

时, 即认为两个仿真信号的方位可以被正确估计。

分别利用基于 ULA ( $M=4$ ) 的 FS-MLE 法和 FOC-MMR 法对上述相干信号源进行 DOA 估计。为使仿真信号更贴近真实信号, 在仿真信号中添加了 SNR=10 dB 的高斯白噪声。当两相干信号的方位分别为  $\theta_1=-20^\circ$  和  $\theta_2=-10^\circ$  时, 即方位间隔  $\Delta\theta=10^\circ$ , 其 DOA 估计结果的归一化空间谱如图 4(a) 所示。可见, 当相干信号的临近角度差  $\Delta\theta=10^\circ$  时, 与 FS-MLE 算法相比, FOC-MMR 算法的空间分辨能力和 DOA 估计精度更高, 且主瓣宽度更窄。

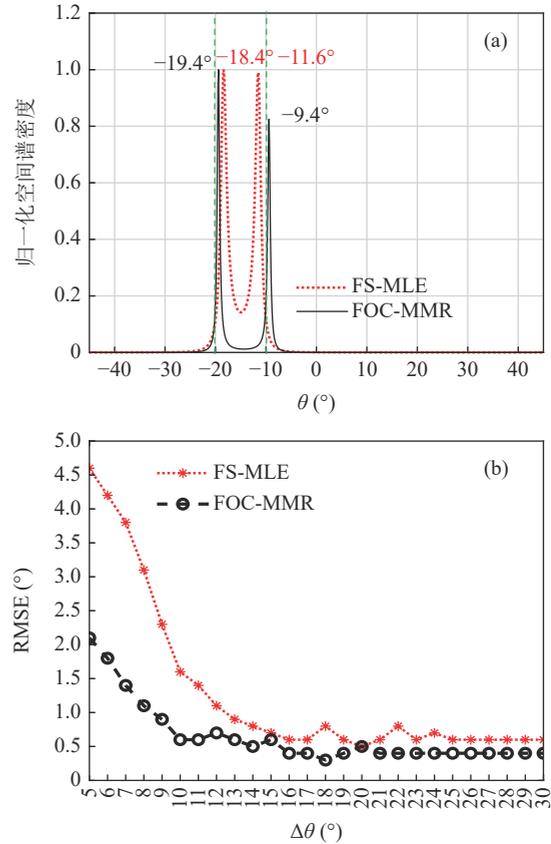


图4 实验2 (a) 方位间隔  $\Delta\theta=10^\circ$  的归一化空间谱 (SNR=10 dB,  $\theta_1=-20^\circ$ ,  $\theta_2=-10^\circ$ ); (b) FS-MLE 和 FOC-MMR 在不同  $\Delta\theta$  下的 DOA 估计值的 RMSE 曲线 ( $\theta_1$  固定,  $\theta_2$  从  $-15^\circ$  变化至  $10^\circ$ )

为评估两种方法分辨相干信号的方位间隔  $\Delta\theta$  的能力, 保持仿真信号 S1 的方位  $\theta_1=-20^\circ$  不变, 仿真信号 S2 的方位  $\theta_2$  从  $-15^\circ$  变化至  $10^\circ$ , 步长为  $1^\circ$ , 即信号的方位间隔  $\Delta\theta$  从  $5^\circ$  变化至  $30^\circ$ 。采用上述两种方法分别对声源进行 DOA 估计, 并进行了  $L=100$  次独立试验。根据式 (21) 和式 (22) 评估算法的估计精度和正确分辨信号能力, 结果如图 4(b) 所示。可见, 当  $\Delta\theta$  低至  $5^\circ$  时, 两种算法都可以正确分辨相干信号的 DOA, 但是 FOC-MMR 方法的测向估计性能高于

FS-MLE 算法,且随着  $\Delta\theta$  的增加,FOC-MMR 正确分辨信号的能力始终高于 FS-MLE 算法。

### 2.3 实验 3: 评估不同数据帧长、占空比和周期数据长度的算法性能

为了衡量 FOC-MMR 算法的运算复杂度,在上述仿真信号中加入 SNR = -15 dB 的高斯白噪声,变换数据帧长由 512 点增加至 2048 点,步长为 512 点。评估时采用同一运行环境,电脑配置为 Intel (R) Core (TM) i7-7500U CPU @ 2.70 GHz, 8 GB RAM。评估两算法估计 DOA 的运行时间和 RMSE 值,结果如表 1 所示,随着数据帧长增加,两种算法运行时间均呈增大趋势,而 FOC-MMR 法的趋势更加明显。对于 DOA 估计的精度,FOC-MMR 法的 RMSE 值在不同数据帧长下均优于 FS-MLE 法。综合运算时间和估计精度考虑,得到 FOC-MMR 法的最佳数据帧长为 1024。

上述数据帧长是在仿真信号占空比为 20% 下确定的,当矩阵重构的数据帧长固定为 1024 采样点,变换脉冲信号的占空比 (5%~40%),采用两种方法分别对声源进行 DOA 估计,重复进行  $L = 100$  次独立试验,其 DOA 估计精度随信号占空比的变化如图 5(a) 所示。可见,随着脉冲信号占空比下降,两种算法的 DOA 估计精度呈下降趋势,原因是参与频谱变换的一帧数据 (1024 个采样点) 包含过多的无用背景噪声

数据 (尤其当占空比小于 10% 时),导致奇异值分解得到的信号特征向量包含的信号能量较低,因而无法实现仿真信号方位的有效估计;随着占空比的增加,参与矩阵重构的信号长度包含了较多的信号特征,从而方位估计精度得到了提高。可见,若脉冲声源信号的占空比较低,应适当降低参与频谱变换的采样点数。

固定信号占空比为 20%,改变脉冲信号周期长度 (即每周期采样点数),评估两种算法的估计精度,得到的 RMSE 曲线如图 5(b) 所示。当每周期采样点数小于 4608 时,FOC-MMR 算法的 RMSE 值均能保持在  $2^\circ$  以内;随着每周期采样点数的增加,进行频谱变换的一帧声压数据包含更多的信号特征,所以两种算法的 DOA 估计精度都逐渐提高。当采样点数大于 5120,即脉宽大于 1024 个采样点时,由于参与频谱变换的第二帧数据的信号长度较短,因而两种算法的 DOA 估计精度显著下降。可见,当占空比为 20% 时,随着周期信号采样点数的增加,应适当调整参与频谱变换的采样点数。

从上述仿真实验的归一化空间谱 (NSS) 图和 RMSE 曲线可以发现,当 FOC-MMR 方法应用在均匀线阵 (ULA,  $M = 4$ ) 时,由于四阶累积量重构后的频域声压数据矩阵可以有效抑制高斯噪声,使得该方法在 SNR 低至 -15 dB 时依然具有较高的空间分辨率及 DOA 估计精度。受线性阵列孔径的限制,随

表 1 不同数据帧长下各算法的运行时间和 RMSE 值 (100 次运行平均)

帧长	512		1024		1536		2048	
	FS-MLE	FOC-MMR	FS-MLE	FOC-MMR	FS-MLE	FOC-MMR	FS-MLE	FOC-MMR
时间 (s)	0.75	2.19	2.68	8.09	5.32	19.75	7.12	37.24
RMSE ( $^\circ$ )	4.2	3.84	2.75	1.92	2.15	1.35	3.15	2.29

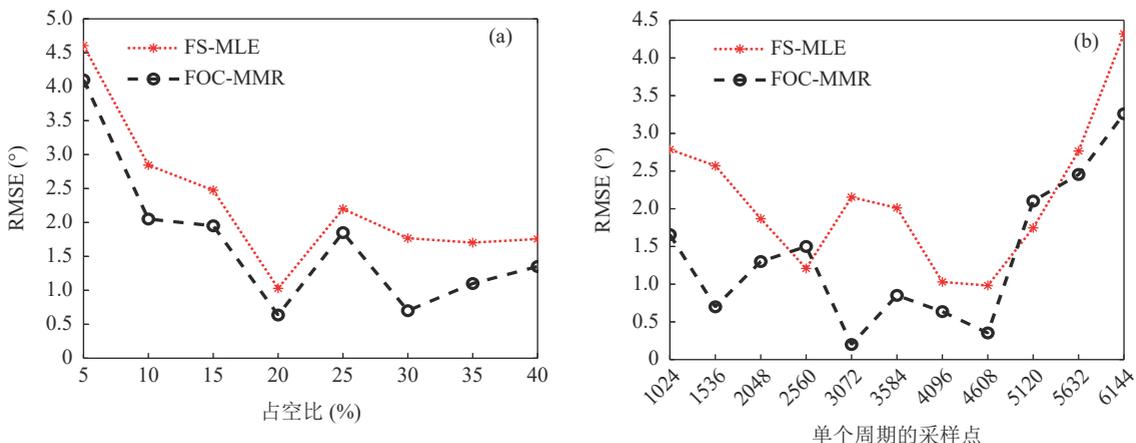


图 5 实验 3 (a) 每周期采样点固定,不同占空比下的各算法的 RMSE 曲线 ( $\theta_1 = -20^\circ, \theta_2 = 20^\circ$ , 每个周期 4096 采样点); (b) 占空比一定,调节每周期采样点长度的各算法的 RMSE 曲线 ( $\theta_1 = -20^\circ, \theta_2 = 20^\circ$ , 占空比 20%)

着待测信号的临近角度  $\Delta\theta$  减小, 导致信号特征向量和噪声特征向量造成较大的混叠, 当  $\text{SNR} \leq 10$  dB 时, 算法不能有效区分  $\Delta\theta < 5^\circ$  的相干信号。当脉冲信号的占空比降低时, 算法的估计精度呈下降趋势, 这是由于参与频谱变换的信号长度较短, 导致包含的信号特征较少。因此, 当占空比较低或周期信号采样点数较多时, 应适当调整参与频谱变换的数据帧长。

### 3 基于面阵的多脉冲声源定位实验

为验证提出的方法 (FOC-MMR) 在估计相干脉冲声源 DOA 的有效性和准确性, 采用阵元间距  $d = 0.16$  m 的 8 通道均匀矩形传声器阵列 (URA), 估计相干脉冲声源 (频率  $f = 1$  kHz, 幅值  $a = 1$ , 相位差  $\Delta\phi = 0.2\pi$ , 相干系数为 0.76) 的 DOA, 脉冲信号时域波形图和相位差如图 6(a) 和图 6(b) 所示。如图 6(d) 所示, 以距地面高  $h = 1.2$  m 的阵列中心为原点建立坐标系, 相干脉冲声源 S1 和 S2 均位于阵列正前方 1.0 m 处, 即  $y = -1.0$  m 平面。实验中, 采样率  $F_s = 8$  kHz, 传声器型号为 CHZ-213 + YG-201, 为了评估算法的鲁棒性和估计精度, 每组实验统计 10 次 DOA 估计结果; 为评估算法对高斯噪声的抑制作用, 在阵列获取的声压数据中分别加入了  $\text{SNR} = 5$  dB 和  $\text{SNR} = 10$  dB 的高斯白噪声。为衡量 DOA 估计精度, 通过均方根误差均值  $e$  来实现, 其定义如下:

$$e = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(\varphi_1 - \varphi'_1)^2 + (\theta_1 - \theta'_1)^2 + (\varphi_2 - \varphi'_2)^2 + (\theta_2 - \theta'_2)^2}{4}}, \quad (23)$$

式中,  $n$  表示每组实验测量的次数,  $\delta_1 = (\varphi_1, \theta_1)$ ,  $\delta_2 = (\varphi_2, \theta_2)$  和  $\delta'_1 = (\varphi'_1, \theta'_1)$ ,  $\delta'_2 = (\varphi'_2, \theta'_2)$ , 分别为声源 DOA 的实际值与估计值。

在此将声源放置在 4 个不同的位置, 共进行了两组实验, 并且对阵列获取的数据添加了不同信噪比 ( $\text{SNR} = 5$  dB, 10 dB) 的高斯白噪声。利用文献 [9] 的频率平滑最大似然估计法 (FS-MLE) 和 FOC-MMR 方法进行 DOA 估计, 以空间分辨率  $1^\circ$  对  $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$  和  $\varphi \in [180^\circ, 360^\circ]$  空间区域进行谱估计, 并根据声场成像结果和均方根误差均值  $e$  对比算法的空间分辨率、鲁棒性和测向精度。下述声场成像图中, 黑色“o”和数字表示声源实际 DOA, 红色“\*”和数字表示声源估计 DOA。

两相干声源实际 DOA 为  $[\delta_1, \delta_2] = [(225^\circ, 120^\circ), (315^\circ, 60^\circ)]$ , DOA 估计值的 10 次统计结果如图 7 所示,  $e_1$  和  $e_2$  分别表示由式 (23) 计算的 FS-MLE 和 FOC-MMR 方法的均方根误差均值  $e$ 。可以发现随着信噪比的降低, FS-MLE 算法抑制高斯白噪声的能力逐渐降低, 根据图 7(c) 和图 7(d) 可以发现, 当两相干声源的俯仰角  $\theta$  的角度差较大时, 该算法的估计精度会显著下降; 由于四阶累积量的矩阵重构致使

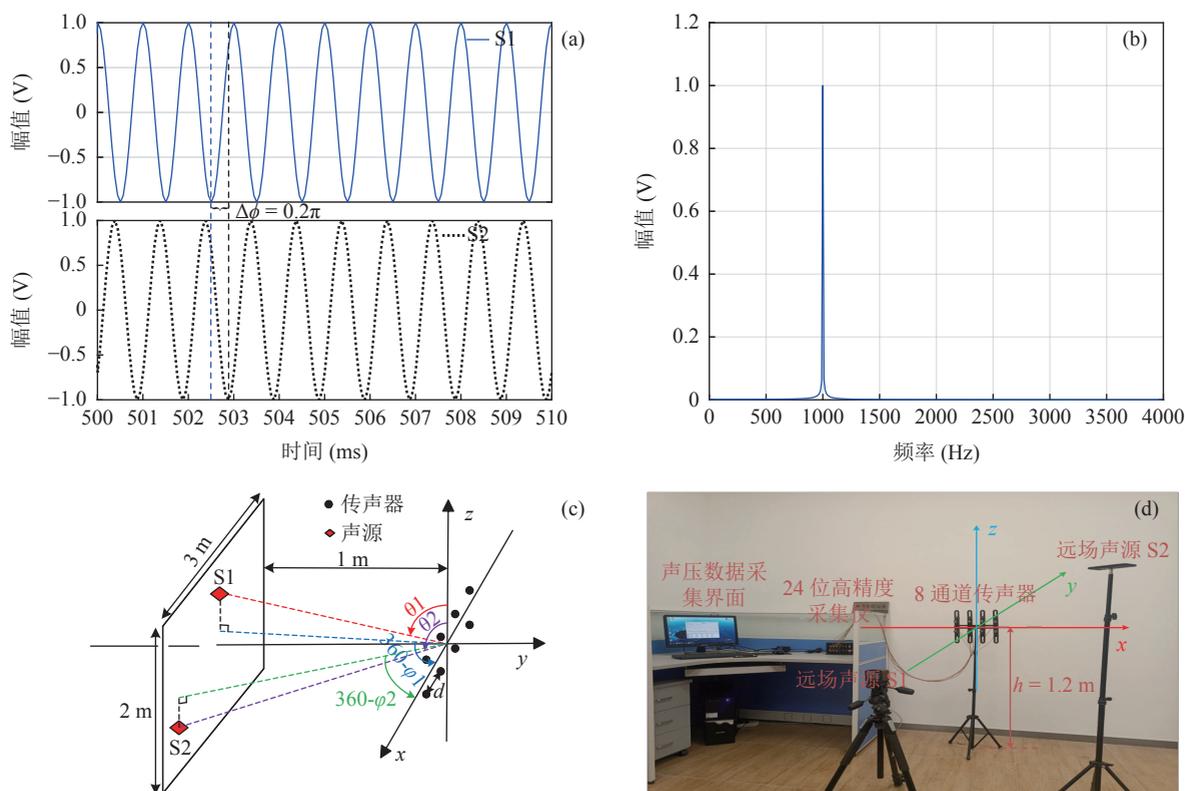


图 6 室内面阵脉冲声源采集 (a) 脉冲信号相位差; (b) 脉冲声源频谱图; (c) 声源 DOA 示意图; (d) 试验现场图

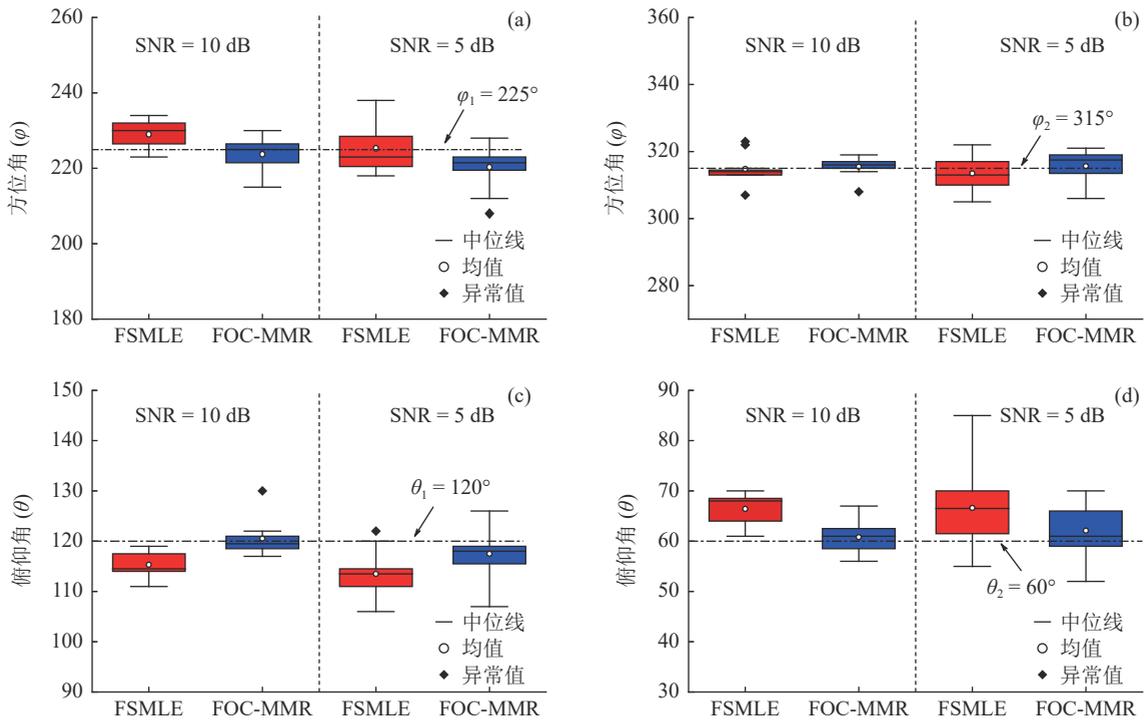


图 7 DOA 估计值的 10 次统计结果 (a)  $\delta_1$  的方位角  $\varphi_1$ ; (b)  $\delta_2$  的方位角  $\varphi_2$ ; (c)  $\delta_1$  的俯仰角  $\theta_1$ ; (d)  $\delta_2$  的俯仰角  $\theta_2$  (实验 1: SNR = 5 dB 时  $e_1 = 7.53^\circ$  和  $e_2 = 5.54^\circ$ , SNR = 10 dB 时  $e_1 = 5.68^\circ$  和  $e_2 = 3.31^\circ$ )

FOC-MMR 算法可以有效抑制高斯白噪声, 其 DOA 估计值的中位数更接近实际值, 且 DOA 估计值和异常值较相同情况下的 FS-MLE 算法更集中、更小, 证明提出的方法在信噪比低至 SNR = 5 dB 时依旧具有较高的鲁棒性和测向估计精度, 根据算法对声场重建如图 8 所示。

为进一步验证算法的定位精度, 设置两相干声源实际 DOA 为  $[\delta_1, \delta_2] = [(240^\circ, 135^\circ), (300^\circ, 135^\circ)]$ , 不同信噪比下 DOA 估计值的 10 次统计结果如图 9 所示。可见, 当方位角  $\Delta\varphi = 60^\circ$  时, FS-MLE 算法对方位角  $\varphi$  多次估计结果的波动范围较大, 且  $\varphi'$  的中位数与真值  $\varphi$  相差较大; FOC-MMR 方法对方位角  $\varphi$  的多次

估计结果更加集中, 且  $\varphi'$  的中位数与真值  $\varphi$  更接近, 如图 9(a) 和图 9(b) 所示。随着信噪比的降低, 两种算法的 DOA 估计结果波动程度增加, 且出现的异常估计值偏离实际值的程度更大, 而 FOC-MMR 法的 DOA 估计结果仍然集中在真值两侧, 证明该方法的空间分辨率要高于 FS-MLE 方法, 根据算法对声场重建如图 10 所示。

根据仿真实验可知当数据帧长为 1024 时, FOC-MMR 方法的计算复杂度较低且测向精度更高, 所以相干脉冲声源 DOA 估计实验中 FOC-MMR 算法根据脉冲声信号的时域稀疏特性以 1024 采样点为窗宽进行 STFT。通过对频域下的每窗声压数据进行

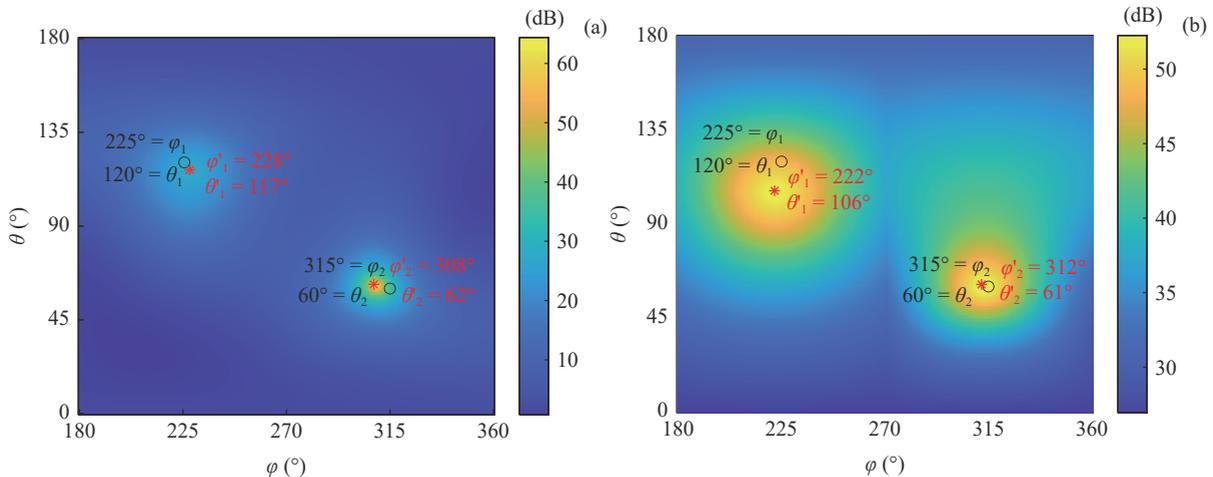


图 8 SNR = 5 dB 时声场成像图 (a) FOC-MMR (RMSE = 4.21°); (b) FS-MLE (RMSE = 7.33°)

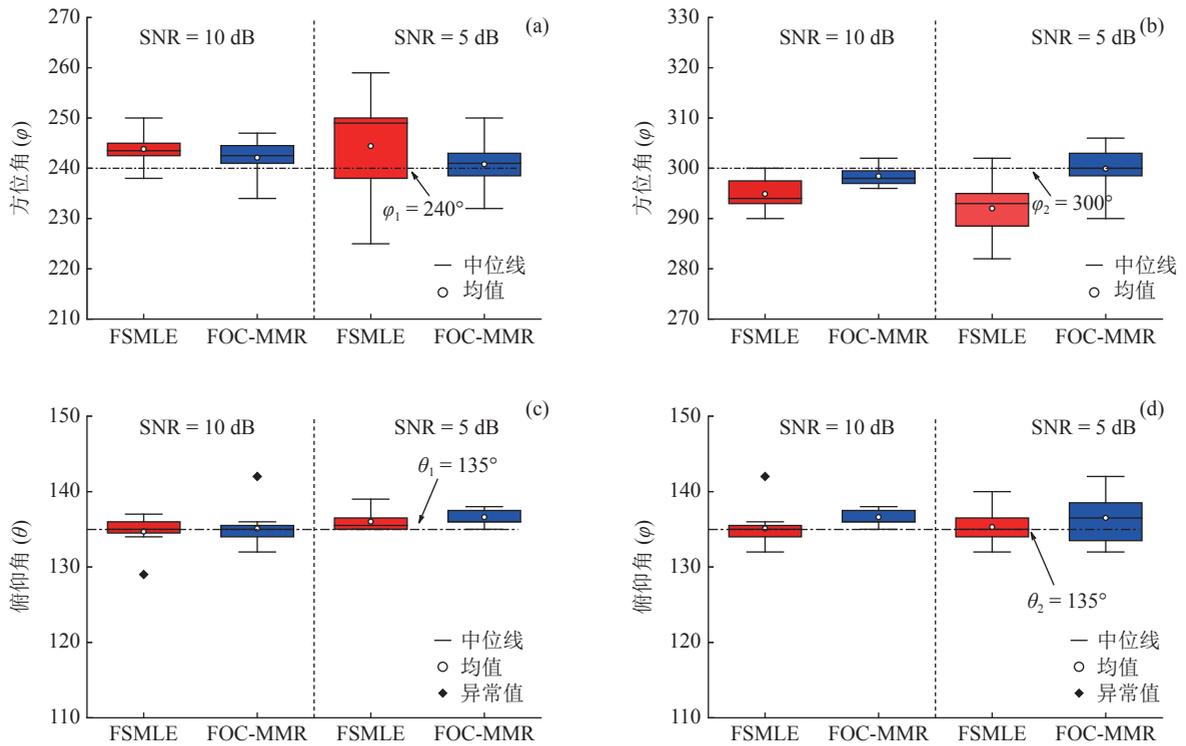


图9 DOA 估计值的 10 次统计结果 (a)  $\delta_1$  的方位角  $\varphi_1$ ; (b)  $\delta_2$  的方位角  $\varphi_2$ ; (c)  $\delta_1$  的俯仰角  $\theta_1$ ; (d)  $\delta_2$  的俯仰角  $\theta_2$  (实验 2: SNR=5 dB 时  $e_1=7.49^\circ$  和  $e_2=4.29^\circ$ , SNR=10 dB 时  $e_1=4.23^\circ$  和  $e_2=2.68^\circ$ )

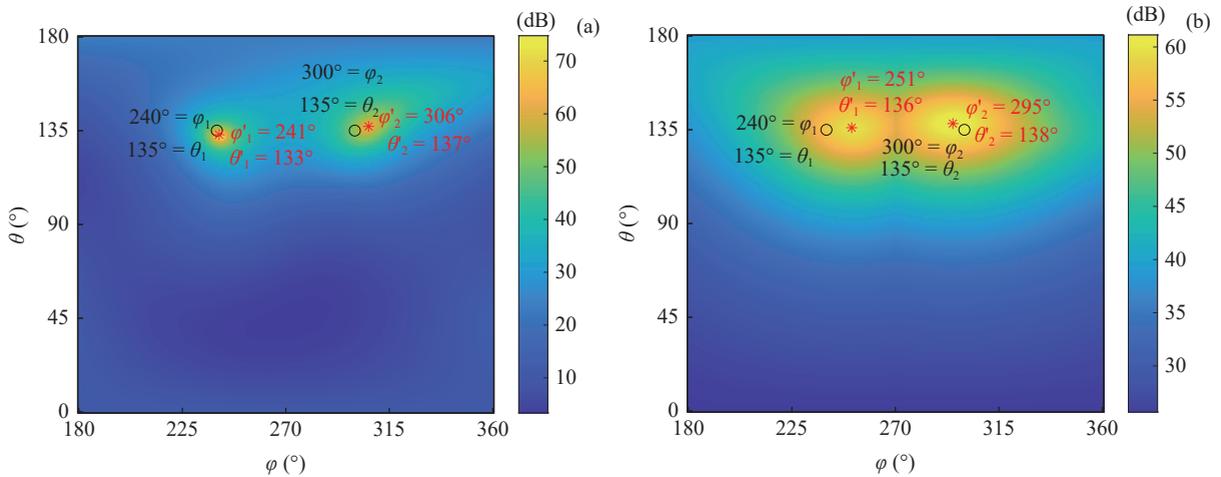


图 10 SNR = 5 dB 时声场成像图 (a) FOC-MMR (RMSE = 3.35°); (b) FS-MLE (RMSE = 6.24°)

四阶累积量重构以扩展虚拟阵元数据得到高阶协方差矩阵,对包含全部相干信号特征的高阶满秩协方差矩阵进行 SVD,实现相干脉冲声源的高阶信号特征向量和高阶噪声特征向量 (HO-NFV) 的有效分离。不仅抑制了空气中低信噪比声信号混入的高斯白噪声,还实现了相干脉冲声源 DOA 的有效估计。由信号频率和阵列结构确定与 HO-NFV 成正交匹配关系的高阶阵列流形矢量 (HO-AMV),利用式 (19) 和式 (20) 求解  $\psi = [\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_L]$  令空间谱函数  $P(\psi)$  取最大值,即得到  $\delta = (\varphi, \theta)$  的估计值。

以分辨率  $1^\circ$  对声源所处空间网格  $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$  和

$\varphi \in [180^\circ, 360^\circ]$  进行划分,经由算法只能有效估计位于网格点上的声源 DOA,若声源的实际 DOA 并未处在空间网格节点上 (即离网格点),则需要以更小的分辨率划分空间网格,由此带来的计算量将大大增加。经过实验验证,在相同运算环境下,FS-MLE<sup>[9]</sup> 方法的运算速度约为 FOC-MMR 方法的 2.5 倍。

(本节的计算结果均保留两位小数。)

### 4 结论

依据传声器阵列信号的时频域稀疏特性,提出

对阵列信号施以四阶累积量重构扩展阵元结构信息以实现相干声源信号的协方差矩阵秩的补充,通过高阶奇异值分解获得正交匹配的 HO-NFV 和高阶信号特征向量,原始 AMV 及其复共轭的克罗内克积包含了扩展阵元的结构信息,且根据 NFV 与 AMV 的正交性,经理论验证扩展后的 HO-NFV 与 HO-AMV 也同样存在正交匹配性,通过 FOC-MMR 算法达到估计相干信号的 DOA 的目的。FOC-MMR 方法的优点在于通过高阶累积量的阵列扩展性和噪声抑制能力,在 SNR 低至 $-15$  dB 时依旧具有较高的相干信号 DOA 估计能力。当采用基于 ULA ( $M=4$ ) 和 URA ( $M=8$ ) 估计频率相同但相位不同的相干信号的 DOA 时,经仿真和实验估计结果分析,可得出如下结论:(1) 当 SNR = 10 dB 时,经过四阶累积量重构的频域阵列声压数据可以补充欠正定协方差矩阵的秩,可正确分辨的两相干信号方位间隔  $\Delta\theta$  可以低至  $5^\circ$ ;(2) 综合考虑数据帧长和占空比对算法性能的影响,进行矩阵重构的数据帧长为 1024 采样点时,脉冲信号的占空比应大于 5%;当信号占空比较低(每周周期采样点数一定)或每周周期采样点数较多(占空比一定)时,应适当调整参与频谱变换的数据帧长,以确保每帧数据包含较长的信号;(3) 统计相同条件下多次 DOA 估计值,相较于 FS-MLE 算法,FOC-MMR 算法的 DOA 估计值更加集中,估计精度更高,且受噪声影响较小。

### 参 考 文 献

- Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1986; **34**(3): 276—280
- Richard R, Thomas K A. Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, 1989; **37**(7): 984—995
- 胡盈琦, 邓科, 殷勤业. 采用前向空间平滑分组的混合信号波达方向估计算法. *西安交通大学学报*, 2020; **54**(9): 164—172
- Wen J, Liao B, Guo C. Spatial smoothing based methods for direction-of-arrival estimation of coherent signals in nonuniform noise. *Digital Signal Process.*, 2017; **67**: 116—122
- Pan J, Sun M, Wang Y, et al. An enhanced spatial smoothing technique with ESPRIT algorithm for direction of arrival estimation in coherent scenarios. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2020; **68**: 3635—3643
- Arun P S, Nachiketa T. An improved method to localize simultaneously close and coherent sources based on symmetric-Toeplitz covariance matrix. *Appl. Acoust.*, 2021; **182**: 108176
- 张石, 许方晗, 余黎煌, 等. 基于重构噪声子空间的相干信号 DOA 估计. *东北大学学报(自然科学版)*, 2021; **42**(12): 1696—1700
- 时胜国, 李赢. 声矢量圆阵宽带相干目标 MVDR 方位估计. *应用声学*, 2019; **38**(4): 530—539
- Hu Y, Lu J, Qiu X. Direction of arrival estimation of multiple acoustic sources using a maximum likelihood method in the spherical harmonic domain. *Appl. Acoust.*, 2018; **135**: 85—89
- 陈璐, 毕大平, 崔瑞, 等. 嵌套阵列最大似然估计测向算法. *航空学报*, 2017; **38**(11): 265—276
- Hu Y, Lu J, Qiu X. A maximum likelihood direction of arrival estimation method for open-sphere microphone arrays in the spherical harmonic domain. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2015; **138**(2): 791—794
- 李秀坤, 李婷婷, 谷新禹. 典型概率密度背景下四阶累积量波束形成的阵增益. *声学学报*, 2014; **39**(5): 557—564
- 单泽彪, 鲁胜麟, 刘小松, 等. 基于高阶累积量的阵列式超声波传感器风速风向测量. *仪器仪表学报*, 2021; **42**(6): 279—286
- 张君, 陈志菲, 常继红, 等. 声矢量锥形阵的高阶累积量波达方向估计. *声学学报*, 2019; **44**(6): 970—985
- Liu J, Zhou W, Wang X. Fourth-order cumulants-based sparse representation approach for DOA estimation in MIMO radar with unknown mutual coupling. *Signal Process.*, 2016; **128**: 123—130
- 齐子森, 郭英, 王布宏, 等. 基于四阶累积量的共形阵列波达方向估计算法. *电波科学学报*, 2011; **26**(4): 735—744
- Yilmaz Ö, Rickard S. Blind separation of speech mixtures via time-frequency masking. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2004; **52**(7): 1830—1847
- Ye Z F, Dai J S. DOA estimation for nonuniform circular array with mutual coupling based on fourth order cumulants. *J. Univ. Sci. Technol. China*, 2008; **38**(7): 770—775
- 胡定玉, 刘馨悦, 李易冰, 等. 采用稀疏测量的高分辨率相干声场分离. *声学学报*, 2020; **45**(4): 563—570
- 徐亮, 胡鹏, 张永斌, 等. 可用于相干声源的快速反卷积声源成像算法. *机械工程学报*, 2018; **54**(23): 82—92
- 王心怡, 罗松. 双目标相干源窄带信号波达方向估计算法. *声学技术*, 2014; **33**(4): 363—366
- Perotin L, Vincent E. CRNN-based multiple DoA estimation using acoustic intensity features for ambisonics recordings. *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, 2019; **13**(1): 22—33
- Hu Y, Abhayapala T D, Samarasinghe P N. Multiple source direction of arrival estimations using relative sound pressure based MUSIC. *IEEE-ACM T AUDIO SPE*, 2021; **29**: 253—264
- Van Trees H L. 最优阵列处理技术. 汤俊, 等译. 北京: 清华大学出版社, 2008: 75—208
- Fontgalland G, Pedro H J G. Normality and correlation coefficient in estimation of insulators' spectral signature. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2015; **22**(8): 1175—1179
- Sidki M, Nicolas J. Localization of coherent and incoherent sound sources via an optimization process. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988; **84**(2): 639—644
- Gershman A B. Direction finding using beamspace root estimator banks. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1998; **46**(11): 3131—3135